

Fizika II: elektricitet i magnetizam

Teorijski koncepti i formule

Ukoliko uočite grešku, javite na filip.rescic@uniri.hr

Sadržaj

1 Električni naboj. Električno polje. Coulombov zakon.	4
1.1 Coulombov zakon	4
1.2 Električno polje	4
2 Električni potencijal. Potencijalna energija naboja u električnom polju. Gaussov zakon.	5
2.1 Elektrostatska sila je konzervativna	5
2.2 Električni potencijal	5
2.3 Električni napon	5
2.4 Rad sile protivne elektrostatskoj	5
2.5 Gaussov zakon	5
2.6 Osnovni zakoni elektrostatike	6
2.7 Neka posebna polja i potencijali	6
2.7.1 Točkasti naboj	6
2.7.2 Sfera s nabojem na površini	6
2.7.3 Ravna velika nabijena ravnina	6
2.7.4 Dugački nabijeni cilindar	7
3 Vodiči. Kondenzatori. Električni kapacitet. Energija električnog polja.	8
3.1 Kapacitet jednog vodiča	8
3.2 Kondenzator	8
3.3 Električni kapacitet nekih kondenzatora	8
3.3.1 Pločasti kondenzator	8
3.3.2 Sferni ili kuglasti kondenzator	8
3.3.3 Cilindrični kondenzator	8
3.4 Spajanje kondenzatora	9
3.5 Energija nabijenog kondenzatora	9
3.6 Energija električnog polja	9
4 Dielektrici. Električni dipol. Električni pomak.	10
4.1 Električni dipol i električni dipolni moment	10
4.2 Dipol u električnom polju	10
4.3 Polarizacija i električni pomak	10
5 Električna struja i otpor. Ohmov zakon. Rad i snaga električne struje.	11
5.1 Jakost i gustoća struje	11

5.2	Ohmov zakon	11
5.3	Električni otpor	11
5.4	Rad i snaga električne struje	12
6	Krugovi s istosmjernom strujom. Kirchoffova pravila.	13
6.1	1. Kirchoffovo pravilo	13
6.2	2. Kirchoffovo pravilo	13
6.3	Spajanje otpornika	13
6.3.1	Serijski spoj	13
6.3.2	Paralelni spoj	13
6.4	Spajanje izvora EM napona	14
6.4.1	Serijski	14
6.4.2	Paralelni	14
7	Gustoća magnetnog toka. Biot - Savartov zakon. Lorentzova sila	15
7.1	Magnetno polje	15
7.2	Magnetna sila na vodič	15
7.3	Biot-Savartov zakon	16
7.4	Primjeri izračunati pomoću BS zakona	16
7.4.1	Duga, tanka i ravna žica	16
7.4.2	Kružni luk	16
7.4.3	Solenoid	16
8	Elektromagnetska indukcija. Faradayev zakon.	17
8.1	Faradayevi pokusi	17
8.2	Faradayev zakon elektromagnetske indukcije	17
8.3	Induktivnost i magnetni tok	17
9	Ampéreev zakon. Induktivitet. Energija magnetskog polja.	18
9.1	Ampéreev zakon	18
9.2	Tok magnetnog polja	18
9.3	Energija magnetnog polja	18
9.4	Induktivnost i energija magnetnog polja	19
10	Magnetski dipol. Magnetsko polje u tvarima. Jakost magnetskog polja. Magnetski krugovi.	20
10.1	Magnetni dipol i magnetni dipolni moment	20
10.2	Dipol u magnetnom polju	20
10.3	Tvari s magnetskim svojstvima	20
10.4	Magnetizacija i jakost magnetskog polja	20
10.5	Ampéreev zakon u tvarima	21
10.6	Osnovni zakon magnetostatike	21
10.7	Magnetni krug	21
11	Krugovi s vremenski ovisnom strujom. Izmjenična struja. Elektromagnetski titrajni krugovi.	22
11.1	Izmjenična struja	22
11.2	Otpornik u krugu izmjenične struje	22
11.3	Kondenzator u krugu izmjenične struje	22
11.4	Zavojnica u krugu izmjenične struje	22
11.5	Impedancija	23
11.6	Fazni pomak	23
11.7	Snage izmjenične struje	23
11.8	RLC strujni krug	23
12	Elektromagnetski valovi. Maxwellove jednadžbe.	25
12.1	Ravni val	25

12.2	Poytingov vektor	25
12.3	Gustoća energije EM vala	25
12.4	Snaga EM zračenja	25
12.5	Tlak EM zračenja	25
12.6	Maxwellove jednačbe	26

1 Električni naboj. Električno polje. Coulombov zakon.

1.1 Coulombov zakon

Sila kojom naboj q_1 djeluje na naboj q_2

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0}, \quad (1.1)$$

gdje je $\vec{r}_0$ jedinični vektor na spojnicu naboja usmjerenu od q_1 do q_2 .



