

Kvantna teorija polja

Predrag Dominis Prester

Sveučilište u Rijeci, Odjel za fiziku

Sadržaj

Predgovor	6
1 Uvod	8
1.1 Otkud polja?	8
1.1.1 Primjer konstrukcije efektivne teorije polja	8
1.2 Specijalna relativnost	9
1.3 Zašto kvantizirati polja?	12
1.4 Jednočestična relativistička kvantna mehanika?	12
1.5 Prirodni sustav jedinica	15
2 Klasična teorija polja	16
2.1 Lokalna polja i njihova dinamika	16
2.2 Lagrangeov princip najmanje akcije	17
2.2.1 Akcija i Euler-Lagrangeove jednačbe	17
2.2.2 Matematički intermezzo: funkcionali i funkcionalne derivacije	17
2.2.3 Relativističke teorije polja	19
2.3 Simetrije i Noetherin teorem	20
2.3.1 Kontinuirane interne simetrije	21
2.3.2 Prostorno-vremenske simetrije: translacije u prostor-vremenu	24
2.4 Hamiltonov princip i Poissonove zgrade	26
2.5 Vakuum, simetrije i njihov lom	28
2.5.1 Vakuum u klasičnoj relativističkoj teoriji polja	28
2.5.2 Spontani lom diskretne simetrije	29
2.5.3 Spontani lom kontinuiranih globalnih simetrija. Goldstoneov teorem	30
2.5.4 Spontani lom kontinuiranih lokalnih simetrija.	34
2.6 Greenove funkcije	35
2.6.1 Metoda Greenovih funkcija	35
2.6.2 Retardirane Greenove funkcije	38
2.7 Feynmanovi dijagrami	39
3 Osnove kvantne teorije polja	42
3.1 Kanonska kvantizacija	42
3.2 Kvantizacija slobodnog realnog skalarnog polja	43
3.2.1 Operatori stvaranja i poništenja	43
3.2.2 Energija i impuls kvantiziranog slobodnog realnog skalarnog polja	46
3.2.3 Fockov prostor stanja i čestična interpretacija	47
3.2.4 Valna funkcija u $\mathbf{p}$ -reprezentaciji	49
3.2.5 Valna funkcija u $\mathbf{x}$ -reprezentaciji	49
3.2.6 Lokalna polja – nelokalizirane čestice*	51
3.2.7 Energija vakuuma i prve beskonačnosti	52

3.2.8	Normalno uređenje	53
3.3	Slobodno kompleksno skalarno polje. Antičestice	55
3.4	Klasični limes kvantnih polja*	57
3.4.1	Komplementarnost i kvantna polja	57
3.4.2	Koherentna stanja	60
3.5	Međudjelovanje s klasičnim vanjskim izvorom	61
3.6	Udarni presjeci i širine raspada	65
3.6.1	Udarni presjeci	65
3.6.2	Brzina raspada	68
3.6.3	Posebni slučajevi	69
3.6.4	Nerelativistički limes	71
3.7	S-matrica i vremensko uređenje	72
3.7.1	LSZ redukcijaska formula	73
3.7.2	Feynmanov propagator	76
3.8	Feynmanova pravila	78
3.8.1	Lagranžijanski izvod	78
3.8.2	Hamiltonijanski izvod	83
3.8.3	Feynmanova pravila u impulsnom prostoru	88
3.8.4	S-matrica i invarijantna amplituda $\mathcal{M}$	89
3.8.5	Nepovezani dijagrami	90
3.8.6	Primjer: φ^3 teorija	91
3.8.7	Generalizacija na više polja	93
3.8.8	Vezanja koja uključuju derivacije polja	93
3.8.9	Kompleksna polja	94
3.9	Integrali po stazama*	96
3.9.1	Gaussovski integrali	97
3.9.2	Integrali po stazama u kvantnoj mehanici	99
3.9.3	Integrali po stazama u teoriji polja	103
3.9.4	Konvergencija i produljenje u euklidsko vrijeme	107
3.10	Funkcionalne metode*	108
3.10.1	Funkcional izvodnik	109
3.10.2	Rješenje za slobodno realno skalarno polje	109
3.10.3	Feynmanova pravila pomoću integrala po stazama	110
3.10.4	Schwinger–Dysonova diferencijalna jednačba	111
3.10.5	Kvantna efektivna akcija	112
3.10.6	Efektivni potencijal	117
3.10.7	Spontani lom simetrije u kvantnoj teoriji polja	125
3.10.8	Sličnost sa statističkom mehanikom	126
4	Simetrije i spin	129
4.1	Spin – općenito	129
4.2	Simetrije u kvantnoj mehanici	130
4.2.1	Simetrije i njihove reprezentacije	130
4.2.2	Liejeve grupe i algebre	130
4.2.3	Reprezentacije Poincaréove grupe	131
4.3	Spin-0	137
4.4	Masivno spin-1 polje	138
4.4.1	Proca teorija	138
4.4.2	Kvantizacija Proca teorije	140
4.4.3	Kompleksno Proca polje	141

4.5	Masivna slobodna bozonska polja. Generalizacija i rekapitulacija*	142
4.6	Bezmaseno spin-1 polje. Maxwellova teorija	144
4.6.1	Slobodno bezmaseno spin-1 polje	144
4.6.2	Kvantizacija slobodnog bezmasenog spin-1 polja	146
4.6.3	Kovarijantna derivacija i minimalno vezanje	148
4.6.4	Baždarna simetrija i sačuvane struje	150
4.6.5	Wardovi identiteti	151
4.6.6	Wardovi identiteti i polarizacijske sume	153
4.6.7	Fotonski propagator	153
4.6.8	Kovarijantna baždarenja	156
4.6.9	Što je ustvari baždarna simetrija?	156
4.7	Skalarna kvantna elektrodinamika	157
4.7.1	Feynmanova pravila za skalarnu kvantnu elektrodinamiku	157
4.7.2	Primjeri raspršenja u skalarnoj kvantnoj elektrodinamici	159
4.7.3	Wardovi identiteti i baždarna invarijantnost	161
4.8	Meki limesi i Lorentz kovarijantnost*	162
4.8.1	Meki fotoni i sačuvanje naboja	162
4.8.2	Spin-2 i princip ekvivalencije	164
4.8.3	Problemi sa spinom > 2	165
4.9	Higgsov mehanizam	165
4.9.1	Supravodljivost. Ginzburg–Landau teorija	169
4.10	Spinori i spinorna polja	171
4.10.1	Jednostavni izvod Diracove jednačbe analogijom iz nerelativističke kvantne mehanike	171
4.10.2	Lorentzova grupa detaljnije	172
4.10.3	Konačnodimenzionalne reprezentacije Lorentzove grupe	174
4.10.4	Spinorne reprezentacije	175
4.10.5	Weylova spin $1/2$ polja	176
4.10.6	Diracovo spin $1/2$ polje	177
4.10.7	Svojstva Diracovih matrica	179
4.10.8	Korisni identiteti s tragovima	180
4.10.9	Svojstva na Lorentzove transformacije	181
4.10.10	Vezanje fotona na Diracovo polje	183
4.10.11	Majorana fermioni	186
4.11	Spinorna rješenja	188
4.11.1	Kiralnost, helicitet i spin	188
4.11.2	Rješenja slobodne Diracove jednačbe	189
4.12	Kvantizacija spin $1/2$ polja	193
4.12.1	Kvantizacija Diracovog polja	193
4.12.2	Kanonski antikomutatori. Antikomutirajući brojevi.	195
4.12.3	Propagator za Diracovo polje	196
4.12.4	Kvantizacija Weylovog polja	197
4.12.5	Kvantizacija Majorana polja	197
4.13	Spin i statistika	198
4.13.1	Statistika – naivno	198
4.13.2	Stabilnost vakuuma	200
4.13.3	Kauzalnost	201
4.13.4	Lorentz invarijantnost S-matrice	204
4.13.5	Sažetak analize*	205
4.13.6	Teorija polja u općem broju dimenzija*	205
4.13.7	Spin-statistika teorem iz krivuljne ovisnosti*	207

4.14	C, P, T i CPT teorem*	208
4.14.1	Nabojna konjugacija	209
4.14.2	Paritet	213
4.14.3	CP simetrija	216
4.14.4	Vremenska inverzija	216
4.14.5	CPT teorem	218
4.15	Feynmanova pravila za polja proizvoljnog spina	220
4.15.1	Generalizacija formalizma	220
4.15.2	Dodatna pravila za fermione – predznaci i petlje	220
4.15.3	Baždarna polja	220
4.16	Yukawa teorija	220
4.16.1	Feynmanova pravila za Yukawa teoriju	221
4.16.2	Proces: elastično raspršenje dva fermiona ($\psi + \psi \longrightarrow \psi + \psi$)	222
4.16.3	Yukawa potencijal	222
4.17	Spinorna kvantna elektrodinamika	224
4.17.1	Feynmanova pravila za spinornu kvantnu elektrodinamiku	225
4.18	Primjeri procesa u spinornoj kvantnoj elektrodinamici	226
4.18.1	$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	226
4.18.2	$e^- + p^+ \rightarrow e^- + p^+$ (Rutherfordovo raspršenje)	229
4.18.3	$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ (Comptonovo raspršenje)	229
5	Osnove teorije renormalizacije	230
5.1	Uvodne napomene	230
5.2	Casimirov efekt	232
5.2.1	Energija vakuuma u “kutiji”	232
5.2.2	Regularizacija pomoću funkcije odsjecanja	234
5.2.3	Regularizacija pomoću analitičkog produljenja	236
5.3	Primjer renormalizacije konstante vezanja	236
5.3.1	Regularizacija	237
5.3.2	Renormalizacija	238
5.3.3	Kontračlanovi	239
5.4	Regulariziranje i računanje integrala u dijagramima s petljama	239
5.4.1	Feynmanov trik	240
5.4.2	Wickova rotacija	241
5.4.3	Dimenzijska regularizacija	242
5.4.4	Neka poopćenja	244
5.5	Polarizacija vakuuma	245
5.5.1	Definicija i formalizam	245
5.5.2	Perturbativni račun – najniža kvantna korekcija	248
5.5.3	Fizikalni učinci polarizacije vakuuma. Efektivni naboj	249
5.6	Osnove renormalizacijske grupe*	255
5.6.1	Klizna skala	255
5.6.2	Jednadžba renormalizacijske grupe	255
5.6.3	Primjeri rješavanja jednažbe renormalizacijske grupe	256
5.6.4	Fiksne točke i scenariji klizanja	258
5.7	Anomalni magnetski moment	261
5.7.1	Ekstrahiranje magnetskog momenta	261
5.7.2	g -faktor na jednoj petlji	263
5.7.3	Usporedba teorije i eksperimenta. Testovi preciznosti teorije	265
5.8	Renormalizacija mase elektrona*	267

5.8.1	Vakuumske očekivane vrijednosti polja	268
5.8.2	Vlastita energija elektrona	269
5.8.3	Pol masa – fizikalna masa	272
5.8.4	Lambov pomak	276
5.9	Renormalizacija spinorne elektrodinamike (<i>u izradi</i>)*	276
5.9.1	Kontračlanovi	277

Predgovor

Rad na ovom udžbeniku započeo je 2015. godine na osnovu mojih predavanja na kolegiju *Kvantna teorija polja* na Odjelu za fiziku Sveučilišta u Rijeci. Kolegij je dio Diplomskog studija Fizika i studenti koji ga upisuju u pravilu moraju imati položene kolegije iz općih fizika (4 semestra), matematičke analize (2 semestra), linearne algebre (2 semestra), matematičkih metoda fizike (2 semestra, uključuje kompleksnu analizu), klasične mehanike (osnovni i napredni, 2 semestra), klasične elektrodinamike (osnovni i napredni, 2 semestra) i kvantne mehanike (osnovni i napredni, 2 semestra). Vladanje gradivom iz navedenih kolegija je apsolutno nužno da bi se kolegij i udžbenik, barem u razumnoj mjeri, mogli svladati. Kolegij je obavezan za studente koji se specijaliziraju za teorijsku fiziku elementarnih čestica unutar smjera *Astrofizika i fizika elementarnih čestica*, a izborni na smjerovima *Fizika čvrstog stanja* i *Atomska i molekulska fizika*.

Kvantna teorija polja je ogromna materija i bilo je teško odlučiti se što uključiti u osnovno gradivo kolegija. Jedno prirodno ograničenje je satnica kolegija (40 sati nastave i 20 sati vježbi), drugo je činjenica da je ovo prvi kolegij na studiju fizike u Rijeci na kojem se studenti ozbiljnije susreću s kvantnom teorijom polja (na kolegiju *Napredna kvantna mehanika* rade se osnove druge kvantizacije elektromagnetskog polja), a treće ograničenje dolazi od toga da kolegij upisuju studenti različitih usmjerenja. Stoga je udžbenik strukturiran na modularan način. Postoji jezgra koja je, s većom ili manjom težinom, namjenjena svim studentima neovisno o usmjerenju i koju sačinjava gradivo poglavlja/odjeljaka koji nemaju nikakvu posebnu oznaku. Na tu osnovu dodana su poglavlja s izbornim gradivom, označena zvjezdicom (*) koja se mogu individualno pridijeliti i prilagoditi studentima u skladu s njihovim interesima. Iako je originalna ideja bila dati koliko-toliko balansirani prikaz koji bi bio podjednako koristan kako za fiziku kondenzirane materije tako i za fiziku elementarnih čestica, navedena ograničenja su dovela do toga da je težina ipak više stavljena na relativističke kvantne teorije polja. Ipak, smatram da kolegij i udžbenik mogu biti od izuzetne koristi i studentima koji specijaliziraju teorijsku fiziku kondenzirane materije, nuklearne ili atomske fizike jer će naučiti osnove formalizma, uključujući primjenu simetrija, koje potom mogu samostalno primijeniti za proučavanje aspekata kvantne teorije polja relevantnih za njihova područja istraživanja. Također treba reći da je veliki naglasak dan na kvantnu elektrodinamiku koja je relevantna za sve navedene grane fizike.

Pri izradi udžbenika sam kao izvore ili predmet inspiracije primarno koristio pet izvora. Prvi i najvažniji je knjiga Matthew D. Schwartza *Quantum Field Theory and The Standard Model* (2014., Cambridge Univ. Press), iz koje sam u određenoj mjeri preuzeo strukturu i logički slijed iznošenja gradiva i koja je prije izrade udžbenika činila osnovnu obavezu literaturu na kolegiju. Osnovno gradivo u udžbeniku i na kolegiju se ugrubo preklapa s prvih 16 poglavlja ove knjige. Također sam se služio dvama "klasicima", udžbenicima Stevena Weinberga *The Quantum theory of Fields I i II* (1995. i 1996., Cambridge Univ. Press), te Michael E. Peskina i Daniel V. Schroedera *An Introduction To Quantum Field Theory* (1995., Westview Press). Posebno otkriće je bila knjiga Anthony Duncana *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory* (2013., Oxford Univ. Press, u kojoj je razjašnjeno dosta stvari koje su u standardnim udžbenicima uglavnom "gurnute ispod tepiha" ili samo ovlaš spomenute.

Nadam se da će ovaj udžbenik, kao i sam kolegij, doprinijeti rastu interesa za proučavanje kvantne teorije polja, koja već više od pola stoljeća predstavlja glavni i vrlo uspješni matematički formalizam ne samo za trenutno važeći fundamentalni opis prirodnih zakona (Standardni model fizike elementarnih čestica je kvantna teorija polja), već i za efektivno razumijevanje važnih pojava u fizici kondenzirane materije te atomske i nuklearne fizike. Dobro razumijevanje kvantne teorije polja je ujedno nužno za proučavanje formalizama koji pretendiraju objasniti kvantizaciju gravitacije i/ili ujedinjenje sila. Kako smo još daleko od potpunog razumijevanja strukture i svojstava kvantnih teorija polja oni koji krenu ovim putem mogu očekivati uzbudljivo putovanje.

Za kraj, zahvalio bih se svima koji su doprinijeli tome da je ovaj udžbenik ugledao svjetlo dana. Lista uključuje sve moje profesore koji su me podučavali kvantnu teoriju polja, sve suradnike i kolege s kojima sam diskutirao o ovoj problematici i na taj način produbljivao svoje znanje, studente zbog kojih je udžbenik i napisan, a na prvom mjestu moju suprugu od koje sam dobijao podršku i kad sam na knjizi radio u čudna doba dana, odnosno noći, i na neobičnim geografskim širinama (dio udžbenika je napisan tijekom zajedničkog boravka u Japanu). Također bih se zahvalio doktorandima Mateu Paulišiću i Ivanu Vukoviću, koji su uočili i ispravili veliki broj grešaka prisutnih u ranijim verzijama rukopisa. Posebne pak zahvale idu studenticama Ivani Babić i Antoneli Matijašić i studentima Mateu Topaloviću i Toniju Kodžomanu koji osim što su pronašli i ispravili ponižavajuće (po autora) velik broj grešaka,

su ujedno svojim sugestijama pomogli udžbenik učiniti boljim u svakom pogledu.

Ožujak 2021.g.

Predrag Dominis Prester

Poglavlje 1

Uvod

Nas će zanimati opis u kojem su osnovni objekti **polja** – veličine definirane u svakoj točki prostora u svakom trenutku vremena koje ćemo označavati kao $\varphi_j(\mathbf{x}, t)$. Primjer ovakve teorije je elektrodinamika u kojoj su fundamentalni objekti električno i magnetsko polje, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$.¹

1.1 Otkud polja?

Dva su osnovna puta koja vode do opisa putem polja, pa tako imamo “*fundamentalna*” i “*efektivna*” polja. Fundamentalni pristup je kad pokušavamo konstruirati teoriju koja “uistinu” opisuje prirodne pojave, a najpoznatiji primjeri su u fizici elementarnih čestica. Efektivni pristup je kad konstruiramo teoriju koja opisuje neki sustav ili pojave u nekoj ograničenoj domeni (npr. energija ili udaljenosti), a najpoznatiji primjeri su u fizici kondenzirane materije. No, kako se za priličan broj teorija za koje se u prošlosti mislilo da su fundamentalne ispostavilo da su samo efektivne, možda slično vrijedi i za elektrodinamiku odnosno Standardni model fizike čestica, u smislu da su to efektivne teorije koje daju dobar opis samo na dovoljno niskim energijama. Stoga je razgraničenje na fundamentalne i efektivne teorije često varljivo u smislu da i “fundamentalne” teorije imaju ograničenu domenu primjene.

1.1.1 Primjer konstrukcije efektivne teorije polja

Razmotrimo uniformnu jednodimenzionalnu kristalnu rešetku sačinjenu od $N \gg 1$ istovrsnih atoma takvu da je u ravnotežnom položaju razmak između prvih susjeda (konstanta rešetke) jednak ℓ . Ukoliko nema drugih stupnjeva slobode, konfiguracija sustava u nekom trenutku t je određena pomakom svakog atoma od ravnotežnog položaja $\{q_1(t), \dots, q_N(t)\}$. Pošto su brzine atoma puno manje od brzine svjetlosti možemo pretpostaviti da je dinamika određena akcijom oblika

$$S = \int dt L = \int dt \left[\frac{m}{2} \sum_{a=1}^N \dot{q}_a^2 - V(\{|q_a - q_b|\}) \right] \quad (1.1.1)$$

Ako su pomaci maleni, te ako dominantno međudjelovanje dolazi od prvih susjeda, možemo razviti potencijalnu energiju u Taylorov red

$$V = \frac{K}{2} \sum_{a=1}^N (q_{a+1} - q_a)^2 + \dots \quad (1.1.2)$$

Pretpostavimo da nas zanimaju pojave čije karakteristične prostorne skale su puno veće od konstante rešetke ℓ (npr. valovi titranja čija valna duljina λ zadovoljava $\lambda \gg \ell$). Tada možemo prijeći na **efektivni** opis putem kontinuumskog limesa $\ell \rightarrow 0$ i $N \rightarrow \infty$ tako da držimo L fiksiran (tzv. termodinamički limes). U tom slučaju možemo uvesti polje

¹U fizici se vektori u prostoru najčešće označavaju masnim slovom, npr. $\mathbf{x} \equiv \vec{x}$ ili $\mathbf{E} \equiv \vec{E}$, pa će se i ovdje koristiti ta konvencija.

$\varphi(x, t)$, takvo da je

$$\varphi(a\ell, t) = \sqrt{\frac{m}{\ell}} q_a(t)$$

tako da u termodinamičkom limesu možemo pisati

$$\frac{1}{\ell}(q_{a+1}(t) - q_a(t)) \rightarrow \sqrt{\frac{\ell}{m}} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \quad , \quad \sum_{a=1}^N (\dots) \rightarrow \frac{1}{\ell} \int_0^L dx (\dots) \quad (1.1.3)$$

(Valjanost druge relacije se može provjeriti uz pomoć $\sum_{a=1}^N 1 = N$ i $\int_0^L dx = L = N\ell$.) Akcija postaje

$$S \rightarrow S_{\text{ef}} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{m_0^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] \quad , \quad m_0^2 = \frac{K}{m} \ell^2 \quad (1.1.4)$$

gdje je $d^2x = dt dx$.

Efektivna akcija u (1.1.4) opisuje teoriju polja s dinamičkim poljem $\varphi(x, t)$ poznatu kao slobodna Klein-Gordova teorija polja u $(1 + 1)$ dimenzija (jedna vremenska (t) i jedna prostorna (x) dimenzija). Zanimljivo je da je ova efektivna teorija polja relativistička iako smo u (1.1.1) krenuli od nerelativističkog mikroskopskog opisa. Kako primjer koji smo razmotrili nije izolirani slučaj ove pojave, možemo zaključiti **da je proučavanje relativističkih teorija polja važno i u fizici kondenzirane materije, a ne samo u fizici elementarnih čestica.**

1.2 Specijalna relativnost

Primjena principa specijalne relativnosti na teorije polja vodi na **relativističke teorije polja** koje su od izuzetne važnosti u fizici elementarnih čestica. Specijalna relativnost znači da grupa simetrija dane teorije sadrži Lorentzovu, odnosno Poincaréovu grupu. Ovdje ćemo sažeti samo najvažnije aspekte specijalne relativnosti, i na ovu temu ćemo se vratiti ponovo u poglavlju 4.

Najelegantniji pristup specijalnoj relativnosti je **geometrijski** koji je razvio H. Minkowski. U tom pristupu 3-dimenzionalni prostor i vrijeme se moraju promatrati zajedno kao $(1 + 3)$ -dimenzionalni prostorno-vremenski kontinuum kojeg karakterizira metrika Minkowskog. Inercijalni promatrači mogu odabrati koordinate u prostor-vremenu $x^\mu = (ct, \vec{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3)$, gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, takve da je metrika dana s

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.1)$$

gdje je $\sqrt{|ds^2|}$ invarijantna (“vlastita”) udaljenost između dvije infinitezimalno bliske točke s koordinatama x^μ i $x^\mu + dx^\mu$. U (1.2.1) uveli smo par konvencija. Jedna je da indeksi označeni slovima grčkog alfabeta (npr. μ, ν, α) poprimaju vrijednosti od 0 do 3. Druga je takozvana **Einsteinova konvencija o sumiranju** po kojoj se podrazumijeva sumiranje po svakom grčkom indeksu koji se u nekom monomu pojavljuje samo jedanput na gornjem mjestu i samo jedanput na donjem mjestu.

Veličina $\eta_{\mu\nu}$ je metrički tenzor prostora Minkowskog. U “inercijalnom Kartezijevom” koordinatnom sustavu s koordinatama x^μ , korištenom u (1.2.1), njegove komponente se mogu napisati u matričnom obliku kao

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

gdje je redak označen indeksom μ a stupac indeksom ν .

Jedna karakteristika svakog metričkog prostora su transformacije koje čuvaju oblik metričkog tenzora, tzv. **izometrije**, koje čine grupu. U slučaju prostor-vremena Minkowskog ova grupa se naziva **Poincaréova grupa**. Iz činjenice da metrički tenzor ne ovisi o točki u prostor-vremenu x možemo zaključiti da Poincaréove transformacije moraju biti linearne, tj. oblika

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - a^\mu \quad (1.2.3)$$

gdje $\Lambda^\mu{}_\nu$ i a^μ ne ovise o x . Uvrštavanje (1.2.3) u (1.2.1) uz zahtjev izometrije $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ daje uvjet na $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (1.2.4)$$

S druge strane a^μ je proizvoljan. Interpretacija a^μ je očita – radi se o translacijama u prostor-vremenu. Što se $\Lambda^\mu{}_\nu$ tiče, analizom (1.2.4) može se pokazati da se opći element ovih transformacija (koje nazivamo **Lorentzove transformacije**) može dobiti kompozicijom prostornih rotacija, specijalnih Lorentzovih transformacija (“boostova”) koje povezuju dva inercijalna sustava koja se gibaju konstantnom brzinom jedan u odnosu na drugog, transformacije zrcaljenja u prostoru (“paritet”) te vremenske inverzije. Lorentzove transformacije u užem smislu (**prave Lorentzove transformacije**) označavaju podgrupu koja je generirana samo translacijama, rotacijama i boostovima.²

Ideja korištenja simetrija je konstruiranje objekata koji se “lijepo” transformiraju na simetrije, koje potom koristimo kao “Lego-kockice” u konstrukciji složenijih fizikalnih veličina i jednačbi gibanja. Matematičkim rječnikom rečeno, tražimo ireducibilne reprezentacije grupe transformacija. Najjednostavnija veličina je **skalar** S – veličina koja je invarijantna na transformacije, tj. $S' = S$. Za složenije objekte ideja vodilja je zakon transformacije koordinata (1.2.3) pa tako definiramo **kontravarijantni Lorentz-vektor** V^μ kao objekt koji ima 4 komponente i koji se na Poincaréove transformacije transformira kao

$$V^\mu \rightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \quad (1.2.5)$$

Generalizacijom ove ideje dolazimo do definicije **Lorentz-tenzora ranga n** , $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$, kao veličine koja ima 4^n komponenti i čiji zakon transformacije na Poincaréovu grupu glasi

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \longrightarrow T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \quad (1.2.6)$$

tj. svaki indeks se transformira kao vektorski indeks.

Metrički tenzor se može koristiti za tzv. spuštanje indeksa na način

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu} \longrightarrow T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu} = \eta_{\nu\mu_j} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \quad (1.2.7)$$

Indeks koji se nalazi “dolje” se naziva kovarijantni indeks i transformira se na Lorentzove transformacije na sljedeći način

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu \quad (1.2.8)$$

gdje iz (1.2.4) slijedi da $\Lambda_\mu{}^\nu$ zadovoljava

$$\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\nu{}_\rho = \Lambda_\rho{}^\nu \Lambda^\rho{}_\mu = \delta_\mu^\nu \quad (1.2.9)$$

gdje je δ_μ^ν Kroneckerov (ili jedinični) tenzor. U matričnoj notaciji, matrica $\Lambda_\mu{}^\nu$ je naprosto transponirani matrični inverz matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$.

Da bi definirali operaciju dizanja indeksa prvo definiramo metrički tenzor s indeksima “gore” kao matrični inverz metričkog tenzora $\eta^{\mu\nu} \equiv (\eta_{\mu\nu})^{-1}$, tj. zahtijevajući

$$\eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.2.10)$$

U slučaju metrike Minkowskog iz (1.2.2) očito slijedi

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

²Ova podgrupa karakterizirana je time da je svaki element neprekidno povezan s jedinicom, tj. identičnom transformacijom.

Koristeći $\eta^{\mu\nu}$ možemo definirati operaciju dizanja indeksa na način

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad (1.2.12)$$

i analogno za tenzore višeg ranga. Očito je da vrijedi

$$\eta^\nu_\mu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu \quad (1.2.13)$$

Tenzori koji su povezani dizanjem ili spuštanjem indeksa se obično označavaju istim slovom, a međusobno se raspoznaju po rasporedu indeksa. Za tenzore koji imaju r indeksa gore i k indeksa dolje kažemo da su tipa (r, k) i ranga $n = r + k$. Pored samog tipa tenzora, važno je paziti na redoslijed indeksa jer tenzori općenito ne moraju posjedovati nikakvu simetriju na zamjene redoslijeda indeksa (iako neki važni tenzori posjeduju takve simetrije, npr. metrički tenzor je simetričan na zamjenu indeksa pa redoslijed pisanja indeksa nije važan.)

Pošto će nas zanimati teorije polja, definirat ćemo **tenzorsko polje** kao “glatko” pridruživanje tenzora određenog tipa svakoj točki prostor-vremena. Na primjer, tenzorsko polje tipa $(1, 0)$ (**vektorsko polje**) označavamo s $V^\mu(\mathbf{x}, t) \equiv V^\mu(x)$, gdje oznakom x označavamo točku u prostor-vremenu (“događaj”), što znači i pripadne 4 koordinate u prostor-vremenu. Na Poincaréovu transformaciju (1.2.3) tenzorsko polje se transformira tako da se transformira prostorno-vremenska točka i tenzorske komponente u skladu s gore opisanim. Na primjer, tenzorsko polje ranga $(1, 1)$ se transformira kao

$$T^\mu{}_\nu(x) \rightarrow T'^\mu{}_\nu(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma(x) \quad , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - a^\mu \quad (1.2.14)$$

"Najjednostavnije" tenzorsko polje je **skalarno polje** $\varphi(x)$ koje se transformira kao

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad (1.2.15)$$

i stoga ćemo ga često koristiti kao primjer u razvijanju osnovnih koncepata koji nisu vezani uz spin.

Kada govorimo o poljima, potrebno je definirati i njihove derivacije. Lako se vidi da se diferencijalni operator

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

transformira kao kovarijantni 4-vektor, tj., $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$, pa kad djeluje na tenzor tipa (r, k) daje tenzor tipa $(r, k + 1)$. Možemo definirati i pridruženi operator

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (1.2.16)$$

koji kad djeluje na tenzor ranga (r, k) daje tenzor ranga $(r + 1, k)$. Često će nam se u izrazima pojavljivati linearni diferencijalni operator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (1.2.17)$$

koji se naziva *D'Alembertov operator* i koji je Lorentz-skalar, $\square' = \square$.

Jedna važna posljedica relacije (1.2.4) je $|\det(\Lambda)| = 1$, iz čega slijedi da je jakobijan transformacije $x \rightarrow x'$ jednak 1, što pak znači da je volumni element d^4x u integraciji Poincaré-skalar,

$$\int d^4x'(\dots) = \int d^4x(\dots)$$

U kvantnoj fizici nas zanimaju **projektivne reprezentacije** grupe simetrija za koje je pravilo množenja reprezentirano do na slobodnu fazu.³ Iz tog razloga, tenzori dobijeni generalizacijom (tj. tenzorskim produktom) Lorentz-vektora nisu najopćenitije konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije koje će nas zanimati. Točnije rečeno, ove reprezentacije će nam opisivati polja cjelobrojnog spina (bozonska polja), dok ćemo za polja polucjelobrojnog spina (fermionska polja) morati pronaći dodatnu vrstu tenzora, odnosno tenzorskih polja. Kako se za sada zbog općenitosti ne želimo previše oslanjati na Lorentzove simetrije, razradu reprezentacija Lorentzove grupe odložit ćemo za poglavlje 4.

1.3 Zašto kvantizirati polja?

Zašto uopće razmatrati kvantizaciju polja? Na primjeru elektrodinamike možemo vidjeti razlog – klasična elektrodinamika daje opis zračenja crnog tijela koji vodi na **ultraljubičastu katastrofu**. Planckovo rješenje problema, koje je u skladu s opažanjima, je da se kvantizira energija modova titranja EM polja na način da energija dolazi u "paketićima energije" (**kvantima**) iznosa

$$E_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \hbar c |\mathbf{k}| \quad (1.3.1)$$

gdje je $\mathbf{k}$ valni vektor moda titranja i $\hbar = h/(2\pi)$ gdje je h Planckova konstanta. Pokazuje se da **kvantna elektrodinamika u potpunosti objašnjava Planckovu *ad hoc* proceduru**.

1.4 Jednočestična relativistička kvantna mehanika?

U nerelativističkoj (kraće NR) kvantnoj mehanici broj čestica je očuvan i može se konzistentno napisati Schrödingero-va jednadžba za fiksni broj čestica. U slučaju jedne čestice u vanjskom polju ona glasi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x})\psi \quad (1.4.1)$$

gdje je $V(\mathbf{x})$ potencijalna energija i $\psi(\mathbf{x}, t)$ valna funkcija čestice. Standardna Bornova interpretacija je da je $P_{\text{NR}} = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ gustoća vjerojatnosti pronalaska čestice u trenutku t u okolini točke $\mathbf{x}$. Ova interpretacija je potkrepljena činjenicom da je ovako definirana vjerojatnost lokalno sačuvana, tj. postoji pripadna struja dana s:

$$\mathbf{j}_{\text{NR}} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.4.2)$$

takva da Schrödingero-va jednadžba garantira zadovoljenje jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{\partial P_{\text{NR}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{NR}} = 0$$

Kao što znate s kursa iz klasične elektrodinamike, ova jednadžba kontinuiteta je samo matematički zapis lokalnog sačuvanja vjerojatnosti nalaženja čestice u nekom volumenu V , koji je dan integralom $\int_V d^3\mathbf{x} P_{\text{NR}}(t, \mathbf{x})$.