Dielektična permitivnost $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, gdje je

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (1.2)$$

dielektrična permitivnost vakuumu i zraka ($\varepsilon_r = 1$ u tom slučaju). Konstanta k

$$k := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \quad (1.3)$$

1.2 Električno polje

Iznos električnog polja koje naboj q_0 stvara na udaljenosti r

$$\boxed{E = k \frac{q_0}{r}} \quad (1.4)$$

Općenito, električno polje naboja q_0 koje djeluje na testni naboj q je

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0 q}}{q}, \quad \text{smjer polja} = \text{smjer sile na } \oplus \text{ naboj.} \quad (1.5)$$

2 Električni potencijal. Potencijalna energija naboja u električnom polju. Gaussov zakon.

2.1 Elektrostatska sila je konzervativna

Rad Coulombove sile po zatvorenom putu jednak je nuli

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}, \quad (2.1)$$

gdje je C zatvorena petlja.

2.2 Električni potencijal

Postojanje el. potencijala je direktna posljedica konzervativnosti elektrostatske sile. Uzmimo općeniti električni potencijal, $\varphi = \varphi(\eta)$, gdje je η koordinata u smjeru najbržeg rasta potencijala. Električno polje

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\eta} \vec{e}_\eta \quad (\vec{e}_\eta = \text{jedinični vektor u smjeru najbržeg rasta potencijala}).$$

φ je određen do na konstantu $\Rightarrow \varphi$ i $\varphi + \text{konst.}$ daju jednakno električno polje.

Jedinice

- potencijal

$$[\varphi] = \text{V (volt)}$$

- električno polje

$$[\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

2.3 Električni napon

Razlika potencijala u dvjema točkama

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (2.2)$$

2.4 Rad sile protivne elektrostatskoj

Mi ćemo li testni naboj q u polju drugog naboja od točke A do točke B vršimo rad

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q[\varphi(B) - \varphi(A)] \quad (2.3)$$

Ako za početnu točku A odaberemo ∞

$$\varphi(\infty) \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

tada je rad $W = q\varphi(B)$. *Fizikalna interpretacija potencijala*: rad po jediničnom naboju

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

2.5 Gaussov zakon

Fundamentalni zakon elektrodinamike

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{unutar } S}}{\varepsilon_0}}, \quad (2.5)$$

gdje je S **zatvorena ploha** (npr. sfera, zatvoreni cilindar, ...). Integral $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ se naziva *tok električnog polja*.

2.6 Osnovni zakoni elektrostatike

1.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{vrijedi samo u slučaju elektrostatike} \quad (2.6)$$

2.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{unutar}}}{\varepsilon_0}, \quad \text{vrijedi uvijek!} \quad (2.7)$$

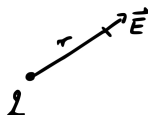
2.7 Neka posebna polja i potencijali

Jakosti el. polja koje slijede mogu se izvesti iz Gaussovog zakona (C - konstanta; uobičajeno je uzeti $C = 0$).

2.7.1 Točkasti naboj

$$\varphi = k \frac{q}{r} + C \quad (2.8)$$

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad (2.9)$$



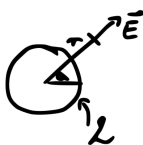
2.7.2 Sfera s nabojem na površini

- Izvan sfere:

$$\varphi = k \frac{q}{r} + C \quad (2.10)$$

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad (2.11)$$

- Unutar sfere: $E = 0$.

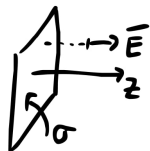


2.7.3 Ravna velika nabijena ravnina

Postavimo ravninu u koordinatnoj ravnini $z = 0$; σ je plošna gustoća naboja.

$$\varphi = - \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) z + C \quad (2.12)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (2.13)$$



2.7.4 Dugački nabijeni cilindar

$$\varphi = - \left(\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \right) \ln r + C \quad (2.14)$$

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.15)$$

U ovom je slučaju uobičajen izbor za konstantu $C = (\sigma a / \varepsilon_0) \ln a$.



3 Vodiči. Kondenzatori. Električni kapacitet. Energija električnog polja.

3.1 Kapacitet jednog vodiča

Za naboj na vodiču Q , ako je potencijal na površini V kapacitet vodiča je

$$C \equiv \frac{Q}{V}, \quad [C] = \text{F Farad} \quad (3.1)$$

3.2 Kondenzator

Dva vodiča na različitim potencijalima V_1 i V_2

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{Q}{U}, \quad (3.2)$$

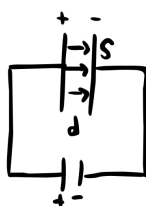
gdje je onda U napon između ploča kondenzatora.