Da li postoji *relativistička* generalizacija? Razmotrimo radi jednostavnosti slobodnu česticu. Jednostavnom primjenom analogije

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

na relativistički izraz za energiju slobodne čestice

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4 \quad (1.4.3)$$

dolazimo do relativističke generalizacije (1.4.1) dane s

³Matematičkim žargonom, to znači da nas ne zanima Poincaréova grupa definirana s (1.2.3), već grupa pokrivanja ove grupe, tj. najmanja grupa koja sadrži Poincaréovu grupu a koja je jednostruko povezana.

$$\square\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi = 0 \quad (1.4.4)$$

gdje je $\square$ definiran u (1.2.17). Ova jednažba se naziva **Klein-Gordonova jednažba** (iako ju je prvi napisao Schrödinger) i, kao što ćemo kasnije elaborirati, opisuje čestice spina 0. Veličina u zagradi definira tzv. reduciranu Comptonovu valnu duljinu čestice λ_c :

$$\lambda_c \equiv \frac{\hbar}{mc}$$

Može se pokazati da za generičko rješenje jednažbe (1.4.4) vrijedi

$$\frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \neq 0 \implies \int d^3\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \neq 1 \quad \forall t \quad (1.4.5)$$

što znači da $\psi(x)$ ne može igrati ulogu amplitude vjerojatnosti. U stvari, lako se pokaže da u teoriji postoji sačuvani 4-vektor struje dan s:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.4.6)$$

koja nam sugerira da bi gustoća vjerojatnosti $P(x)$ trebala biti dana s:

$$P = \frac{j^0}{c} = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*) \quad , \quad \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} P_{\text{rel}}(x) = 0 \quad (1.4.7)$$

Ova pretpostavku dodatno pojačava zapažanje da je struja j_μ naprosto relativistička generalizacija 3-struje $\mathbf{j}$ iz (1.4.2).

Vježba 1.4.1: Dokažite (1.4.6).

Rješenje:

$$\partial_\mu j^\mu \propto \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = \psi^* \square\psi - \psi \square\psi^* = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 (\psi^* \psi - \psi \psi^*) = 0$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti koristili Klein-Gordonovu jednažbu (1.4.4).

No, ova konstrukcija relativističke jednočestične kvantne mehanike ima (barem) dva problema. Prvi problem je da za svako fizikalno prihvatljivo rješenje Klein-Gordonove jednažbe (1.4.4) koje je svojstveno stanje energije sa svojstvenom vrijednosti $E > 0$, a koje ima oblik:

$$\psi_E(x) = \chi_E(\mathbf{x}) e^{-iEt/\hbar} \quad (1.4.8)$$

postoji pridruženo rješenje **negativne energije** $E = -|E|$ dano s:

$$\psi_E(x) = \chi_{|E|}(\mathbf{x}) e^{-iEt/\hbar} = \chi_{|E|}(\mathbf{x}) e^{i|E|t/\hbar} \quad (1.4.9)$$

Na primjer, rješenja za slobodnu česticu koja su svojstvena stanja impulsa su

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - E_\pm t)} \quad , \quad E_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.4.10)$$

Ovo neočekivano dupliranje rješenja je matematička posljedica činjenice da je Klein-Gordonova jednažba drugog reda u derivaciji po vremenu, za razliku od Schrödingerove jednažbe koja je prvog reda. Vidimo da spektar energija više nema minimum jer je neograničen odozdo. Ovo postaje veliki problem ukoliko Klein-Gordonova čestica međudjeluje s nekim poljem, npr. elektromagnetskim. U tom slučaju čestica koja se nalazi u stanju s negativnom energijom bi mogla spontano ubrzavati emitirajući sve veću i veću količinu zračenja, dovodeći do tzv. problema nestabilnosti

vakuuma.⁴ Pošto u stvarnosti nikad nismo uočili ovakvu pojavu "ničim izazvanog" zračenja, smatramo da je nestabilnost vakuuma nefizikalna pojava. Obratite pažnju da je zbog prirode relativističke disperzijske relacije (1.4.3) ovaj problem nužno prisutan u svim relativističkim jednažbama.

Drugi problem je da $P(x)$, definiran kao u (1.4.7) **nije pozitivno definitan**, jer $\psi(0, \mathbf{x})$ i $\dot{\psi}(0, \mathbf{x})$ čine nezavisne početne uvjete koje možemo po volji odabrati (uz uvjet da su to glatke i normalizabilne funkcije). Slijedi da $P(x)$ ne može biti gustoća vjerojatnosti.

Možemo vidjeti da ova dva problema nisu potpuno razvezana. Za rješenja (1.4.8) i (1.4.9) vrijedi:

$$P_E(x) = \frac{E}{mc^2} |\chi_E(x)|^2 \quad (1.4.11)$$

iz čega vidimo da rješenja s pozitivnom energijom zadovoljavaju uvjet pozitivnosti vjerojatnosti, dok stanja s negativnom energijom imaju negativnu "vjerojatnost". To bi značilo da funkcija $P(x)$, definirana u (1.4.7), ne ispunjava nužne uvjete koji mora ispunjavati gustoća vjerojatnosti.

Na ovom mjestu čitatelj bi mogao pomisliti da se oba ova problema mogu riješiti na način da se stanja s negativnim energijama proglase nefizikalnima i naprosto odbace. No, tu se javlja problem jer stanja s pozitivnom energijom ne tvore potpuni skup stanja i procedura odbacivanja "polovice" rješenja postaje nejasna u slučaju međudjelovanja s nekim vanjskim poljem (npr. elektromagnetskim). Gustoća vjerojatnosti superpozicije stanja pozitivnih energija tokom vremena postaje indefinitna, tj. $P(x)$ nakon nekog vremena neće biti svugdje pozitivan.

Pored navedenog, odbacivanje stanja negativnih energija u jednočestičnoj interpretaciji vodi na problem narušenja kauzalnosti. To se najlakše vidi analiziranjem izraza za amplitudu vjerojatnosti da će slobodna čestica koja je u $t = 0$ bila lokalizirana u točki u prostoru $\mathbf{x}_0$ biti pronađena u kasnijem trenutku $t > 0$ u okolini točke $\mathbf{x}$. Amplituda je dana

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-iHt/\hbar} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int d^3\mathbf{p} \langle \mathbf{x} | e^{-iHt/\hbar} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}/\hbar} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\hbar} \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{-ict\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}/\hbar} \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

gdje smo koristili (1.4.10) i uzeli kao fizikalna samo stanja s pozitivnom energijom. Integral u gornjem izrazu se može napisati pomoću Besselovih funkcija. No, za naše potrebe dovoljno će biti razmotriti područje u kojem je $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \gg ct$, za koje gornji izraz približno daje

$$U(t) \propto \exp\left(-\frac{mc}{\hbar} \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 - (ct)^2}\right) \quad (1.4.13)$$

gdje je (neiščezavajući) faktor proporcionalnosti racionalna funkcija od $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ i t . Vidimo da je u ovom području $U(t) \neq 0$, što je u suprotnosti s kauzalnošću specijalne relativnosti jer su točke $(t, \mathbf{x})$ i $(0, \mathbf{x}_0)$ međusobno prostornog tipa i nikakva fizikalna informacija ne bi smjela moći proputovati između njih (a kamoli čestica).

Pokazuje se da su ovi problemi, koji su svi vezani uz jednočestičnu interpretaciju, neotklonjivi. Kasnije ćemo vidjeti da se problemi javljaju i u pokušaju konstrukcije jednočestične formulacije relativističke kvantne teorije čestica spina 1/2. Kako nije ništa bolja situacija sa česticama drugih spinova, dolazimo do sljedećeg zaključka:

Kombiniranje specijalne relativnosti i kvantne fizike nije konzistentno sa sačuvanjem broja čestica.

Stoga moramo pretpostaviti da prostor stanja uključuje proizvoljan broj čestica.⁵

⁴Čak i ako se čestica u početku nalazi u stanju pozitivne energije, ako je vanjsko polje dovoljno jako može postojati nezanemariva vjerojatnost prelaska u stanje negativne energije.

⁵Naravno, teorije u kojima su sve čestice slobodne mogu biti konzistentne sa specijalnom relativnosti. no to su tzv. "trivijalne" teorije u kojima nema međudjelovanja. Još jedan izuzetak od ovog općeg pravila predstavlja posebna klasa interagirajućih teorija u dvije prostornovremenske dimenzije koje su vrlo simetrične (tzv. integrabilne teorije) i u kojima se raspršenje čestica svodi samo na promjenu faze stanja i/ili vrste čestica, ali ne mijenja impulse čestica.

U stvari postoji jedan jednostavan, iako pomalo grub, argument koji objašnjava zašto pokušaj lokalizacije čestice "puca" na skali Comptonove valne duljine λ_c . Zbog relacija neodređenosti $\Delta x_j \Delta p_k \geq \hbar/2$ kad god pokušavamo lokalizirati česticu u nekom malom volumenu njeno stanje će sadržavati svojstvena stanja velikog impulsa, pa time i energije. U trenutku kada neodređenost koju unosimo u iznos impulsa postane reda veličine $\Delta p \sim mc$, neodređenost u energiji postaje $\Delta E = \sqrt{c^2(\Delta p)^2 + m^2c^4} - mc^2 \sim mc^2$, pa dolazi do mogućnosti kreiranja još jedne čestice. Sjetimo se da specijalna relativnost govori da se različiti oblici energije u principu mogu transformirati jedan u drugi tako da u ovom procesu nema ništa čudno – energija koju unosimo da bi lokalizirali česticu transformira se u tvorbu još jedne, nove, čestice. Koristeći relaciju neodređenosti vidimo da će se to dogoditi kad pokušamo lokalizirati česticu na volumen $(\Delta x)^3$, gdje je:

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c$$

Činjenica da postoji mogućnost da detektiramo više čestica govori da više ne možemo govoriti o jednočestičnom stanju. Pošto je Comptonova valna duljina za čestice koje nalazimo u prirodi vrlo malena (npr. lako se izračuna da je za elektron $\lambda_c \sim 4 \times 10^{-13}$ m), što vodi na male efekte u nerelativističkom režimu (koji se mogu perturbativno tretirati).

Vidjet ćemo da ispravno kvantizirano Klein-Gordonovo polje prirodno posjeduje prostor stanja koji se sastoji od neograničenog broja čestica. Pri tome ćemo pokazati da su stanja negativne energije povezana s prisustvom **antičestica**, te da je struja j_μ povezana s lokalnim sačuvanjem naboja (npr. električnog), a ne s jednočestičnom vjerojatnošću pronalaska čestice u nekom volumenu.

1.5 Prirodni sustav jedinica

U relativističkim kvantnim teorijama pokazuje se spretnim definirati **prirodni sustav jedinica** u kojem je

$$c = 1 \quad , \quad \hbar = 1 \quad (\text{Prirodni sustav jedinica})$$

Na kraju računa možemo se vratiti u SI mjerni sustav tako da ubacimo potencije od $\hbar$ i c na način da dobijemo ispravne SI jedinice. Npr. ako u nekom računu dobijemo da je neka energija dana s $E = 5m$, gdje je m neka masa, onda u SI sustavu ova relacija glasi $E = 5mc^2$. Ako je pak neka energija u prirodnom sustavu jedinica dana s $E = 3\omega$, gdje je ω neka (kutna) frekvencija, onda u SI sustavu ova relacija glasi $E = 3\hbar\omega$.

Od sad nadalje koristit ćemo prirodni sustav jedinica. Od čitatelja se očekuje da je u stanju prevesti svaku relaciju u SI sustav.

Poglavlje 2

Klasična teorija polja

2.1 Lokalna polja i njihova dinamika

Pretpostavimo da je sustav opisan skupom **lokalnih polja** $\phi_r(x) \equiv \phi_r(\mathbf{x}, t)$, gdje indeks $r = 1, \dots, n$ označava različita polja koja postoje u teoriji (ili spinske komponente), koja poprimaju vrijednosti u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Pod riječi "lokalno" podrazumijevamo da su i međudjelovanja lokalna, tj. putem vezanja polja u istoj točki prostor-vremena (nema trenutnih međudjelovanja na daljinu). Najjednostavniji oblik jednažbi gibanja za ovakav sustav su parcijalne diferencijalne jednačbe.

Tijekom ovog kolegija pretpostavit ćemo da su klasične jednačbe gibanja **najviše drugog reda u derivaciji po vremenu**. Razlog je što jednačbe koje imaju više derivacije po vremenu od druge često pate od različitih problema, poput akauzalnosti, nefizikalnih stupnjeva slobode i dr.

Primjer 2.1.1: Najjednostavnija relativistička jednačba gibanja za polje ima oblik

$$\square \varphi = f(\varphi), \quad f(\varphi) = \sum_{n=0} f_n \varphi^n \quad (2.1.1)$$

gdje je $\varphi(x)$ neko **skalarno polje** koje međudjeluje samo sa sobom putem funkcije $f(\varphi)$ za koju se obično pretpostavlja da je analitična (a vrlo često je polinom). Član s $n = 0$ se uvijek može eliminirati jednostavnom redefinicijom polja tako da se s polja $\varphi(x)$ prijeđe na polje $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi_0$ gdje je konstanta φ_0 nul-točka funkcije $f(\varphi)$, $f(\varphi_0) = 0$. Nakon ove redefinicije lako se pokaže da polje $\bar{\varphi}(x)$ zadovoljava jednačbu (2.1.1) u kojoj umjesto $f(\varphi)$ stoji funkcija $\bar{f}(\bar{\varphi}) = f(\varphi)$ za koju po definiciji vrijedi $\bar{f}_0 = f(\varphi_0) = 0$. Uskoro ćemo vidjeti da iz zahtjeva stabilnosti vakuuma slijedi da funkcija $f(\varphi)$ mora imati barem jednu nul-točku, pa se ovo poništenje konstantnog člana može uvijek napraviti u fizikalno interesantnim teorijama. **Stoga ćemo od sada automatski pretpostavljati da su sva polja definirana na način da nema konstantnih članova u jednačbama gibanja.**

Primjer 2.1.2: Maxwellove jednačbe za elektromagnetsko polje vezano na vanjsku električnu struju opisanu 4-vektorskim poljem $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, koje napisane pomoću vektorskog polja 4-potencijala A^μ glase

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = j_\mu \quad (2.1.2)$$

Komponente električnog i magnetskog polja, koje su mjerljive veličine, sadržane su u tenzoru jakosti elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ova teorija posjeduje *baždarnu invarijantnost*, tj. invarijantna je na transformacije $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$, gdje je χ proizvoljno skalarno polje, koje ne mijenjaju mjerljive veličine u klasičnoj teoriji. Baždarne transformacije omogućavaju da *odabirom baždarenja* pojednostavimo jednačbu gibanja. Iz (2.1.2) slijedi da je za ovu svrhu najbolje odabrati tzv. Lorenzovo baždarenje definirano s $\partial_\mu A^\mu = 0$, koje vodi na jednačbe gibanja

$$\square A_\mu = j_\mu$$

Spretno svojstvo ovih jednažbi gibanja je da su *razvezane*, što bitno olakšava rješavanje.

2.2 Lagrangeov princip najmanje akcije

2.2.1 Akcija i Euler-Lagrangeove jednadžbe

Gotovo sve zanimljive teorije koje se proučavaju u fizici mogu se formulirati putem principa najmanje akcije. Ukoliko se konfiguracija sustava može opisati pomoću s generaliziranih koordinata $\{q_1, \dots, q_s\}$, princip najmanje akcije kaže da postoji funkcional $S[q]$, zvan **akcija**, koji ima oblik

$$S[q] = \int dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.2.1)$$

Funkcija L se naziva **lagranžijan**.¹ Za fiksni izbor početne i konačne točke, $q_{(i)} = q(t_i)$ i $q_{(f)} = q(t_f)$, akcija posjeduje ekstrem na klasičnoj trajektoriji (tj. rješenju klasične jednažbe gibanja). Analizom varijacije akcije može se pokazati da će klasično rješenje zadovoljavati sljedeće jednažbe gibanja

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, s$$

koje se nazivaju **Euler-Lagrangeove jednadžbe**.

Generalizacija na polja je prilično direktna – umjesto $q(t) = \{q_j(t)\}$ imamo skup polja $\phi(x) = \{\phi_r(x, t)\}$. Iz zahtijeva lokalnosti slijedi da lagranžijan L mora biti lokalni, tj. oblika

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \nabla\phi(x), \nabla\dot{\phi}(x), \nabla\nabla\phi(x), \dots, x) \quad (2.2.2)$$

gdje je $\mathcal{L}$ gustoća lagranžijana (u teorijama polja obično se ova veličina naziva lagranžijan pa ćemo i mi to preuzeti).

U relativističkim teorijama polja može se pojaviti samo 4-derivacija ∂_μ , a ne ∂_0 i ∇ odvojeno, pa slijedi da akcija mora biti oblika

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x) \quad (2.2.3)$$

Euler-Lagrangeove jednadžbe koje slijede iz (2.2.3) su

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_r} = 0 \quad , \quad r = 1, \dots, n \quad (2.2.4)$$

Ukoliko je sistem **zatvoren** (tj. **izoliran**), lagranžijan **ne može eksplicitno ovisiti** o x .

2.2.2 Matematički intermezzo: funkcionali i funkcionalne derivacije

Lagrangeov i Hamiltonov formalizam koriste matematičke veličine koje se nazivaju **funkcionalni**. Funkcional $F[\phi]$ je funkcija koja djeluje na prostoru polja, tako da svakom polju (ili kompletu polja ako ih ima više) $\phi(x)$ definiranom na d -dimenzionalnom prostoru (ili prostor-vremenu) $x \in \mathbb{R}^d$, pridružuje broj (realni ili kompleksni, ovisno o funkcionalu) na gladak način. Primjeri funkcionala su akcija, gdje je najčešće $d = 4$, i hamiltonijan, gdje je najčešće $d = 3$. Za polja obično pretpostavljamo da dovoljno brzo iščezavaju u prostornoj beskonačnosti, $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}, t) = 0$, tako da rubni članovi koji nastanu primjenom parcijalne integracije po prostoru iščezavaju (postoje izuzetci gdje treba biti oprezan, poput teorija s topološki netrivialnim rubnim uvjetima ili teorija sa spontanom lomom simetrije).

¹U (2.2.1) podrazumijeva se da je lagranžijan funkcija svih generaliziranih koordinata i njihovih derivacija po vremenu, tj. $q(t)$ označava $\{q_1(t), \dots, q_s(t)\}$, a $\dot{q}(t)$ označava $\{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$. Ova konvencija se podrazumijeva u cijelom udžbeniku.

Derivacija funkcionala ili **funkcionalna derivacija** se definira pomoću varijacije polja: ako napravimo infinitezimalnu varijaciju $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$ onda se funkcionalna derivacija $\delta F/\delta\phi(x)$ definira putem relacije

$$\delta F[\phi] \equiv F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int d^d x \delta\phi(x) \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}$$

Ukoliko je funkcional lokalna funkcija polja i konačnog broja derivacija polja

$$F[\phi] = \int d^d x f(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k} \phi(x))$$

gdje je f sada obična funkcija svojih varijabli, onda se može pokazati da se funkcionalna derivacija od F svodi na obične derivacije

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial f}{\partial\phi(x)} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \frac{\partial f}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \phi(x))} \quad (2.2.5)$$

Uočite da je akcija (2.2.3) lokalni funkcional s $k = 1$. Vidimo da uvrštavanje $k = 1$ u (2.2.5) daje

$$\frac{\delta S}{\delta\phi_r(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_r(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r(x))}$$

pa iz zahtjeva ekstremalnosti akcije na klasičnim rješenjima teorije direktno slijede Euler-Lagrangeove jednačbe (2.2.4).

Vježba 2.2.1: Dokažite (2.2.5).

Varijacija lokalnog funkcionala je dana s

$$\delta F[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{\partial f}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \phi(x))} \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \phi(x)) \right\}$$

Nakon što iskoristimo činjenicu da varijacija komutira s derivacijama (što je očito iz definicije varijacije), tj.

$$\delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \phi(x)) = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} \delta\phi(x)$$

potom parcijalno integriramo tako da derivacije s $\delta\phi$ prebacimo na drugi član, te na kraju zanemarimo površinske članove (dobijene primjenom Gaussovog poučka na integracije totalnih derivacija) jer pretpostavljamo da polja iščezavaju na plohi koja omeđuje volumen integracije, dobijemo (2.2.5).

Napomena: Razmotrimo valjanost pretpostavke o iščezavanju rubnog člana u integraciji na slučaju funkcionalne derivacije akcije (2.2.3). Površinski integral dobijen Gaussovim poučkom u ovom slučaju glasi

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 \mathbf{x} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \right] = \oint da_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r = 0$$

Zatvorena ploha po kojoj se integrira se sastoji od ploha $t = t_i$ i $t = t_f$, na kojima je $\delta\phi = 0$ pa stoga ne doprinose, i trodimenzionalnog cilindra u beskonačnosti na kojem je $|\mathbf{x}| = \infty$. Standardna pretpostavka je da polja iščezavaju dovoljno naglo za $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ tako da i integral po cilindru iščezava. Sve skupa dobijamo da plošni integral iščezava.

U manipulacijama koje uključuju akciju često se susreću ovakvi površinski integrali i pri tome ćemo koristiti istu vrstu pretpostavke o iščezavanju polja “u beskonačnosti”, odnosno na plohi koja omeđuje volumen integracije. Kao posljedica u takvim računima ćemo koristiti sljedeću relaciju

$$\int d^4x A \partial_\mu B^\mu = - \int d^4x (\partial_\mu A) B^\mu \quad (2.2.6)$$

jer je razlika između lijeve i desne strane površinski član za koji pretpostavljamo da iščezava. Ipak, treba uvijek biti na oprezu jer se mogu dogoditi situacije u kojima se ova logika ne može primijeniti, npr. u teorijama s topološki netrivialnim rubnim uvjetima ili teorijama u kojima postoji spontani lom simetrije.

2.2.3 Relativističke teorije polja

Koji uvjet mora zadovoljavati akcija da bi pripadna jednačba gibanja dobijena iz Euler-Lagrangeove jednačbe bila manifestno Lorentz-kovarijantna, tj. imala tenzorski oblik? Iz (2.2.3) i činjenice da je d^4x Lorentz-invarijantna mjera integracije slijedi da

Gustoća lagranžijana $\mathcal{L}$ mora biti Lorentz-skalar (do na totalnu derivaciju).

Ukoliko su ϕ_r tenzorska polja i ukoliko u $\mathcal{L}$ koristimo operacije koje čuvaju tenzorski karakter (linearno kombiniranje istovrsnih tenzora, vanjski produkt tenzora, kontrakcija indeksa) tada će Euler-Lagrangeove jednačbe očito dati manifestno Lorentz-kovarijantne jednačbe gibanja. U tom smislu se tenzorska polja mogu koristiti kao Lego kockice. Dolazimo do važne konstatacije:

Lagranžijanski formalizam je **manifestno** Lorentz kovarijantan.

Riječ *manifestno* znači da su sve relacije i međurelacije koje se dobiju na *prirodan* način (tj. kovarijantnim procedurama) iz akcije kovarijantni, a ne samo izrazi koji opisuju mjerljive veličine. Vidjet ćemo da za Hamiltonov formalizam to ne vrijedi. To je razlog zašto je Lagrangeov formalizam vrlo prikladan za relativističke teorije.

Primjer 2.2.2: Realno skalarno polje $\varphi(x)$ ($\varphi^* = \varphi$). Razmotrimo lagranžijan oblika

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \mathcal{V}(\varphi) \quad , \quad \mathcal{V}(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) \quad (2.2.7)$$

Dio lagranžijana koji ne sadrži derivacije po polju smo označili s $\mathcal{V}(\varphi)$ i nazivat ćemo ga **potencijal** skalarnog polja. Iz razloga koji će ubrzo biti jasniji, iz potencijala smo izvukli kvadratni član u polju, koji je opisan parametrom m^2 za koji ćemo u nastavku uglavnom pretpostavljati da zadovoljava $m^2 \geq 0$ u kojem slučaju ćemo $m \equiv \sqrt{m^2}$ nazivati **masom polja**.² Slučaj kad je parametar $m^2 < 0$, koji je obično vezan uz pojavu **spontanog loma simetrije**, razmotrit ćemo u odjeljku 2.5.2.

Za Euler-Lagrangeovu jednačbu trebaju nam

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi - \frac{d\mathcal{V}_{\text{int}}}{d\varphi} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \quad (2.2.8)$$

što uvršteno u (2.2.4) daje

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \mathcal{V}'(\varphi) = 0$$

što je jednako (2.1.1) nakon identifikacije $f = -\mathcal{V}'$.

²Razlog nazivu masa za parametar m će se vidjeti nakon kvantizacije ove teorije polja. Ukratko, ukoliko je $\mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) = 0$, klasična teorija posjeduje rješenja u obliku ravnih valova dana s $\varphi(x) = A \cos(k \cdot x + \alpha)$, gdje valni 4-vektor zadovoljava $k^2 = m^2$. Pošto kvantizacija svakom modu k pridjeljuje kvant-česticu impulsa $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ i energije $E_{\mathbf{p}} = k^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ vidimo da m igra ulogu mase čestice pridružene polju φ . Ovaj argument se jednostavno generalizira na relativistička polja višeg spina.

Primjer 2.2.3: Kompleksno skalarno polje $\varphi(x)$. Pošto akcija i lagranžijan moraju biti realni, u slučaju kompleksnog skalarnog polja analogon od (2.2.7) je

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi^* \varphi) \quad (2.2.9)$$

Pješački način za pronalaženje jednadžbi gibanja je uočiti da ako pređemo na realna skalarna polja definirana kao realni i imaginarni dijelovi polja φ , tj.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \quad , \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbb{R}$$

Uvrštavanje u (2.2.9) i korištenje $\varphi^* = (\varphi_1 - i\varphi_2)/\sqrt{2}$ daje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 [(\partial_\mu \varphi_r)(\partial^\mu \varphi_r) - m^2 \varphi_r^2] - \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Vidimo da se teorija sastoji od dva realna skalarna polja jednakih masa m , koja međudjeluju putem potencijala $\mathcal{V}_{\text{int}}$. Euler-Lagrangeove jednadžbe nam daju

$$\square \varphi_r + m^2 \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{int}}}{\partial \varphi_r} = 0 \quad , \quad r = 1, 2$$

Vidimo da su te dvije jednadžbe ekvivalentne sljedećoj kompleksnoj jednadžbi

$$\square \varphi + m^2 \varphi + \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{int}}}{\partial \varphi^*} = 0$$

Ovu jednažbu smo mogli dobiti direktno iz (2.2.9) tako da smo prilikom primjene Euler-Lagrangeove jednadžbe pretpostavili da su φ i φ^* dva polja koja možemo tretirati kao nezavisna. Ovaj “trik” ćemo kasnije redovito primjenjivati.

Zadatak 2.2.1: Elektrodinamika. Pokažite da za lagranžijan $\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, x)$ dan s

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu j_\mu = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - A^\mu j_\mu \quad (2.2.10)$$

gdje je $j^\mu(x)$ vanjska 4-struja koja je fiksna, Euler-Lagrangeova jednadžba daje za jednažbu gibanja

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = j_\mu$$

što su upravo Maxwellove jednadžbe (2.1.2).

2.3 Simetrije i Noetherin teorem

Simetrije predstavljaju jedan od temelja u razvoju našeg razumijevanja prirode i njenih zakonitosti i bile su ključne u konstrukciji Standardnog modela fizike čestica. U klasičnoj fizici simetrije su transformacije na fizikalnim varijablama (poljima u našem slučaju) koje ne mijenjaju oblik jednažbi gibanja. Pošto je kompozicija simetrija po definiciji simetrija, inverz simetrije je simetrija, a nedjelovanje možemo identificirati s “jedinicom” (u smislu kompozicije simetrija), slijedi da simetrije uvijek čine **grupu** s obzirom na operaciju kompozicije. **Stoga je razumijevanje matematičke teorije grupa i njihovih reprezentacija izuzetno važan alat u teorijskoj fizici bez kojeg je potpuno razumijevanje simetrija nemoguće.** U teoriji polja varijable su lokalna polja pa se transformacije simetrije mogu opisati kao

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') \quad , \quad x \rightarrow x' \quad (2.3.1)$$

Postoji nekoliko načina na koje možemo klasificirati simetrije, od kojih je osnovni podjela na **diskretne** i **kontinuirane** simetrije. Druga osnovna podjela je na *interne* za koje je $x' = x$ i na *prostorno-vremenske* za koje $x' \neq x$.

Kontinuirane simetrije se uvijek mogu, bar lokalno, parametrizirati skupom realnih brojeva, i to nam omogućava da definiramo infinitezimalne simetrije. U slučaju n -parametarske simetrije u teoriji polja infinitezimalne transformacije općenito imaju oblik:³

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta_\epsilon \phi_r(x) \quad , \quad \delta_\epsilon \phi_r(x) = \sum_{a=1}^n \mathcal{F}_r^{(a)}[\epsilon_a(x), \phi(x)] \quad , \quad x \rightarrow x' = x + \delta_\epsilon x \quad (2.3.2)$$

gdje su $\epsilon_a(x)$ proizvoljne infinitezimalne funkcije koje parametriziraju kontinuiranu simetriju i gdje je funkcional $\mathcal{F}_r^{(a)}[\epsilon_a(x), \phi(x)]$ linearan u $\epsilon_a(x)$. Zahtjev lokalnosti traži da je funkcional $\mathcal{F}_r^{(a)}[\epsilon_a(x), \phi(x)]$ lokalna funkcija polja $\phi(x)$, $\epsilon_a(x)$ i eventualno *konačnog* broja njihovih derivacija.

Interne kontinuirane simetrije karakterizira $\delta_\epsilon x = 0$. Primjeri prostorno-vremenskih kontinuiranih simetrija kojima ćemo se baviti na ovom kolegiju su simetrije na translacije u prostor-vremenu, te Lorentzove simetrije u relativističkim teorijama polja. Kontinuirane simetrije, neovisno da li su interne ili prostorno-vremenske, se dodatno dijele na dvije potkategorije – **globalne simetrije** u kojima je parametar transformacije konstantan ($\epsilon(x) = \epsilon$) i **lokalne simetrije** u kojima su $\epsilon_a(x)$ proizvoljne (infinitezimalne) realne funkcije (u okviru fizikalnih ograničenja kao što je ovisnost u limesu $|x| \rightarrow \infty$). U slučaju globalnih simetrija (2.3.2) možemo napisati kao

$$\delta_\epsilon \phi_r(x) = \sum_{a=1}^n \epsilon_a f_r^{(a)}[\phi(x)] \quad , \quad x \rightarrow x' = x + \delta_\epsilon x \quad (2.3.3)$$

gdje su sada $f_r^{(a)}[\phi(x)]$ funkcije samo od polja $\phi_r(x)$ i konačnog broja njihovih derivacija.

Pošto su u teorijama koje poštuju princip najmanje akcije jednadžbe gibanja određene akcijom, invarijantnost akcije na transformacije garantira postojanje pripadne simetrije.⁴ Stoga je Lagrangeov pristup posebno pogodan za proučavanje simetrija. Najvažniji rezultat je izražen putem **Noetherinog teorema** koji uspostavlja vezu između **kontinuiranih simetrija i lokalno sačuvanih struja i pripadnih naboja**.

U ostatku odjeljka ćemo detaljno razmotriti Noetherin teorem za najvažnije od navedenih potkategorija simetrija. U računima ćemo pretpostaviti da je sustav opisan akcijom oblika (2.2.3), no rezultati koje ćemo dobiti mogu se prirodno poopćiti na akcije oblika (2.2.2).

2.3.1 Kontinuirane interne simetrije

Globalne interne simetrije

U ovom slučaju koristimo (2.3.3) uz $\delta_\epsilon x = 0$

$$\delta_\epsilon \phi_r(x) = \sum_{a=1}^n \epsilon_a f_r^{(a)}(x) \quad (2.3.4)$$

gdje su $f_r^{(a)}(x)$ lokalne funkcije polja ϕ_r i njihovih derivacija, a ϵ_a su infinitezimalni realni parametri. Ovakve transformacije se nazivaju **globalne interne** transformacije, gdje riječ "globalno" označava da su parametri transformacije ϵ_a konstante u prostor-vremenu. Ako su transformacije povezane sa simetrijama, onda akcija mora biti invarijantna na njihovo djelovanje, tj.

$$\delta_\epsilon S \equiv S[\phi'_r] - S[\phi_r] = 0 \quad (2.3.5)$$

Razmotrimo sada transformaciju (2.3.4), ali tako da umjesto konstantnih ϵ_a pretpostavimo da se radi o (proizvoljnim infinitezimalnim) funkcijama $\epsilon_a(x)$. Iz oblika akcije (2.2.3) onda slijedi da varijacija akcije mora biti oblika

$$\delta_{\epsilon(x)} S = \sum_a \int d^4x \epsilon_a(x) \mathcal{A}_a(x) + \sum_a \int d^4x j_a^\mu(x) \partial_\mu \epsilon_a(x) \quad (2.3.6)$$

³U najopćenitijem slučaju funkcije $f_r^{(a)}$ bi mogle imati i eksplicitnu ovisnost o x . No, kako ćemo mi pri analizi simetrija uvijek pretpostavljati da je teorija simetrična na translacije u prostor-vremenu, ova eksplicitna ovisnost o x ne može postojati.