3.3 Električni kapacitet nekih kondenzatora

3.3.1 Pločasti kondenzator

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (3.3)$$

gdje je S površina ploča, a d je razmak između ploča.



3.3.2 Sferni ili kuglasti kondenzator

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad (3.4)$$

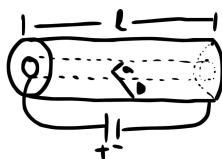
gdje je r_1 (r_2) radijus unutarnje (vanjske) sfere.



3.3.3 Cilindrični kondenzator

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (3.5)$$

gdje je l duljina kondenzatora, a r_1 (r_2) radijus unutarnjeg (vanjskog) cilindra.



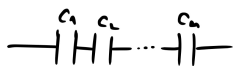
3.4 Spajanje kondenzatora

- Serijski spoj:

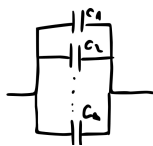
$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \quad (3.6)$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (3.7)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{ekv}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \quad (3.8)$$



- Paralelni spoj:



$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (3.9)$$

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n \quad (3.10)$$

$$\boxed{C_{\text{ekv}} = \sum_{i=1}^n C_i} \quad (3.11)$$

3.5 Energija nabijenog kondenzatora

Energija električnog polja među elektrodama.

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} \quad (3.12)$$

3.6 Energija električnog polja

Rad potreban da se naboji iz ∞ dovedu u konačan dio prostora

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{\text{po parovima}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{d_{ij}} \quad (3.13)$$

Gustoća energije električnog polja (ΔW_p je energija sadržana u volumenu ΔV)

$$\omega_p = \frac{\Delta W_p}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \quad (3.14)$$

4 Dielektrici. Električni dipol. Električni pomak.

4.1 Električni dipol i električni dipolni moment

Električni dipol je neutralan sustav od dva naboja istih iznosa, različitih predznaka, razmaknutih na udaljenosti $|\vec{l}|$. Električni dipolni moment ovog sustava naboja je

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad ([\vec{p}_e] = \text{Cm}) \quad (4.1)$$

4.2 Dipol u električnom polju

Moment sile na dipol momenta $\vec{p}_e$ u električnom polju jakosti $\vec{E}$ iznosi

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E} \quad (4.2)$$

Električna potencijalna energija dipola u polju $\vec{E}$ glasi

$$W_p = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} \quad (4.3)$$



4.3 Polarizacija i električni pomak

Pretpostavimo da u malom volumenu Δv imamo n molekula čiji su dipolni momenti $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$. Polarizacija $\vec{P}$ je vektor definiran relacijom

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \left(\frac{n}{\Delta v} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = N \langle \vec{p}_e \rangle, \quad (4.4)$$

gdje je N koncentracija molekula, a $\langle \vec{p}_e \rangle$ prosječni dipolni moment u volumenu Δv .

Vektor električnog pomaka $\vec{D}$ definiran je izrazom

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.5)$$

Dielektrici su sredstva za koja je polarizacija proporcionalna primijenjenom električnom polju. Općenito se uvodi konstanta susceptibilnosti χ_e i pišemo

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.6)$$

Vektor električnog pomaka u dielektricima je onda

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}. \quad (4.7)$$

5 Električna struja i otpor. Ohmov zakon. Rad i snaga električne struje.

5.1 Jakost i gustoća struje

Struja = usmjereno gibanje nabijenih čestica pod utjecajem električne sile. *Jakost električne struje* je količina naboja koji je prošao u nekom vremenskom intervalu

$$I \equiv \frac{\Delta q}{\Delta t}; \quad [I] = \text{A (amper)} \quad (5.1)$$

Gustoća električne struje J : omjer struje i površine elementa plohe koji je okomit na smjer gibanja naboja

$$J \equiv \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}}; \quad [J] = \text{Am}^{-2} \quad (5.2)$$

5.2 Ohmov zakon

Vodiči imaju slobodne elektrone koji se mogu gibati vodičem ako ga stavimo u električno polje. Tako nastaje električna struja koja je proporcionalna naponu na krajevima vodiča $I \sim U$. Konstanta proporcionalnosti je *električni otpor* R , što daje *Ohmov zakon*

$$\boxed{U = RI}; \quad [R] = \Omega \text{ (om)} \quad (5.3)$$

Može se zapisati na različite načine, jedan od kojih je

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}, \quad (5.4)$$

gdje je σ_e *električna provodnost* ($[\sigma_e] = \text{Sm}^{-1}$).