⁴Obratite pažnju da ne vrijedi obrat tvrdnje – moguće je da postoje simetrije jednažbi gibanja koje nisu posljedica invarijantnosti akcije.

gdje su $\mathcal{A}$ i j_a^μ neke veličine koje su funkcije polja i njihovih derivacija koje ovise o točnom izgledu lagranžijana i funkcija $f_r^{(a)}$. Ako stavimo da je ϵ konstantan, onda iz (2.3.5) slijedi $\mathcal{A}(x) = 0$. Koristeći ovo, i parcijalnu integraciju u drugom članu⁵, vidimo da (2.3.6) možemo napisati kao

$$\delta_{\epsilon(x)} S = - \sum_a \int d^4x \epsilon_a(x) \partial_\mu j_a^\mu(x) \quad (2.3.7)$$

Ako sada stavimo u (2.3.7) da polja ϕ_r zadovoljavaju jednačbe gibanja (tj. Euler-Lagrangeove jednačbe) dobijamo da $\delta_{\epsilon(x)} S = 0$ jer to mora vrijediti za svaku varijaciju oko klasičnih rješenja, pa onda i za varijaciju (2.3.4). Iz toga, i činjenice da je $\epsilon(x)$ proizvoljan, slijedi

$$\partial_\mu j_a^\mu(x) = 0 \quad \text{kad } \phi_r \text{ zadovoljavaju E-L jednačbe.} \quad (2.3.8)$$

Dobili smo da svaka od n "struja" $j_a^\mu(x)$ zadovoljava jednačbu kontinuiteta, čija fizikalna interpretacija je lokalno sačuvanje neke veličine ("naboja"). Ako definiramo ukupni naboj tipa a sadržan u trodimenzionalnom prostornom volumenu V u nekom danom trenutku t kao

$$Q_{aV}(t) = \int_V d^3\mathbf{x} j_a^0(\mathbf{x}, t) \quad (2.3.9)$$

onda iz (2.3.8) slijedi

$$\frac{dQ_{aV}}{dt} = - \int_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{j}_a = - \oint_{\mathcal{S}(V)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}_a \quad (2.3.10)$$

gdje je $\mathcal{S}(V)$ dvodimenzionalna zatvorena ploha koja je rub volumena V . Vidimo da je promjena naboja Q_a , sadržanog u nekom volumenu, jednaka količini naboja koja "iscuri" kroz plohu koja obuhvaća volumen, tj. imamo **lokalno sačuvanje naboja** ("lokalno" u ovom kontekstu znači da se naboj ne može teleportirati, već samo kontinuirano transportirati).

Ukoliko za volumen V uzmemo cijeli prostor, te pretpostavimo da polja opadaju u beskonačnosti dovoljno brzo tako da površinski integral na plohi u beskonačnosti iščezava, iz (2.3.10) slijedi

$$\frac{dQ_a(t)}{dt} = 0 \quad , \quad \text{gdje je} \quad Q_a(t) = \int d^3\mathbf{x} j_a^0(\mathbf{x}, t) \quad (2.3.11)$$

za svaki $a = 1, \dots, n$.

U zaključku:

Noetherin teorem: Ukoliko akcija posjeduje globalnu kontinuiranu simetriju tada za svaki nezavisni kontinuirani parametar pridružen simetriji postoji pripadna struja koja je sačuvana kad su jednačbe gibanja zadovoljene.

Napomene:

- Simetrije moraju biti **kontinuirane**. Za diskretne grupe simetrija ne postoji pripadna sačuvana struja.
- Ukoliko je teorija polja relativistička, struje j_a^μ su 4-vektorska polja.
- Može se dogoditi da integral u (2.3.11) divergira za fizikalne konfiguracije polja. U tom slučaju nema sačuvanog naboja. Primjer je spontani lom simetrije koji ćemo razmotriti u odjeljku 2.5.3.

⁵Možemo uzeti $\epsilon(x)$ koji dovoljno brzo iščezava u beskonačnosti tako da rubni član koji se javlja iščezava, tj. $\oint da_\mu \epsilon j^\mu = 0$. Uočite da je ovo jedan primjer upotrebe relacije (2.2.6).

U najopćenitijem slučaju invarijantnost akcije na neku varijaciju u lokalnim teorijama polja povlači da je varijacija lagranžijanske gustoće totalna derivacija u prostor-vremenu. U relativističkim teorijama polja slijedi da mora vrijediti

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu F_\epsilon^\mu \quad (2.3.12)$$

gdje je F_ϵ^μ neki lokalni funkcional polja $\phi(x)$ linearan u parametru varijacije ϵ .

Poseban slučaj internih simetrija je kad je ne samo akcija već i lagranžijan invarijantan na internu transformaciju (2.3.4). U tom slučaju možemo otići i korak dalje

$$0 = \delta_\epsilon \mathcal{L} = \sum_r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta_\epsilon \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta_\epsilon (\partial_\mu \phi_r) \right\} = \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right] \delta_\epsilon \phi_r + \sum_a \epsilon_a \partial_\mu j_a^\mu \quad (2.3.13)$$

gdje smo koristili $\delta_\epsilon \partial_\mu \phi_r = \partial_\mu \delta_\epsilon \phi_r$ i napravili parcijalnu integraciju. Primjenom (2.3.4) dobijamo da su struje j_a^μ dane s

$$j_a^\mu = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} f_r^{(a)} \quad (\text{lagranžijan invarijantan na simetriju}) \quad (2.3.14)$$

Ukoliko sada nametnemo Euler-Lagrangeove jednadžbe na (2.3.13), vidimo da član u uglatoj zagradi iščezava i dobijamo da vrijedi zakon sačuvanja (2.3.8) za struje j_a^μ . Dobitak u odnosu na opći slučaj je da smo dobili eksplicitni izraz za sačuvane struje, dan u (2.3.14).

Primjer 2.3.1: Kompleksno Klein-Gordonovo polje. Razmotrimo lagranžijan dan u (2.2.9). Vidljivo je da je lagranžijan invarijantan na interne transformacije

$$\varphi'(x) = e^{-i\alpha} \varphi(x) \quad (2.3.15)$$

gdje je α proizvoljan konstantan realni parametar. Očito se radi o jednoparametarskoj kontinuiranoj grupi transformacija pa očekujemo postojanje jedne pridružene sačuvane struje koju možemo dobiti primjenom (2.3.14). Ako uzmemo da je $\alpha = \epsilon$ infinitezimalan parametar, onda transformacija (2.3.15) postaje

$$\delta_\epsilon \varphi(x) = -i\epsilon \varphi, \quad \delta_\epsilon \varphi^*(x) = i\epsilon \varphi^*(x)$$

pa vidimo da su funkcije f_r u ovom slučaju dane s $f = -i\varphi$, $f^* = i\varphi^*$. Primjenjujući trik u kojem polja φ i φ^* tretiramo kao nezavisna, te korištenjem (2.2.9) i (2.3.14) dobijamo

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} f + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} f^* = -i(\partial^\mu \varphi^*) \varphi + i(\partial^\mu \varphi) \varphi^*$$

Pripadni sačuvani naboj je

$$Q = i \int d^3 \mathbf{x} [\dot{\varphi} \varphi^* - \dot{\varphi}^* \varphi] \quad (2.3.16)$$

Usporedbom s (1.4.7) možemo vidjeti da je, do na konstantni faktor, ovo upravo sačuvana veličina koju smo bezuspješno pokušali identificirati s jednočestičnom amplitudom vjerojatnosti detektiranja čestice prilikom (neuspješnog) pokušaja konstrukcije jednočestične relativističke kvantne mehanike. Kasnije ćemo vidjeti da ovakva vrsta grupa simetrije (tzv. $U(1)$ grupa) objašnjava sačuvanje električnog naboja.

Primjer 2.3.2: Realno Klein-Gordonovo polje. Razmotrimo lagranžijan (2.2.7) s kvartičkim potencijalom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \lambda \varphi^4$$

koji se obično naziva φ^4 teorija. Ovaj lagranžijan je invarijantan na internu transformaciju $\varphi' = -\varphi$. No, ovog puta radi se o diskretnoj grupi transformacija, tj. grupi koja ima konačan broj elemenata (dva, ± 1) i ne posjeduje kontinuirani parametar. Stoga ne postoji pridružena sačuvana struja.

Lokalne interne simetrije

Pretpostavimo da je akcija neke teorije polja invarijantna na n -parametarsku grupu **lokalnih** transformacija, čiji infinitezimalni oblik je

$$\delta\phi_r(x) = \sum_{a=1}^n \mathcal{F}_r^{(a)}[\epsilon(x), \phi(x)] \quad , \quad \delta_\epsilon x = 0 \quad (2.3.17)$$

gdje su sada parametri transformacije $\epsilon_a(x)$ proizvoljne realne (infinitezimalne) funkcije. Pripadne simetrije se nazivaju **lokalne interne simetrije** (ili **baždarne simetrije**) a teorija polja koja ih posjeduje **baždarna teorija polja**. Očito je da lokalne simetrije sadrže u sebi globalne simetrije, dane s $\epsilon(x) = \epsilon = \text{konst.}$. Dobro poznati i supervažni primjer baždarne teorije polja je elektrodinamika, čiji lagranžijan smo konstruirali u zadatku na kraju odjeljku 2.2.3. Znamo da je akcija elektrodinamike invarijantna na jednoparametarsku lokalnu internu transformaciju danu s:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \quad , \quad j'_\mu(x) = j_\mu(x)$$

Baždarne simetrije igraju posebnu važnu ulogu u kvantnoj teoriji pa ćemo detaljniju analizu ostaviti za kasnije. Ovdje ćemo samo napomenuti da se dugo vremena smatralo da u elektrodinamici i "bratskim" baždarnim teorijama samo podgrupa globalnih simetrija vodi na sačuvane naboje (što bi značilo da u elektrodinamici postoji samo jedan sačuvani naboj, električni). Danas se zna da ta slika nije potpuna i da u stvari postoji beskonačni toranj sačuvanih naboj. Za razliku od električnog naboja, ovi drugi naboji imaju puno suptilnije fizikalno značenje, npr., daju objašnjenje za tzv. meke teoreme (*soft theorems*) u analizi amplituda raspršenja te za tzv. efekat memorije vakuuma (*memory effect*).

2.3.2 Prostorno-vremenske simetrije: translacije u prostor-vremenu

Nećemo ulaziti u opću teoriju simetrija koje uključuju transformaciju na prostor-vremenu, već ćemo se pozabaviti najjednostavnijim i ujedno najvažnijim primjerom takvih simetrija – **translacije u prostor-vremenu**. Ako je sustav zatvoren (izoliran), svi eksperimenti izvedeni do sada su u skladu s tvrdnjom da fizikalni zakoni ne ovise o apsolutnom položaju u prostoru ili vremenu. Jedini način na koji će ovo biti zagaranirano u lagranžijanskom formalizmu je da lagranžijan nema eksplicitnu ovisnost o koordinatama prostor-vremena x , što znači da u slučaju relativističke teorije polja akcija ima oblik

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \equiv \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (2.3.18)$$

Vidimo da je akcija invarijantna na translacije u prostor-vremenu definirane s

$$x'^\mu = x^\mu - a^\mu \quad , \quad \phi'_r(x') = \phi_r(x) \quad (2.3.19)$$

jer je očito $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ i $d^4x' = d^4x$. Pošto su komponente 4-vektora ϵ^μ nezavisne, vidimo da se radi o četveroparametarskoj grupi simetrija, pa očekujemo 4 pripadne sačuvane struje.⁶

Vidimo da je varijacija Lagranžijana na infinitezimalne translacije $a^\mu = \epsilon^\mu$ dana s

$$\delta_\epsilon \mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) \quad (2.3.20)$$

S druge strane, koristeći činjenicu da je sva ovisnost lagranžijana o x implicitno sadržana u poljima možemo pristupiti analogno postupku u (2.3.13)

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \sum_r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta_\epsilon \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \delta_\epsilon (\partial_\nu \phi_r) \right\} = \sum_r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \right] \delta_\epsilon \phi_r + \partial_\nu \left[\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \delta_\epsilon \phi_r \right]$$

gdje iz (2.3.19) slijedi da je

$$\delta_\epsilon \phi_r(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_r(x)$$

⁶Uočite da u ovom slučaju prostorno-vremenski indeks μ igra ulogu indeksa u parametarskom prostoru grupe simetrija koji smo prije označavali s a .

Sada namećemo uvjet da polja zadovoljavaju Euler-Lagrangeove jednačbe što čini da član u lijevoj uglatoj zagradi iščezava. Izjednačavanje dobijenog izraza s (2.3.20) daje relaciju

$$\epsilon^\mu \partial_\nu \left[\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \partial_\mu \phi - \eta_\mu^\nu \mathcal{L} \right] = 0$$

Pošto je ϵ^μ proizvoljan infinitezimalan 4-vektor, slijedi da izraz u uglatoj zagradi mora iščezavati, tj.

$$\partial_\nu T^\nu_\mu = 0 \quad \text{kad } \phi_r \text{ zadovoljavaju (E-L) jednačbe gibanja.} \quad (2.3.21)$$

gdje je

$$T^\nu_\mu = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \partial_\mu \phi - \eta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (2.3.22)$$

Vidimo da za svaku vrijednost indeksa μ (2.3.21) daje jednu jednačbu kontinuiteta što znači da sve skupa imamo 4 lokalna zakona sačuvanja, kao što smo i očekivali po Noetherinom teoremu.

Pošto je generator translacija u vremenu **hamiltonijan**, tj. **energija**, a generatori translacija u prostoru **komponente impulsa**, sačuvani naboji pridruženi ovim strujama čine **4-vektor ukupne energije i impulsa sustava**:

$$P_\mu = \int d^3\mathbf{x} T^0_\mu(x) = \int d^3\mathbf{x} \left(\sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi}_r)} \dot{\phi}_r - \delta_\mu^0 \mathcal{L} \right) \quad , \quad \dot{P}_\mu(t) = 0 \quad (2.3.23)$$

Vidimo da smo dobili zakone očuvanja energije i impulsa. Tenzor (2.3.22) se obično naziva **kanonski tenzor energije-impulsa**. Istaknimo da se ukupna energija E i impuls $\mathbf{P}$, definirani na standardni način, dobiju iz kovarijantnog vektora $P_\mu = (E, \mathbf{P})$, tj. $P^\mu = (E, -\mathbf{P})$.

Treba uočiti da kanonski tenzor energije impulsa, dobiven iz Noetherinog teorema, ne mora biti simetričan. Ukoliko želimo vezati polje na gravitaciju koristeći principe opće relativnosti to naizgled predstavlja problem jer taj tenzor po definiciji mora biti simetričan. No, iako se pokaže da postoji procedura kojom se može "upotpuniti" kanonski tenzor na način da postane simetričan, a da ukupna energija i naboj ostanu nepromijenjeni. Postupak se sastoji u tome da se uoči da za bilo koji tenzor ranga 3 koji je antisimetričan u svoja prva dva indeksa, $S^{\lambda\mu\nu} = -S^{\nu\lambda\mu}$, možemo definirati novi tenzor energije-impulsa

$$T'^{\nu\mu} = T^{\nu\mu} + \partial_\lambda S^{\lambda\nu\mu} \quad (2.3.24)$$

koji i dalje zadovoljava zakon sačuvanja $\partial_\nu T'^{\nu\mu} = 0$ i daje iste ukupnu energiju i impuls kao i kanonski tenzor energije impulsa. Može se pokazati da odabirom tenzora $S^{\lambda\mu\nu}$ u relativističkim teorijama uvijek možemo putem (2.3.24) konstruirati **poboljšani tenzor energije-impulsa** koji je simetričan.⁷

Vježba 2.3.3: Izračunajte kanonski tenzor energije-impulsa, te izraze za ukupnu energiju i impuls za realno skalarno polje $\varphi(x)$ s lagranžijanom (2.2.7). Pronađite jednačbu za dobijanje stanja najniže energije (**vakuuma**) i njegovu gustoću energije, s tim da posebno razmotrite slučaj kad je potencijal $\mathcal{V}(\varphi)$ polinomna funkcija.