5.3 Električni otpor

Električni otpor homogenog vodiča duljine l i površine poprečnog presjeka S je

$$\boxed{R = \rho_e \frac{l}{S}}, \quad (5.5)$$

gdje je ρ_e *električna otpornost* ($[\rho_e] = \Omega\text{m}$); $\rho_e = 1/\sigma_e$. Električna vodljivost definira se formulom

$$G \equiv \frac{1}{R}; \quad [G] = \text{S (simens)}. \quad (5.6)$$

Električni otpor ovisi o temperaturi. Ako su promjene temperature male, električna otpornost je

$$\rho_e = \rho'_e (1 + \alpha \Delta t), \quad (5.7)$$

gdje je ρ'_e električna otpornost na početnoj temperaturi t_1 , a ρ_e otpornost na temperaturi t_2 , gdje je

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (5.8)$$

Konstanta α naziva se *toplinski koeficijent električnog otpora*

$$[\alpha] = (^{\circ}\text{C})^{-1} \text{ ili } \text{K}^{-1} \quad (5.9)$$

Budući da je $R \sim \rho_e$

$$R = R'(1 + \alpha \Delta t) \quad (5.10)$$

5.4 Rad i snaga električne struje

Ako električna struja prolazi otpornikom predaje energiju koja povećava unutrašnju energiju otpornika, koja se potom prenosi na okolinu u obliku topline. Kažemo da je električna struja *obavila rad*

$$\Delta W = UI\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 R\Delta t, \quad (5.11)$$

gdje je U napon na otporniku, I struja kroz otpornik, a Δt vremenski interval. Taj ej rad jednak toplini predanoj okolini

$$\Delta Q = UI\Delta t = I^2 R\Delta t. \quad (5.12)$$

Ovaj se zakon naziva *Joules-Lenzov zakon*.

Snaga električne struje je

$$\boxed{P = UI = I^2 R}; \quad [P] = \text{W (vat)}. \quad (5.13)$$

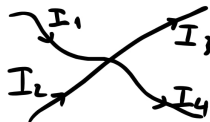
6 Krugovi s istosmjernom strujom. Kirchoffova pravila.

6.1 1. Kirchoffovo pravilo

Zbroj struja koje ulaze (I_1, I_2) u čvorište jednak je zbroju struja koje izlaze (I_3, I_4):

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4. \quad (6.1)$$

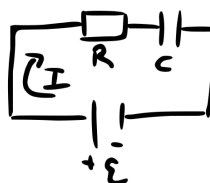
To je posljedica *zakona očuvanja naboja*.



6.2 2. Kirchoffovo pravilo

Zbroj svih elektromotornih napona jednak je zbroju padova napona na trošilima. Npr. u RC krugu imamo

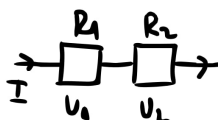
$$\varepsilon = U_R + U_C = IR + \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0. \quad (6.2)$$



6.3 Spajanje otpornika

6.3.1 Serijski spoj

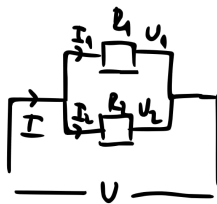
$$U = U_1 + U_2, \quad R_S = \sum_{i=1}^N R_i \quad (6.3)$$



6.3.2 Paralelni spoj

$$U_1 = U_2 = U, \quad I = I_1 + I_2 \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (6.5)$$



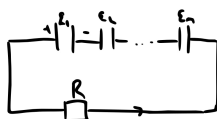
6.4 Spajanje izvora EM napona

6.4.1 Serijski

U seriju spajamo baterije koje daju jednaku struju. U protivnom veća struja uzrokuje kvr baterije koja daje manju struju. Moramo uzeti u obzir da izvori imaju unutarnji otpor (označen u nastavku sa r)

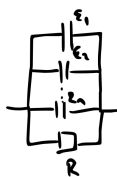
$$\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx \dots \approx \varepsilon_n \Rightarrow \varepsilon \approx n\varepsilon_1 \quad (6.6)$$

$$R_u R + nr \Rightarrow I = \frac{n\varepsilon}{R + nr} \quad (6.7)$$



6.4.2 Paralelni

Spajamo n baterija koje daju jednake napone $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n \equiv U$. Unutarnji otpor je



$$\frac{1}{r_n} = \dots = \frac{n}{r} \Rightarrow R = R + r_n = R + \frac{r}{n} \quad (6.8)$$

$$I = \frac{U}{R + \frac{r}{n}} \quad (6.9)$$

7 Gustoća magnetnog toka. Biot - Savartov zakon. Lorentzova sila

7.1 Magnetno polje

Magnetno polje $\vec{B}$ (gustoća magnetnoga toka, magnetna indukcija) definira se preko izraza za magnetnu silu $\vec{F}_B$ koja djeluje na česticu naboja q ako se giba u polju brzinom $\vec{v}$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.1)$$

Ovaj izraz nazivamo *Lorentzovom silom* iako je "potpuna" jednačba za Lorentzovu silu

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}, \quad (7.2)$$

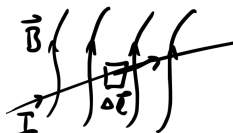
gdje je $\vec{E}$ električno polje.

7.2 Magnetna sila na vodič

Sila na element vodiča duljine Δl kojim protječe struja I u magnetnom polju $\vec{B}$ je

$$\Delta \vec{F}_B = I \Delta \vec{l} \times \vec{B}. \quad (7.3)$$

Vektor $\Delta \vec{l}$ je tangencijalan na vodič i ima smjer struje.



Za ravni vodič duljine l kojim protječe struja I i koji se nalazi u homogenom magnetnom polju $\vec{B}$, vrijedi

$$\vec{F}_B = I \vec{l} \times \vec{B}. \quad (7.4)$$

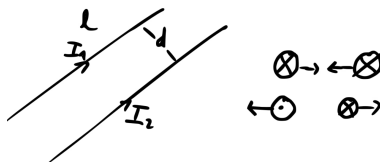
Ako promatramo veoma dugi, tanki vodič kojim protječe struja I_1 u polju njemu paralelnog, veoma dugog i tankog vodiča kojim protječe struja I_2 , tada je magnetno polje drugog vodiča

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d}, \quad (7.5)$$

a sila između dva vodiča po jediničnoj duljini iz (7.4)

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}, \quad (7.6)$$

gdje je d udaljenost između vodiča, a l duljina odsjeka vodiča kojeg promatramo



Ako vodičima protječu struje u istom smjeru, oni se privlače. U protivnom, oni se odbijaju.

7.3 Biot-Savartov zakon

Magnetno polje elementa duljine Δl kojim protječe struja I u točki P koja je udaljena za r od elementa, dano je *Biot-Savartovim zakonom*:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad r = |\vec{r}|. \quad (7.7)$$

U zadacima ćemo koristiti iznos vektora $\Delta \vec{B}$

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}, \quad (7.8)$$

gdje je $\alpha = \angle(\Delta \vec{l}, \vec{r})$. Biot-Savartov zakon i princip linearne superpozicije su baza za osnovne zakone magnetostatike.

7.4 Primjeri izračunati pomoću BS zakona

7.4.1 Duga, tanka i ravna žica

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.9)$$

7.4.2 Kružni luk

U središtu luka magnetno polje je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\phi}{R}, \quad (7.10)$$

gdje je ϕ središnji kut otvora nad lukom.

7.4.3 Solenoid

Magnetno polje unutar solenoida, daleko od rubova je približno homogeno iznosa

$$B = \frac{\mu_0 I N}{L} = \mu_0 I n, \quad (7.11)$$

gdje je N broj zavoja, a L duljina solenoida. Veličina n je broj zavoja po jediničnoj duljini. Polje izvan idealnog (beskonačno dugog) solenoida jednako je nuli.

8 Elektromagnetska indukcija. Faradayev zakon.

8.1 Faradayevi pokusi

M. Faraday je u prvoj polovici 19. st. izvodio pokuse s magnetskim poljem i žičanom petljom, te zapazio da se oni mogu podijeliti u 3 slučaja:

- **Pokus 1:** Petlju je pomicao u magnetnom polju.
- **Pokus 2:** Magnetno polje pomicao je u odnosu na petlju u mirovanju.
- **Pokus 3:** Mijenjao je iznos magnetnog polja u vremenu, dok su petlja i strujni krug koje je stvarao polje bili u mirovanju.

U sva tri slučaja u petlji je zabilježena struja.

8.2 Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

Iako je fizika iza pokusa 1 posve drugačija od pokusa 2 i 3, sva se tri pokusa mogu opisati istom formulom: u strujnoj petlji inducira se elektromotorni napon ε kada kroz petlju imamo *promjenu* magnetskog toka ϕ

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (8.1)$$

što je *Faradayev zakon indukcije*. U pokusu 1 elektromotorni napon je posljedica magnetne sile. U pokusima 2 i 3 elektromotorni napon je posljedica induciranog električnog polja. Može se pokazati da se zakon indukcije u (8.1) u pokusu 1 izvodi iz formule

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (8.2)$$

U zadacima se gornja jednadžba koristi kada ne možemo vidjeti kako se mijenja magnetski tok. Za pokuse 2 i 3 moramo zapisati novi zakon. Uzmemo li u obzir da je

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (8.3)$$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (8.4)$$

jednadžba (8.1) postaje

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (8.5)$$

gdje je C krivulja koja omeđuje plohu S .