Rješenje: Pošto je u ovom slučaju

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} = \partial^\nu \varphi$$

uvrštavanje u (2.3.22) daje:

$$T^\nu_\mu = (\partial^\nu \varphi)(\partial_\mu \varphi) - \eta_\mu^\nu \mathcal{L}$$

⁷Dapače, postoji čak i gotova formula za to koja se naziva Belinfanteov tenzor. No, poboljšani tenzor koji je simetričan nije jedinstven, jer uvijek možemo napraviti dodatnu transformaciju (2.3.24) s tenzorom $S^{\lambda\mu\nu}$ koji je simetričan u zadnja dva indeksa (μ, ν) i tako dobiti novi poboljšani tenzor energije i impulsa.

gdje je $\mathcal{L}$ dan u (2.2.7). Slijedi da je energija dana s

$$E = P_0 = \int d^3\mathbf{x} T^{00} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) \right] \quad (2.3.25)$$

Nije teško zaključiti da će energija biti minimizirana za konstantno polje $\varphi(x) = \varphi$. Euler-Lagrangeova jednačba kaže da rješenja u tom slučaju zadovoljavaju

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = 0$$

tj. rješenja za konstantna polja su tamo gdje su lokalni ekstremi potencijala. Očito je da će lokalni minimumi predstavljati stabilna rješenja, a lokalni maksimumi i točke infleksije nestabilna rješenja. Također je očito da će energija sustava biti **omeđena odozdo** (tj. postojat će konfiguracija najniže energije koju nazivamo **vakuum**) samo ukoliko potencijal posjeduje globalni minimum. Ukoliko se taj globalni minimum nalazi u točki φ_{vac} , gustoća energije vakuumske stanja je konstantna i dana s $\mathcal{V}(\varphi_{\text{vac}})$. Ukoliko je $\varphi_{\text{vac}} = 0$ i $m^2 \geq 0$, kaže se da je m **masa polja** φ (potpuno značenje ove tvrdnje bit će jasno nakon što kvantiziramo skalarno polje),⁸ dok je $\mathcal{V}_{\text{int}}$ **interakcijski potencijal**

U praksi se najčešće razmatraju slučajevi u kojima je $\mathcal{V}_{\text{int}}$ polinom:

$$\mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) = \sum_{j=3}^n \lambda_j \varphi^j$$

U ovom slučaju uvjet da teorija posjeduje vakuum je da je n paran broj.

Impuls je pak dan s

$$P_i = \int d^3\mathbf{x} T^0_i = \int d^3\mathbf{x} \dot{\varphi} \partial_i \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P} = \int d^3\mathbf{x} \dot{\varphi} \nabla \varphi \quad (2.3.26)$$

Zadatak 2.3.1: Koristeći izraz za lagranžijan slobodnog elektromagnetskog polja, koji se dobije tako da se stavi $j^\mu = 0$ u (2.2.10), napravite sljedeće:

- (a) Pokažite da je kanonski tenzor energije-impulsa za slobodno elektromagnetsko polje dan s

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\alpha} F^{\rho\alpha}$$

- (b) Pokažite da kanonski tenzor energije-impulsa nije simetričan.

- (c) Konstruirajte najjednostavniji poboljšani tenzor energije-impulsa (koji je simetričan).

2.4 Hamiltonov princip i Poissonove zagrade

Hamiltonov princip može se dobiti iz Lagrangeovog tako da se pređe s kanonskih varijabli $\{q, \dot{q}\}$ na varijable $\{q, p\}$ gdje su p_j kanonski impulsi pridruženi generaliziranim koordinatama q_j i definirani su kao

$$p_j(t) = \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{q}_j(t)}$$

⁸Pažljivi čitatelj je zapazio da ovako definirana masa ima pogrešnu dimenziju. U stvari, vidjet ćemo, kao što je jednačba (1.4.4) već sugerirala, da je "prava" masa dana s $mc/\hbar$. No, pošto mi ionako koristimo prirodni sustav jedinica u kojem je $\hbar = c = 1$, možemo si dopustiti ovako komotan način izražavanja.

Generalizacija na polja $\phi_r(\mathbf{x}, t)$ vodi nas na definiciju gustoća kanonskih impulsa

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}_r(x)} \quad (2.4.1)$$

Gustoća hamiltonijana $\mathcal{H}$ i hamiltonijan H su definirani pomoću Legendreove transformacije

$$\mathcal{H}(x) = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \quad , \quad H[\phi(t), \pi(t), t] = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(x) \quad (2.4.2)$$

Poissonove zagrade dvaju funkcionala polja i impulsa u danom trenutku vremena t se definiraju kao

$$\{F(t), G(t)\}_P = \sum_r \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{\delta G(t)}{\delta \pi_r(x)} \frac{\delta F(t)}{\delta \phi_r(x)} - \frac{\delta G(t)}{\delta \phi_r(x)} \frac{\delta F(t)}{\delta \pi_r(x)} \right)$$

U ovom izrazu pretpostavlja se da je vrijeme t fiksirano. U praksi funkcionali često imaju lokalni oblik:

$$G(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{G}(\phi(x), \pi(x), x)$$

gdje je $\mathcal{G}$ obična funkcija svojih varijabli.

Jedna posljedica ove definicije su tzv. kanonske Poissonove zagrade

$$\{\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{y}, t)\}_P = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{rs} \quad , \quad \{\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{y}, t)\}_P = 0 \quad , \quad \{\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{y}, t)\}_P = 0 \quad (2.4.3)$$

iz kojih se, koristeći poznata algebarska svojstva Poissonovih zagrada, mogu izračunati Poissonove zagrade svih drugih veličina. Na primjer, iz definicije hamiltonijana i Poissonovih zagrada slijedi da se jednačbe gibanja mogu napisati u ekvivalentnom obliku kao:

$$\dot{\phi}_r(x) = \frac{\delta H(t)}{\delta \pi_r(x)} = \{\phi_r(x), H(t)\}_P$$

Ova relacija eksplicitno pokazuje da je hamiltonijan generator translacija u vremenu. U slučaju kad je teorija invarijantna na translacije u vremenu (što očekujemo da vrijedi za sve izolirane sustave) hamiltonijan je vremenski neovisan, tj. $\dot{H} = 0$.

Uočimo da Hamiltonov princip i Poissonove zagrade na različit način tretiraju vrijeme t i prostorne koordinate $\mathbf{x}$, što znači da ovi pristupi nisu manifestno Lorentz-kovarijantni i stoga nisu najspretniji pristupi relativističkim teorijama polja.

Primjer 2.4.1: Pronađite hamiltonijan za realno skalarno polje φ s lagranžijanom (2.2.7). U ovom slučaju kanonski impuls⁹ pridružen polju φ je

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad (2.4.4)$$

pa iz (2.4.2) slijedi da je gustoća hamiltonijana ove teorije

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \pi^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) \quad (2.4.5)$$

a pripadni hamiltonijan

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) \right] \quad (2.4.6)$$

je po očekivanju jednak ukupnoj energiji dobijenoj pomoću Noetherine procedure i danoj u (2.3.25).

⁹Iako je ispravnije reći da se radi o gustoći kanonskog impulsa, mi ćemo radi kratkoće upotrebljavati izraz kanonski impuls, ujedno jer je to i uobičajena konvencija (slično kao što lagranžijansku gustoću u tekstu nazivamo lagranžijanom).

2.5 Vakuum, simetrije i njihov lom

2.5.1 Vakuum u klasičnoj relativističkoj teoriji polja

Fizikalno stanje (u klasičnoj teoriji polja fizikalna stanja su konfiguracije polja koja su rješenja jednadžbi gibanja) najniže energije nazivamo **vakuum**. Nas će primarno zanimati **stabilne** teorije u kojima je spektar energija ograničen odozdo i u kojima postoji vakuum (jedan ili više njih).¹⁰ Gledano **generički**, **većina** teorija ima samo **jedan** vakuum, označimo ga s $\phi_0(x)$ a njegovu energiju s E_0 . Obratite pažnju da u relativističkim teorijama polja u ovom slučaju možemo odmah zaključiti sljedeće:

- Vakuumska konfiguracija mora biti konstantna, $\phi_0(x) = \phi_0 = \text{konst.}$
- Samo skalarna polja mogu poprimati neiščezavajuće vrijednosti u vakuumu.

Inače bi primjenom Poincaréovih transformacija mogli generirati nove vakuume

$$\phi_{\Lambda,a}^{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_k}_{\nu_k} \phi_0^{\nu_1 \dots \nu_k}(\Lambda^{-1}x + a) \quad , \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5.1)$$

koji ne bi mogli biti jednaki ϕ_0 za svaki odabir Λ i a , ukoliko dva gornja uvjeta nisu zadovoljena. Iako ćemo uskoro prijeći na modele u kojima postoji više vakuuma i dalje ćemo pretpostavljati da su svi vakuumi invarijantni na Poincaréove transformacije, što znači da će vrijediti gornji uvjeti na vakuumske konfiguracije polja.¹¹

Vidimo da u ovom slučaju možemo redefinirati skalarna polja na način da uvedemo $\varphi'_r(x) \equiv \varphi_r(x) - \varphi_0$ i redefinirati hamiltonijan tako da odbijemo vakuumsku energiju, $H' \equiv H - E_0$. Na taj način dobijamo da vrijednosti svih polja u vakuumu iščezavaju, $\phi'_0 = 0$, i da je energija vakuuma jednaka nula, $E'_0 = 0$. Tijekom predavanja slijedit ćemo standardni običaj u kojem je pretpostavljeno da je ova procedura unaprijed primjenjena i da sva polja i hamiltonijan iščezavaju u vakuumu.

Da bi bolje razumjeli gornju raspravu, kao primjer razmotrimo sve moguće relativističke teorije koje sadrže n realnih skalarnih polja $\vec{\varphi}(x) \equiv (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ čiji lagranžijan je oblika

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\vec{\varphi})^2 - \mathcal{V}(\vec{\varphi}) \quad (2.5.2)$$

gdje je potencijal $\mathcal{V}$ neka proizvoljna realna funkcija n varijabli. U ovom slučaju odabir teorije se svodi na odabir funkcije $\mathcal{V}$. Klasična energija (tj. hamiltonijan) je dana s:

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\dot{\vec{\varphi}})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\vec{\varphi})^2 + \mathcal{V}(\vec{\varphi}) \right] \quad (2.5.3)$$

dok Euler-Lagrangeove jednadžbe vode na sljedeće jednadžbe gibanja

$$\square\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi_r} = 0 \quad , \quad r = 1, \dots, n \quad (2.5.4)$$

Za početak uočite da svaka konstantna konfiguracija polja u kojoj je $\mathcal{V}' = 0$ daje klasično rješenje jednadžbi polja. S obzirom da je dio hamiltonijana koji sadrži derivacije polja strogo pozitivan za svaku konfiguraciju polja koja nije konstantna, očito je da energiju minimizira konfiguracija $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_0$, gdje je $\vec{\varphi}_0$ globalni minimum potencijala $\mathcal{V}$.

Naravno, vakuuma će biti onoliko koliko globalnih minimuma posjeduje funkcija $\mathcal{V}$. Već smo napomenuli da nas zanimaju teorije u kojima energija posjeduje globalni minimum. Uz tu pretpostavku očito je da će u generičkoj teoriji postojati samo jedan globalni minimum, što znači jedan vakuum.¹² Vidimo da u generičkom slučaju teorija ima jedan

¹⁰Postoji mogućnost u kojoj je spektar energija ograničen odozdo, no teorija svejedno ne posjeduje vakuum. To se može dogoditi kad je "formalni vakuum" izvan domene definicije polja, npr. za beskonačne vrijednosti polja. Iako ovakve teorije nisu sasvim nezanimljive i razmatrane su u literaturi, mi se nećemo baviti njima na ovom kolegiju.

¹¹Drugim riječima, neće nas zanimati spontani lom Poincaréove simetrije.

¹²Ako vam ovo nije jasno razmislite na sljedeći način. Pretpostavite da programirate računalo da vam nasumično izbaci funkciju $\mathcal{V}$, uz uvjet da mora imati bar jedan lokalni minimum i uz pretpostavku da nema nikakvih simetrija. Vrlo je mala vjerojatnost (u stvari iščezavajuće mala) da će vam računalo slučajno izbaciti funkciju koja ima više od jednog globalnog minimuma.

vakuum, $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_0$ čija volumna gustoća energije je $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(\vec{\varphi}_0)$. Definiranjem $\vec{\varphi}'(x) \equiv \vec{\varphi}(x) - \vec{\varphi}_0$ i $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L} + \mathcal{V}_0$ postizemo da vakuumska konfiguracija polja i energija vakuuma iščezavaju.

Negeneričnost (ili "neprirodnost") teorija polja s više vakuuma ima još jedan aspekt. Kvantizacija teorija vodi na kvantne korekcije vakuuma (i položaja i energije vakuuma), i u slučajevima u kojima postoji više klasičnih vakuuma i nema nikakvih simetrija očekujemo da ove korekcije razbiju degeneracije ukoliko ne postoje neki posebni mehanizmi (poput simetrija) koji to sprječavaju. Naravno, uvijek možemo odabrati klasičnu teoriju tako da kvantne korekcije točno ponište klasičnu razliku u energijama dvaju lokalnih minimuma i na taj način postignemo da kvantizirana teorija ima više vakuuma. Takva potreba za "ručnim" **finim podešavanjem** (eng. *fine tuning*) između klasičnih i kvantnih doprinosa **ne izgleda prirodna**, pogotovo ako se radi o efektivnim teorijama polja. **Stoga će se u ostatku udžbenika uglavnom pretpostavljati da postoji samo jedan vakuum.** Izuzetak je situacija spontanog loma simetrije, na koju ćemo se sada ukratko osvrnuti, i na koju ćemo se vratiti ponovo u odjeljcima 3.10.7 i 4.9.

2.5.2 Spontani lom diskretne simetrije

U prethodnom odjeljku pretpostavljali smo da na parametre ne postoje nikava ograničenja, osim onoga da postoji bar jedan globalni minimum energije. Stvar se bitno mijenja ukoliko u teoriji postoje simetrije, koje same po sebi ograničavaju parametarski prostor teorije. Da bi to shvatili, razmotrimo prvo najjednostavniji primjer teorija s jednim skalarnim poljem $\varphi(x)$ u kojima pretpostavljamo da postoji unutarnja diskretna simetrija na transformaciju $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = -\varphi(x)$. Ponovo ćemo se ograničiti na teorije

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \mathcal{V}(\varphi) \quad , \quad \mathcal{V}(-\varphi) = \mathcal{V}(\varphi) \quad (2.5.5)$$

Ukoliko je $\mathcal{V}$ polinomna funkcija, simetrija nameće uvjet da se mogu javljati samo parne potencije argumenta:

$$\mathcal{V}(\varphi) = \sum_{j=0} a_j \varphi^{2j} \quad (2.5.6)$$

Radi jednostavnosti prezentacije, ograničit ćemo se na slučaj u kojem je potencijal polinom 4-tog reda:

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (2.5.7)$$

gdje su μ^2 i λ dva realna parametra, koja su a priori neodređena i čiji izbor u potpunosti definira teoriju polja. Očito je da zahtjev stabilnosti nameće ograničenje $\lambda \geq 0$ (u slučaju $\lambda = 0$ stabilnost traži $\mu^2 \geq 0$). Pronađimo sada vakuum(e) u ovoj klasi teorija. Kao što smo vidjeli, vakuumi su konstantne konfiguracije $\varphi(x) = \varphi_0$ koje su položaji globalnih minimuma funkcije $\mathcal{V}$. Položaj lokalnih minimuma potencijala se dobije iz zahtjeva:

$$\mathcal{V}'(\varphi_0) = \mu^2\varphi_0 + \lambda\varphi_0^3 = 0 \quad , \quad \mathcal{V}''(\varphi_0) = \mu^2 + 3\lambda\varphi_0^2 \geq 0 \quad (2.5.8)$$

Vidimo da postoje tri različita slučaja, opisana sljedećim rasponima vrijednosti parametara teorije: (a) $\lambda > 0$, $\mu^2 \geq 0$ i $\lambda = 0$, $\mu^2 > 0$; (b) $\lambda > 0$, $\mu^2 < 0$; (c) $\lambda = 0$, $\mu^2 = 0$.

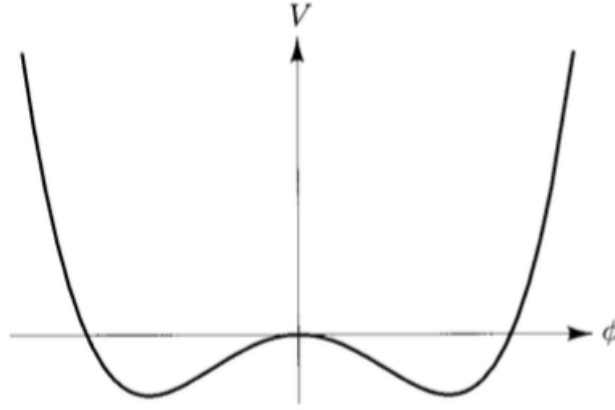
(a) $\lambda > 0$, $\mu^2 \geq 0$ i $\lambda = 0$, $\mu^2 > 0$

Sustav (2.5.8) ima samo jedno rješenje, $\varphi_0 = 0$, koje stoga mora biti globalni minimum. Postoji samo jedan vakuum čija gustoća energije je $\mathcal{V}(0) = 0$, a masa polja je $m = \sqrt{\mu^2}$.