8.3 Induktivnost i magnetni tok

Magnetni tok ϕ kroz petlju kojom protječe struja I je $\phi = LI$, gdje je L *samoinduktivnost* petlje. Magnetni tok kojeg stvara struja I_1 u petlji 1, a prolazi kroz petlju 2 je $\phi_{12} = M_{12}I_1$ gdje je M_{12} *međuiinduktivnost* dvije petlje. Slično, magnetni tok kojeg stvara I_2 u petlji 2, a prolazi petljom 1 je $\phi_{21} = M_{21}I_2$. Može se pokazati da je $M_{12} = M_{21} = M$.

Mijenja li se struja u strujnom krugu s petljom, inducirani napon je

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (8.6)$$

Ukoliko postoje dva strujna kruga, inducirani naponi su

$$\varepsilon_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \quad (8.7)$$

$$\varepsilon_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}. \quad (8.8)$$

9 Ampérov zakon. Induktivitet. Energija magnetskog polja.

9.1 Ampérov zakon

Neka je C **zatvorena** krivulja koja obuhvaća struju I . Tada vrijedi

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (9.1)$$

Postavimo li prste desne ruke u smjeru obilaženja krivulje C , *pozitivne* struje su one koje gledaju u smjeru palca, a *negativne* one koje gledaju suprotno. Integral koji se pojavljuje u (9.1) naziva se cirkulacijom polja $\vec{B}$.

Ukoliko krivulja C ne obuhvaća struju I , tada je

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (9.2)$$

Ampérov zakon je jedan od dva osnovna zakona magnetostatike.

9.2 Tok magnetnog polja

Tok magnetnog polja kroz krivulju C definira se formulom

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (9.3)$$

Ako je magnetno polje konstantno i okomito na plohu kojom prolazi, tada je tok polja $\phi_m = BS$. Npr., za solenoid imamo upravo taj slučaj, gdje je

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad (9.4)$$

pa je tok za solenoid kružnog presjeka

$$\phi_m = \mu_0 \frac{NI}{L} \cdot R^2 \pi \quad (9.5)$$



9.3 Energija magnetnog polja

Energiju magnetskog polja ne može se definirati u okviru magnetostatike na analogan način kao u slučaju elektrostatičke za energije električnog polja. Kao primjer, pogledajmo strujnu petlju



Kad priključimo petlju na izvor elektromotornog napona, struja kroz petlju polagano raste, pa će i magnetno polje, odnosno magnetni tok kroz petlju rasti. No, promjena magnetskog toka kroz petlju, inducira električnog polje koje usporava rast struje i magnetnog toka kroz petlju. Izvor mora obaviti dodatni rad protiv inducirane sile da održi struju konstantnom. Taj je rad jednak energiji magnetskog polja oko neke točke P

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_P \vec{B}^2 dV, \quad (9.6)$$

gdje je $\vec{B}$ konačno magnetno polje.

9.4 Induktivnost i energija magnetnog polja

induktivnost se može definirati na nekoliko načina no najčešće je izračun najjednostavniji, pomoću izraza za energiju magnetskog polja.

Magnetsko polje proporcionalno je struji, $B \sim I$ što se može vidjeti iz Biot-Savartovog zakona. Zato energiju magnetskog polja možemo zapisati u obliku

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^N M_{ij} I_i I_j \quad (9.7)$$

Primjer: $N = 2$. Energija magnetskog polja

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 dV \quad (9.8)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}_1^2 dV}_{\frac{1}{2} L_1 I_1^2} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}_2^2 dV}_{\frac{1}{2} L_2 I_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 dV}_{M_{12} I_1 I_2}. \quad (9.9)$$

10 Magnetski dipol. Magnetsko polje u tvarima. Jakost magnetskog polja. Magnetski krugovi.

10.1 Magnetni dipol i magnetni dipolni moment

Magnetni dipol možemo zamisliti kao malu petlju u ravnini kojom protječe struja I .



Magnetni dipolni moment (ili kraće magnetni moment) ove strujne petelje iznosi

$$\vec{p}_m = I\vec{S}. \quad (10.1)$$

Promatramo li magnetno polje petlje s udaljenosti mnogo veće od dimenzija petlje, petlju možemo smatrati točkom pa govorimo o točkastom magnetnom dipolu.

10.2 Dipol u magnetnom polju

Moment sile $\vec{M}$ na dipol momenta $\vec{p}_m$ u magnetnom polju $\vec{B}$ je

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (10.2)$$

Potencijalna energija dipola u homogenom magnetskom polju $\vec{B}$ glasi

$$W_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (10.3)$$

10.3 Tvari s magnetskim svojstvima

Sve se tvari magnetiziraju stavimo li ih u magnetsko polje. Pri tom procesu molekule se ponašaju poput magnetskih dipola i stvaraju vlastito magnetsko polje koje se zbraja na vanjsko polje. S obzirom na magnetska svojstva, imamo tri glavne kategorije tvari:

- **Paramagneti:** relativna permeabilnost $\mu_r \gtrsim 1$
- **Dijamagneti:** $\mu_r \lesssim 1$
- **Feromagneti:** μ_r ovisi o polju, no maksimalne vrijednosti kreću se od 10^2 pa preko 10^6 .

10.4 Magnetizacija i jakost magnetskog polja

Magnetizacija $\vec{M}$ je vektorska veličina koja opisuje jakost namagnetiziranosti tvari. Ako u nekom volumenu ΔV imamo n molekula (atoma, elektrona, ...) čiji su dipolni momenti $\vec{p}_{m_i}$ magnetizacija je definirana kao

$$\vec{M}_m = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{m_i} = \left(\frac{n}{\Delta V} \right) \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{p}_{m_i} \right)}_{\langle \vec{p}_m \rangle}, \quad (10.4)$$

gdje je $n/\Delta V$ koncentracija molekula, a $\langle \vec{p}_m \rangle$ prosječni dipolni moment u ΔV .

Vektor jakosti magnetskog polja, $\vec{H}$, definiran je izrazom

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}_m. \quad (10.5)$$

Za dijamagnete i paramagnete vrijedi

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (10.6)$$

gdje je μ permeabilnost i ima konstantnu vrijednost. Relativna permeabilnost definirana je relacijom

$$\mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (10.7)$$

Kod feromagneta permeabilnost ovisi o polju $\mu = \mu(H)$. Također, magnetno polje $\vec{B}$ i magnetizacija $\vec{M}$ ovise o polju H , a ovisnost se grafički prikazuje *histerezom*.

10.5 Ampérov zakon u tvarima

Pretpostavimo da se struje $I_1, I_2, \dots, I_n$ nalaze u (beskonačnom) sredstvu permeabilnosti μ . Ako petlja C obuhvaća struje I_k ($k = 5, 6, 7$), tada vrijedi

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_5 + I_6 + I_7 \quad (10.8)$$

Postavimo li prste desne ruke u smjeru obilaska krivulje C , pozitivne struje su one koje gledaju u smjeru palca, a negativne one koje gledaju suprotno.

10.6 Osnovni zakon magnetostatike

U sredstvima za izračun polja $\vec{H}$ i $\vec{B}$ koristimo dva osnovna zakona:

1. Ampérov zakon:

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I} \quad (\text{ili } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \text{ ako su struje u vakuumu}), \quad (10.9)$$

2. Gaussov zakon:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}. \quad (10.10)$$

Gaussov zakon nam kaže da je magnetni tok kroz zatvorenu plohu jednak nuli: magnetsko polje nema izvora (ne postoje *magnetski monopoli*). Ovaj zakon vrijedi i općenito, za pojave s vremenski ovisnim strujama i nabojima.

10.7 Magnetni krug

Kod nekih je sustava struja i magneta poželjno napraviti analogiju s uobičajenim strunim krugom. Kao primjer magnetnog kruga najčešće se uzima toroidna zavojnica ili solenoid koji ima feromagnetsku jezgru. Pri tome se uzimaju sljedeće analogije:

- magnetomotorni napon $\Leftrightarrow$ elektromotorni napon

$$\varepsilon_m \equiv \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI, \quad (C - \text{krivulja koja obuhvaća sve struje u zavojnici}) \quad (10.11)$$

- magnetski otpor homogenog odsjeka duljine $l_i \Leftrightarrow$ električni otpor

$$R_m = \frac{l_i}{\mu_r \mu_0 S}, \quad (10.12)$$

gdje je S površina poprečnog presjeka feromagnetske jezgre.

- magnetni tok $\Leftrightarrow$ struja

Iz ovih analogija slijede i ostale, npr. Kirchoffova pravila i Ohmov zakon za magnetni krug.

11 Krugovi s vremenski ovisnom strujom. Izmjenična struja. Elektromagnetski titrajni krugovi.

11.1 Izmjenična struja

Trenutne vrijednosti izmjeničnog napona i struje na izvoru su

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \quad (11.1)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (11.2)$$

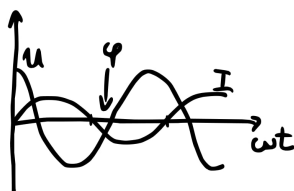
gdje su ε_0 i I_0 amplitude napona i struje, ω je kružna frekvencija, a φ je fazni pomak struje u odnosu na napon. Kružna frekvencija povezana je s frekvencijom ν

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (11.3)$$

Efektivne vrijednosti koje odgovaraju naponu i struji su

$$\varepsilon_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \Rightarrow \varepsilon_{\text{ef}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \quad (11.4)$$

$$I_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{I_0^2}{2} \Rightarrow I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (11.5)$$



11.2 Otpornik u krugu izmjenične struje

Priključimo li otpornik električnog otpora R u krug izmjenične struje, napon na otporniku i struja kroz otpornik su u fazi, tj. fazni pomak je nula.