(b) $\lambda > 0$, $\mu^2 < 0$

Sustav (2.5.8) ima dva rješenja, $\varphi_{0\pm} = \pm\sqrt{|\mu^2|/\lambda}$. Pošto oba stanja imaju jednaku gustoću energije, danu s $\mathcal{V}(\varphi_{0\pm}) = -\mu^4/(4\lambda)$, oba rješenja su globalni minimumi energije pa u ovom slučaju postoje **dva vakuuma** (vidi sliku 2.1). Uočite da pošto je $\mu^2 < 0$, u slučaju (b) μ nije masa polja. Masu u slučaju (b) možemo dobiti tako da definiramo polje relativno u odnosu na jedan od vakuuma, npr. $\chi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi_{0+}$, što kad uvrstimo u lagranžijan (2.5.5)-(2.5.7) daje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \mathcal{V}(\chi) \quad , \quad \mathcal{V}(\chi) = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + |\mu^2|\chi^2 + \sqrt{\lambda|\mu^2|}\chi^3 + \frac{\lambda}{4}\chi^4 \quad (2.5.9)$$



Slika 2.1: Potencijal (2.5.7) za slučaj (b), $\mu^2 < 0$ i $\lambda > 0$.

Iz koeficijenta ispred člana χ^2 , koji je pozitivan, možemo očitati da je masa polja χ jednaka $m_\chi = \sqrt{2|\mu^2|}$. Da smo umjesto φ_{0+} odabrali drugi vakuum φ_{0-} jedina razlika bi bila u tome da bi član s χ^3 imao suprotan predznak. Uočite da lagranžijan izražen pomoću polja χ više nema jasno vidljivu simetriju. Razlog leži u tome da vakuumi nisu invarijantni na simetriju, pa definiranje teorije u odnosu na njih (tj. pomoću polja koja imaju dobro definiranu masu) razbija manifestnu simetriju teorije. Naravno, simetrija lagranžijana i dalje postoji, samo nije više očita i ne reprezentira se na lijep način na polju χ koje ima dobro definiranu masu. Ova pojava, u kojoj postoji simetrija ali vakuumi nisu invarijantni na njeno djelovanje, naziva se **spontani lom simetrije**.

(c) $\lambda = 0, \mu^2 = 0$

Sustav (2.5.8) rješava svaka vrijednost $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Svako ovo stanje ima jednaku, iščezavajuću, energiju pa u ovom slučaju postoji neprebrojivo beskonačno vakuuma. Bez obzira koji vakuum uzeli kao referentni, polje je **bezmaseno**. Uočite da u ovom slučaju postoji kontinuirana grupa simetrija dana s $\varphi'(x) = \varphi(x) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Kao što ćemo uskoro pokazati, ova simetrija objašnjava bezmasenost polja.

Uočite da su sada slučajevi (a) i (b) generički, dok (c) je poseban slučaj s većom grupom simetrija i na njega ćemo se vratiti kasnije. **Vidimo da je u prisustvu interne simetrije "jednako prirodno" (tj. generičko) postojanje jednog kao i više vakuuma.** Također vidimo da su "prirodni" višestruki vakuumi povezani djelovanjem simetrije. To ne vrijedi samo za ovaj jednostavni primjer nego je općenito pravilo.¹³

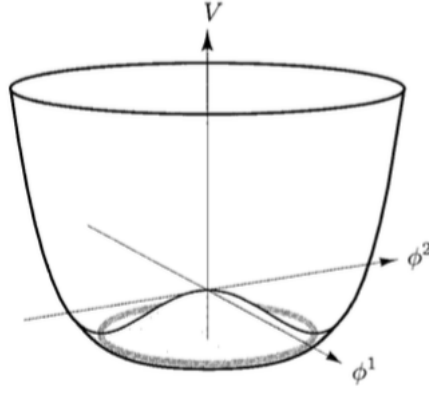
Možemo zaključiti:

U slučaju kada teorija polja ne posjeduje simetrije, prirodno je za očekivati da postoji jedan i samo jedan vakuum u teoriji. U slučaju postojanja simetrija, spontani lom simetrije (postojanje više vakuuma povezanih djelovanjem simetrija) je također prirodna mogućnost.

2.5.3 Spontani lom kontinuiranih globalnih simetrija. Goldstoneov teorem

Posebno je zanimljiv slučaj u kojem imamo spontani lom kontinuirane grupe simetrija. Kao što ćemo sada pokazati, u slučaju **globalnih** simetrija to nužno vodi na postojanje bezmasenih polja u teoriji, koja se nazivaju **Goldstoneova polja**. Jednostavniji primjer ove pojave možemo vidjeti na slučaju (c) iz gornjeg primjera. Lako se vidi da je u tom slučaju teorija simetrična na transformacije $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + a$, gdje je a bilo koji realni broj. Pošto je u ovom slučaju

¹³U stvari, vakuumi čine reprezentaciju grupe simetrija, za koju u "prirodnom" slučaju očekujemo da je ireducibilna (ne sastoji se od odvojenih podskupova koji se transformiraju unutar sebe). U našem jednostavnom primjeru, u slučaju (a) i (b), grupa internih simetrija je jednaka grupi množenja dva elementa, 1 i -1 . Postoje samo dvije ireducibilne reprezentacije ove grupe, trivijalna u kojoj postoji samo jedan vakuum i svodi se na slučaj (a), i reprezentacija s dva vakuuma koja se svodi na slučaj (b).



Slika 2.2: Potencijal (2.5.11) za slučaj $N = 2$, $\mu^2 > 0$ i $\lambda > 0$.

$\mathcal{V} = 0$, polje φ je bezmaseno. Da bi bolje razumjeli ovaj mehanizam generiranja bezmasenih polja, u sljedećoj vježbi razmotrit ćemo složeniji primjer teorije u kojoj postoji spontani lom globalne simetrije.

Vježba 2.5.1: Linearni sigma model

Da bi bolje razumjeli ovaj mehanizam generiranja bezmasenih polja, razmotrit ćemo složeniji primjer teorije u kojoj postoji spontani lom globalne simetrije. Uzet ćemo da teorija sadrži N realnih skalarnih polja $\varphi_r(x)$, koja ćemo, radi ekonomičnosti formula, organizirati u "vektor" $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, te da je lagranžijan dan s

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi})^2 + \frac{\mu^2}{2}(\vec{\varphi})^2 - \frac{\lambda}{4}[(\vec{\varphi})^2]^2 \quad (2.5.10)$$

gdje je $(\vec{\varphi})^2 = \sum_r \varphi_r^2$ i $\lambda > 0$. Ova teorija je poznata pod imenom **linearni sigma model**. Potencijal ove teorije je dan s

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu^2}{2}(\vec{\varphi})^2 + \frac{\lambda}{4}[(\vec{\varphi})^2]^2 \quad (2.5.11)$$

Uočite da postoji kontinuirana globalna simetrija na "rotacije" polja $\vec{\varphi}$:

$$\varphi_r(x) \longrightarrow \varphi'_r(x) = \sum_{s=1}^n R_{rs} \varphi_s(x) \quad , \quad R \in O(N)$$

gdje su R ortogonalne $N \times N$ matrice koje čine grupu $O(N)$ ("rotacije" i "refleksije" na "vektoru" polja $\vec{\varphi}$). U slučaju $\mu^2 < 0$, vakuum teorije je jedinstven i dan je s $\vec{\varphi} = 0$, a svako polje φ_j posjeduje masu $m = \sqrt{-\mu^2}$.

Razmotrimo detaljnije slučaj $\mu^2 > 0$. Potencijal za slučaj $N = 2$ je skiciran na slici 2.2. U vakuumu polja su konstantna, što znači da se Euler-Lagrangeova jednadžba svodi na

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi_r} = 0 \quad \implies \quad (\lambda(\vec{\varphi})^2 - \mu^2)\varphi_j = 0$$

Iz oblika potencijala očito je da rješenje $\vec{\varphi} = 0$ predstavlja lokalni maksimum potencijala, dok rješenja koja zadovoljavaju

$$(\vec{\varphi})^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

opisuju vakuume teorije. Vidimo da postoji beskonačno mnogo vakuuma koji su povezani djelovanjem simetrija. Odaberimo sada jedan vakuum (potpuno je svejedno koji, svi su ekvivalentni), npr.

$$\vec{\varphi}_0 = (0, 0, \dots, v) \quad , \quad v \equiv \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (2.5.12)$$

i definirajmo "pomaknuta" polja $\pi_j(x)$, $j = 1, \dots, N - 1$ i $\sigma(x)$ u odnosu na taj vakuum, na način

$$\vec{\phi}(x) = (\pi_1(x), \dots, \pi_{N-1}(x), \sigma(x) + v) \quad (2.5.13)$$

Sad možemo napisati lagranžijan (2.5.10) pomoću novih polja. Rezultat je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\partial_\mu \pi_j)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \mu^2 \sigma^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\pi, \sigma)$$

gdje je interakcijski potencijal dan s

$$\mathcal{V}_{\text{int}}(\pi, \sigma) = \sqrt{\lambda} \mu \sigma^3 + \frac{\lambda}{4} \sigma^4 + \lambda \left(\sum_j \pi_j^2 \right) \left[\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{4} \sum_j \pi_j^2 \right]$$

Vidimo da polje sigma ima masu danu s

$$m_\sigma = \sqrt{2} \mu$$

dok su polja π_j **bezmasena**. Linearni sigma model s $\mu^2 > 0$ posjeduje $N - 1$ bezmasenih polja. Da li postoji neko objašnjenje za ovaj broj? Sjetimo se da spontani lom simetrije znači da vakuum teorije nije invarijantan na djelovanje simetrije. No, ako uzmemo bilo koji vakuum, npr. onaj dan u (2.5.12) očito je da postoji podgrupa od $O(N)$ na koju je vakuum invarijantan - "rotacije" i "refleksije" ortogonalne na os vakuuma, koje čine $O(N - 1)$ grupu. Npr, za vakuum dan u (2.5.12) $O(N - 1)$ podgrupa simetrija na koju je invarijantan je dana matricama R koje zadovoljavaju

$$R_{jN} = R_{Nj} = 0 \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad R_{NN} = 1 \quad (2.5.14)$$

Očito je da za ovakve matrice blok R_{jl} , $j, l = 1, \dots, N - 1$ čini ortogonalnu matricu iz $O(N - 1)$. U ovoj teoriji vakuum ne lomi cijelu grupu globalnih internih simetrija $O(N)$, već je u tom smislu relevantan kvocijentni skup $O(N)/O(N - 1)$. Uočite da je dimenzija d kvocijentnog skupa (broj nezavisnih realnih parametara koji u potpunosti lokalno parametriziraju prostor) jednaka razlici dimenzija $O(N)$ i $O(N - 1)$, pa dobijamo

$$d = d(O(N)) - d(O(N - 1)) = \frac{N}{2}(N - 1) - \frac{N - 1}{2}(N - 2) = N - 1$$

Postojanje bezmasenih pobuđenja vodi na još jednu zanimljivost. U tu svrhu pogledajmo izraz za sačuvani naboj koji je povezan s nekom slomljenom simetrijom. Radi jednostavnosti uzmimo slučaj $N = 2$ u kojem je grupa simetrija jednoparametarska ($O(2)$, čija podgrupa povezana s jedinicom je $SO(2) \cong U(1)$) i potpuno je slomljena. Obratite pažnju da u tom slučaju lagranžijan (2.5.10) možemo napisati pomoću jednog kompleksnog polja $\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

i infinitezimalna simetrija je dana s

$$\delta \varphi(x) = -i\alpha \varphi(x)$$

Pošto spontani lom simetrije ne utječe na činjenicu da postoji lokalno sačuvana struja, Noetherin teorem nam omogućava da formalno definiramo pripadni sačuvani naboj. Pošto je gornja simetrija potpuno ista kao ona iz zadatka 2.3.1, možemo prepisati formule za struju i naboj (2.3.16). Ukoliko rezultat izrazimo pomoću "prirodnih" polja σ i π pomoću (2.5.13), dobijamo:

$$Q(t) = \int d^3 \mathbf{x} j^0(x) = v \int d^3 \mathbf{x} \dot{\pi}(x) + \dots \quad (2.5.15)$$

Postoje fizikalno prihvatljiva klasična rješenja u teoriji (za koja su energija, impuls i druge mjerljive veličine konačne) za koje gornji integral divergira. Dapače, pošto je polje π bezmaseno, očekujemo da za tipična lokalizirana rješenja

ima ponašanje $\sim 1/|\mathbf{x}|^2$ za $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, što znači da je naboj divergentan za generička fizikalno prihvatljiva rješenja. Pošto je nemoguće odbaciti sva takva rješenja kao nefizikalna i zadržati teoriju fizikalno smislenom, možemo zaključiti da **naboj koji pripada slomljenoj simetriji nije dobro definirana veličina**.¹⁴

Da li su ova svojstva slučajnosti koje vrijedi samo za ovaj model? Ne! Pokazat ćemo da je ovo samo jedan primjer općeg teorema.

Teorija u gornjoj vježbi je samo primjer općeg teorema koji ćemo sada točno formulirati:

Goldstoneov teorem. U teoriji polja sa spontano slomljenom kontinuiranom globalnom simetrijom opisanom grupom G postojat će bezmasena polja koje se nazivaju *Goldstoneova polja*. Ukoliko su vakuumi invarijantni na djelovanje podgrupe simetrija H , broj Goldstonovih polja je $d_G - d_H$, gdje je d_G (d_H) broj parametara grupe G (H).

Napomene:

1. Vidimo da je (minimalni) broj bezmasenih polja u potpunosti određen teorijom grupa.
2. U relativističkim teorijama polja s neslomljenom Lorentzovom simetrijom samo skalarna polja mogu imati neiščezavajuće vrijednosti u vakuumu. No, kao što ćemo vidjeti, u dokazu teorema ova pretpostavka nam neće trebati, što znači da teorem ima puno širu primjenu od relativističkih teorija polja.
3. Za spontano slomljenu simetriju ne postoji pripadni sačuvani naboj, iako postoji lokalno sačuvana struja.
4. Neki važniji primjeri Goldstonovih polja i pripadnih čestičnih pobuđenja:
 - (a) zvučni valovi (*fononi*) – spontani lom prostorno-vremenskih simetrija (Galileijeva grupa simetrija)
 - (b) *suprafluidnost* – gornji model sa $N = 2$ daje fenomenološki opis suprafluidnosti, gdje bezmasenost Goldstonovog polja objašnjava iščezavajuću viskoznost (za pobuditi bezmaseno polje dovoljno je neograničeno malo energije).
 - (c) valovi magnetizacije u magnetima (*magnoni*) – spontan lom rotacijske simetrije
 - (d) *pioni* – mezoni čija relativno mala masa je posljedica spontanog loma približne simetrije okusa (eng. *flavor symmetry*).

Vježba 2.5.2: Dokaz Goldstoneovog teorema

Za potrebe dokaza pretpostavit ćemo da je teorija polja opisana akcijom koja pored simetrije na translacije u prostor-vremenu posjeduje internu kontinuiranu d_G -parametarsku grupu simetrija G . U slučaju infinitezimalnih transformacija na grupu simetrija G polja se mijenjaju linearno

$$\delta\phi_r(x) = \sum_{a=1}^{d_G} \sum_s \epsilon_a t_{rs}^{(a)} \phi_s(x) \quad (2.5.16)$$

gdje su ϵ_r nezavisni infinitezimalni parametri, a d_G matrica $t_{rs}^{(a)}$ linearno reprezentira generatore grupe G na poljima. Invarijantnost akcije $S[\phi]$ na infinitezimalno djelovanje grupe G , tj. $\delta S[\phi] = 0$, daje uvjet

$$\sum_{r,s} \int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi_r(x)} t_{rs}^{(a)} \phi_s(x) = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, d_G \quad (2.5.17)$$

¹⁴U kvantnoj teoriji polja pokazuje se da djelovanje takvog naboja na vakuumsko stanje ne daje dobro definiran vektor stanja u Hilbertovom prostoru.