11.3 Kondenzator u krugu izmjenične struje

Priključimo li kondenzator kapaciteta C u krug izmjenične struje, primjetit ćemo da struja brza pred naponom na kondenzatoru, odnosno, fazni pomak je

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \quad (11.6)$$

Fazni pomak se može uzeti u obzir prilikom računanja tako da računamo s kompleksnim vrijednostima napona i struje. *Kapacitivni otpor*

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (11.7)$$

tada postaje *kapacitivna impendancija*

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (11.8)$$

11.4 Zavojnica u krugu izmjenične struje

Ako je zavojnica u krugu izmjenične struje, struja kasni za naponom, odnosno, fazni pomak je $\varphi = +\pi/2$. *Induktivna impendancija* je

$$Z_L = i\omega L, \quad (11.9)$$

gdje je $R_L = \omega L$ *induktivni otpor*.

11.5 Impendancija

U složenijim krugovima izmjenične struje računanje se pojednostavljuje računamo li s kompleksnim vrijednostima otpora koje nazivamo *impedancija*:

$$Z = R + iX, \quad (11.10)$$

gdje je R omski otpor, a X *jalovi otpor* ili *reaktancija*. Nalaženje impedancije cijelog kruga ili dijela kruga izmjenične struje je identično onome u slučaju otpornika.

11.6 Fazni pomak

Ukupni fazni pomak u krugu izmjenične struje jedna je

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}. \quad (11.11)$$

11.7 Snage izmjenične struje

Djelatna (radna) snaga

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) I(t) dt = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi \quad (11.12)$$

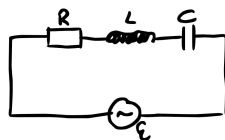
Jalova snaga

$$Q = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \sin \varphi. \quad (11.13)$$

U gornjim su jednadžbama $\cos \varphi$ *faktor snage*, $\sin \varphi$ faktor jalovosti.

11.8 RLC strujni krug

Kao primjer, nađimo impedanciju kruga u kojemu su otpornik, zavojnica i kondenzator spojeni serijski



Ukupna impedancija je

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (11.14)$$

Ako je napon izvora $U = U_0 \exp(i\omega t)$ vidimo da je struja

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\varphi}} = \frac{U_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (11.15)$$

gdje je φ fazni pomak, a $|Z|$ modul impedancije

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (11.16)$$

Fazni pomak je

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (11.17)$$

Maksimalna struja protiče krugom u slučaju kad je

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (11.18)$$

Tada je rezonantna kružna frekvencija napona na izvoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (11.19)$$

što se naziva i *Thomsonova frekvencija*.

12 Elektromagnetski valovi. Maxwellove jednadžbe.

12.1 Ravni val

Električna i magnetska komponenta ravnog elektromagnetskog vala koji se širi u pozitivnom smjeru osi z

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (12.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (12.2)$$

gdje su:

- $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ amplitude električnog i magnetskog polja
- valni vektor, $k = 2\pi/\lambda$
- kružna frekvencija, $\omega = 2\pi\nu$

Brzina svjetlosti u vakuumu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad (12.3)$$

gdje su ε_0 i μ_0 permitivnost i permeabilnost vakuumu. Veza između električne i magnetske komponente: $E = cB$.

12.2 Poytingov vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (12.4)$$

Smjer se podudara sa smjerom širenja EM vala. Iznos = gustoća toka EM energije (energija koja u jediničnom vremenu prođe kroz jediničnu plohu okomitu na smjer širenja vala).

Vremenski prosjek za S

$$J = \langle S \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2, \quad (12.5)$$

što se naziva *intenzitet vala* ili *iradijancija*.

12.3 Gustoća energije EM vala

Zbroj gustoća za električnu i magnetsku komponentu

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (12.6)$$

12.4 Snaga EM zračenja

Ukupna energija po jediničnom volumenu koja prođe kroz plohu A

$$P = \int_A \vec{S} d\vec{A}. \quad (12.7)$$

Uobičajeno se računa s vremenskim prosjekom za S , $\langle S \rangle_T$.

12.5 Tlak EM zračenja

Ovisi o tome je li zračenja apsorbirano ili reflektirano; ako je potpuno apsorbirano tlak je $p = \langle S \rangle_T / c$, ako je potpuno reflektirano tlak je $p = 2\langle S \rangle_T / c$.

12.6 Maxwellove jednađbe

Potpun sustav diferencijalnih jednađbe koji opisuje EM polja i interakciju s česticama

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0 \\ \oint_C \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_C \vec{B} d\vec{l} &= \mu_0 \left(I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} \right)\end{aligned}} \quad (12.8)$$

gdje je ploha S zatvorena, a krivulja C omeđuje plohu S .