Translacijska invarijantnost nam kaže da će vakuumi biti opisani konstantnim poljima $\bar{\phi}$. Gornja jednažba napisana za konstantna polja $\phi_r(x) = \phi_r$ daje

$$\sum_{r,s} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi_r} t_{rs}^{(a)} \phi_s = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, d_G \quad (2.5.18)$$

gdje smo definirali potencijal $\mathcal{V}$ na standardni način putem

$$S[\phi] = -V_4 \mathcal{V}(\phi) \quad \text{za konstantna polja,} \quad \phi_r(x) = \phi_r$$

gdje je V_4 volumen prostor-vremena po kojem integriramo akciju. Euler-Lagrangeove jednažbe za konstantna polja nam kažu da vakuumi moraju zadovoljavati sustav jednažbi:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi_r} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \quad (2.5.19)$$

Povrh toga vakuumi $\bar{\phi}$ moraju biti globalni minimumi potencijala $\mathcal{V}$. Ukoliko deriviramo jednažbu (2.5.18) po ϕ_ℓ , izvrijednimo je u $\phi = \bar{\phi}$ i potom upotrijebimo (2.5.19), dobijamo

$$\sum_{r,s} M_{\ell r}(\bar{\phi}) t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s = 0 \quad , \quad M_{\ell r}(\bar{\phi}) \equiv \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi_\ell \partial \phi_r} \right|_{\phi=\bar{\phi}} \quad (2.5.20)$$

Pretpostavimo sada da je (proizvoljni) vakuum $\bar{\phi}$ invarijantan na kontinuiranu podgrupu grupe simetrija G , koju ćemo označiti s H , koja ima d_H parametara. Ako organiziramo generatore grupe G tako da prvih d_H pripada podgrupi H , onda vrijedi

$$t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, d_H$$

Iz toga slijedi da se jednažba (2.5.20) svodi na $d_G - d_H$ netrivialnih uvjeta

$$\sum_{r,s} M_{\ell r}(\bar{\phi}) t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s = 0 \quad , \quad a = d_H + 1, \dots, d_G$$

Sad imamo sve matematičke pretpostavke za dokaz Goldstoneovog teorema. Prvo uočite da, pošto je svaki vakuum lokalni minimum potencijala $\mathcal{V}$, simetrična matrica $M_{\ell r}(\bar{\phi})$ mora biti pozitivno semi-definitna što znači da su joj sve svojstvene vrijednosti veće ili jednake nula. Sad uočite da (2.5.20) garantira da barem $d_G - d_H$ svojstvenih vrijednosti iščezava. Na koncu, naravno, na red dolazi fizika. Koje je značenje svojstvenih vrijednosti matrice M ? Iz definicije M , i činjenice da se svaka simetrična matrica može dijagonalizirati ortogonalnom transformacijom, slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice kvadrati masa polja definiranih oko vakuuma $\bar{\phi}$. Time smo dokazali teorem.

2.5.4 Spontani lom kontinuiranih lokalnih simetrija.

U prethodnom odjeljku istaknuli smo da su Goldstoneova polja posljedica spontanog loma globalnih simetrija. Ukoliko su simetrije **lokalne** (što znači da se radi o **baždarnim** teorijama polja), Goldstonov teorem više ne vrijedi i zamjenjuje ga tzv. **Higgsov mehanizam**.¹⁵ Pošto se na ovom kolegiju nećemo baviti baždarnim teorijama polja, uz izuzetak najjednostavnije klase (zasnovane na $U(1) = SO(2)$ grupi lokalnih simetrija) koju nazivamo elektrodinamika, na ovom mjestu ćemo samo informativno opisati Higgsov mehanizam.

¹⁵U literaturi se mogu naći različiti nazivi za ovaj mehanizam: Brout–Englert–Higgs (BEH), Englert–Brout–Higgs–Guralnik–Hagen–Kibble (EBHGHK), Anderson–Higgs (AH), Anderson–Higgs–Kibble (AHK), Higgs–Kibble (HK). Ova proliferacija naziva i imena fizičara koji se spominju je posebno oživjela nakon eksperimentalnog otkrića Higgsovog bozona na CERN-u 2013. godine, jer je bilo jasno da će se za to dodijeliti Nobelova nagrada pa su zemlje i institucije stvarale pritisak da nagradu dobiju njihovi ljudi (Nobelovu nagradu mogu dijeliti najviše tri osobe). Uistinu, odmah iduće godine Nobelovu nagradu su podijelili Peter Higgs i Francois Englert (dobio bi ju i Robert Brout da nije tri godine ranije umro).

Higgsov mehanizam. Ukoliko teorija polja posjeduje lokalnu internu grupu simetrija G , koja je spontano slomljena na podgrupu H , tada će $d_G - d_H$ baždarnih polja biti masivno.

Čitatelj ne treba biti razočaran ako u ovom trenutku ne razumije gornju tvrdnju. Nakon što objasnimo što su to baždarne teorije, vratit ćemo se na ovu temu u odjeljku 4.9 i eksplicitno demonstrirati Higgsov mehanizam na primjeru skalarne elektrodinamike.

Napomene:

1. Goldstoneovi bozoni **ne postoje** u ovom slučaju.
2. Higgsov mehanizam se javlja i u nerelativističkim teorijama.
3. Neke važnije primjene Higgsovog mehanizma:
 - (a) Supravodljivost – razmotrit ćemo je u odjeljku 4.9.1.
 - (b) Generacija masa elementarnih čestica u Standardnom modelu.

No, sada ćemo mogućnost spontanog loma simetrije staviti na stranu i, osim ukoliko eksplicitno ne kažemo drukčije, pretpostavljati da postoji samo jedan vakuum.

2.6 Greenove funkcije

2.6.1 Metoda Greenovih funkcija

Metoda Greenovih funkcija je elegantan način rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Kao primjer, razmotrimo elektromagnetski potencijal koji u Lorenzovom baždarenju zadovoljava jednačbu

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x) \quad (2.6.1)$$

i skalarno polje u prisustvu vanjskog polja $j(x)$ koje zadovoljava jednačbu

$$(\square + m^2)\varphi(x) = j(x) \quad (2.6.2)$$

Vidimo da svaka komponenta u ovim jednačbama u stvari zadovoljava skalarnu jednačbu

$$(\square + m^2)h = j \quad (2.6.3)$$

gdje je j neka zadana funkcija, koja u principu može biti proizvoljna. U slučaju elektrodinamike očito vrijedi $m = 0$.

Ideja je da $(\square + m^2)$ shvatimo kao linearni operator na prostoru funkcija $h(x)$ koje zadovoljavaju neke zadane rubne uvjete (koje ovise o fizici problema). Svojstva ovog operatora garantiraju nam da možemo definirati inverz $(\square + m^2)^{-1}$, ukoliko smo prostor funkcija dovoljno ograničili odabirom rubnih uvjeta. Iz (2.6.3) potom slijedi da opće rješenje jednačbe (2.6.3) možemo napisati kao:

$$h = h_0 + (\square + m^2)^{-1}j = h_0 - G j \quad (2.6.4)$$

gdje je h_0 opće rješenje jednačbe s $j = 0$ i gdje smo definirali **Greenov operator** G koji je za jednačbu (2.6.3) dan s

$$G = -(\square + m^2)^{-1} \quad (2.6.5)$$

U x -bazi Greenov operator je opisan **Greenovom funkcijom** $G(x, y)$ koja zadovoljava

$$(\square_x + m^2)G(x, y) = -\delta^4(x - y) \quad (2.6.6)$$

Iz (2.6.4) i (2.6.6) slijedi da je opće rješenje jednadžbe (2.6.3) dano s

$$h(x) = h_0(x) - \int d^4y G(x, y) j(y) \quad (2.6.7)$$

Ideja Greenove metode je sada očita. Prvo nađete opće rješenje jednažbe s $j = 0$. Potom pronađete Greenovu funkciju rješavanjem (2.6.6) uz specifične rubne uvjete koji vas zanimaju u danom problemu. Tako dobivenu Greenovu funkciju, koju za danu diferencijalnu jednadžbu morate pronaći **samo jednom**, uvrstite u (2.6.7) čime ste problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe sveli na problem integriranja nekih poznatih funkcija.

Napomenimo još jednom da (2.6.6) nema jednoznačno rješenje – jednoznačno rješenje se dobije tek specificiranjem određenih **rubnih uvjeta**. Iako je, čisto matematički gledano, dovoljno naći bilo koju Greenovu funkciju za konstrukciju općeg rješenja jednadžbe, fizikalne situacije obično ističu neke Greenove funkcije kao preferabilne za praktičnu primjenu. U fizikalnim problemima rubni uvjeti su često određeni **kauzalnom strukturom**. U elektrodinamici ste već vidjeli dva takva primjera – retardirane i avansirane potencijale koji su definirani specificiranjem kauzalne strukture (za izolirane izvore izbor retardiranih potencijala znači da polje koje stvaraju neki izvori, tj. raspodjele naboja i struja, nastaje kao posljedica stanja izvora, i obrnuto kod avansiranih potencijala). Retardirane Greenove funkcije ćemo zasebno razmotriti u idućem odjeljku.

Ostaje pitanje kako pronaći odgovarajuću Greenovu funkciju. Struktura jednadžbe (2.6.6) sugerira da je spretno upotrijebiti **Fourierov transformat**, tj. prijeći u k -bazu (što ćemo označavati tildom iznad dane veličine).

$$G(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \tilde{G}(k) \quad , \quad \delta^4(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (2.6.8)$$

Uvrštavanje u (2.6.6), korištenje $\square_x e^{ik \cdot (x-y)} = -k^2 e^{ik \cdot (x-y)}$ i izjednačavanje Fourierovih transformata daje

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (2.6.9)$$

odnosno

$$G(x, y) = G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2} \quad (2.6.10)$$

Pošto smo naizgled dobili jedinstveno rješenje možemo se zapitati gdje je skrivena informacija o rubnim uvjetima u izrazu (2.6.10). Odgovor leži u tome da je podintegralna funkcija singularna na plohi određnoj s $k^2 = m^2$. Način kako tretiramo taj singularitet određuje rubne uvjete. U odjeljku 2.6.2 razmotrit ćemo klasične kauzalne rubne uvjete koji vode na retardiranu Greenovu funkciju, a u odjeljku 3.7.2 demonstrirat ćemo proceduru konstrukcijom Feynmanovog propagatora.

Procedura koju smo demonstrirali na gornjem primjeru se može poopćiti na bilo koju linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$L \cdot h = j \quad (2.6.11)$$

gdje je L neki linearni diferencijalni operator koji djeluje na polja simbolički označena s h (polje h može imati i neke diskretne indekse, tj. gornja relacija može izgledati kao $\sum_s L_{rs} h_s = j_r$, što je važno u analizi polja koja imaju neiščezavajući spin). Definiramo Greenov operator G_L i pripadnu Greenovu funkciju $G_L(x, y)$ pridružene operatoru L kao

$$G_L = -L^{-1} \quad , \quad L_x \cdot G_L(x, y) = -\delta^4(x - y) \quad (2.6.12)$$

Nakon što se pronađe Greenova funkcija (s traženim rubnim uvjetima) opće rješenje (2.6.11) je dano s

$$h(x) = h_0(x) - (G_L \cdot j)(x) = h_0(x) - \int d^4y G_L(x, y) \cdot j(y) \quad (2.6.13)$$

gdje je h_0 opće rješenje jednadžbe s $j = 0$. Napomenimo da je za lokalne linearne diferencijalne operatore, kakav je $(\square + m^2)$, Greenova funkcija uvijek oblika $G_L(x, y) = G_L(x - y)$.

Uočite da je položaj singulariteta u Greenovoj funkciji u p -prostoru određen masom polja m , i da je taj singularitet **pol**. U stvari, ovo svojstvo možemo generalizirati i iskoristiti kao definiciju mase klasičnog polja:

Klasična masa relativističkog polja određena je položajem pola, $p^2 = m^2$, Greenove funkcije polja u p -prostoru. Ukoliko za neko polje postoji više polova s različitim masama, to znači da to polje posjeduje modove koji imaju različite mase.

Primjer 2.6.1: Coulombov zakon. Pronađite rješenje u elektrodinamici koje opisuje polje statičnog točkastog naboja q koji se nalazi u ishodištu $\mathbf{x} = 0$.

Rješenje: Za točkasti naboj u ishodištu u (2.6.1) trebamo uvrstiti $j^0 \equiv \rho = q \delta^3(\mathbf{x})$ i također $\mathbf{j} = 0$. Možemo odmah zaključiti da je $\mathbf{A} = 0$ i $\dot{A}^0 = 0$, pa preostaje samo riješiti jednadžbu

$$\nabla^2 A^0 = -q \delta^3(\mathbf{x}) \quad (2.6.14)$$

U stvari, rješavanje ovog problema odgovara rješavanju jednadžbe za Greenovu funkciju operatora $-\nabla^2$. Po analogiji s gornjim slučajem lako je zaključiti da je rješenje dano s

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{x}) &= q \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} \\ &= \frac{q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{-ikr \cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{q}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} \\ &= \frac{q}{8\pi^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k} \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

gdje smo u varijabli integracije $\mathbf{k}$ prešli na polarni sustav koordinata takav da je os određena radij-vektorom $\mathbf{x}$ upotrijebljena kao z -os. Gornji integral ćemo izvršiti tako da proširimo definiciju varijable k na kompleksnu ravninu i tretiramo integral kao krivuljni integral koji ide po realnoj osi. Pošto je podintegralna funkcija regularna na cijeloj osi integracije, uključujući i $k = 0$, možemo slobodno pomaknuti za infinitezimalni imaginarni iznos integracijsku krivulju i tako je malo podići s realne osi (ili spustiti, svejedno), što je ekvivalentno supstituciji $k \rightarrow k + i\epsilon$ u nazivniku podintegralne funkcije. Potom možemo izračunati integral koristeći standardne tehnike integracije u kompleksnoj ravnini tako da zatvorimo konturu polukružnicom u beskonačnosti (s tim da za član s e^{ikr} konturu moramo zatvoriti odozgo, a za član s e^{-ikr} odozdo) i onda na integral po dobijenoj konturi (tj. zatvorenoj petlji) primijenimo teorem o reziduumima. Rezultat ove procedure daje za dva integrala

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{ikr}}{k + i\epsilon} = 0 \quad , \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{-ikr}}{k + i\epsilon} = -2\pi i \quad (2.6.16)$$

što uvršteno gore daje konačan rezultat

$$A^0(r) = \frac{q}{4\pi r} \quad (2.6.17)$$

koji nije ništa drugo doli dobro znani Coulombov zakon. Treba obratiti pažnju da u ovom kolegiju koristimo Heaviside-Lorentz sustav definicije elektromagnetskih veličina (što je vidljivo i iz (2.6.1)) u kojem je $\epsilon_0 = 1$.

Zadatak 2.6.1: *Yukawa potencijal.* Razmotrite skalarno polje koje zadovoljava jednadžbu (2.6.2) u prisustvu statičnog točkastog izvora u ishodištu, $j(r) = q \delta^3(\mathbf{x})$. Koristeći metodu Greenovih funkcija pokažite da je rješenje dano s:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi r} e^{-mr} \quad (2.6.18)$$

Ovaj oblik polja se naziva **Yukawa potencijal**. Vidimo da, za razliku od bezmasenog polja, sada više nemamo Coulombovsko opadanje $\sim 1/r$ polja na velikim udaljenostima od izvora, nego eksponencijalno, što znači da međudjelovanje ima **konačan doseg** određen Comptonovom valnom duljinom skalarnog polja, $d \sim 1/m = \lambda_c$.

2.6.2 Retardirane Greenove funkcije

Kao što smo spomenuli, princip kauzalnosti ističe jednu klasu Greenovih funkcija koje se nazivaju **retardirane**. Logika je sljedeća. Pretpostavite da je polje $h(x)$ koje računate u cijelosti posljedica djelovanja izvora $j(x)$, tj. da je izvor ostao isključen imali bi $h = 0$. Pitanje je: Koja je Greenova funkcija ona koja u potpunosti generira polje, tj. ona za koju je u ovom problemu $h_0 = 0$? Odgovor nam daje princip kauzalnosti: reakcija slijedi nakon akcije – promjena vrijednosti izvora u nekom trenutku t_0 može stvoriti posljedicu na polje samo u trenucima $t > t_0$. Iz oblika formule (2.6.13) slijedi da retardirana Greenova funkcija mora zadovoljavati sljedeći rubni uvjet:

$$G(x, y) = 0 \quad \text{za} \quad x^0 < y^0 \quad (2.6.19)$$

Kao primjer izračunat ćemo retardiranu Greenovu funkciju za operator $L = \square + m^2$. Već smo vidjeli da se Greenova funkcija u ovom slučaju može napisati na način

$$G(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x - y)}}{p^2 - m^2} \quad (2.6.20)$$

Kao što smo već napomenuli, odabir partikularne Greenove funkcije se svodi na to kako definiramo integraciju preko singulariteta koji se nalaze u $p_\pm^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm \omega_{\mathbf{p}}$. U ovom slučaju, odabir mora biti takav tako da zadovoljimo (2.6.19).

U tu svrhu vrlo je spretno napraviti produljenje u prostor kompleksnih brojeva i potom koristiti moćne teoreme iz kompleksne analize, kao što je teorem o reziduumima. Stoga pretpostavimo da je varijabla p^0 definirana u kompleksnoj ravnini (i označavat ćemo ju s $\tilde{p}^0$), pa integraciju po p^0 u (2.6.20) tretiramo kao integraciju po krivulji u kompleksnoj ravnini. Uočite da

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(\tilde{p}_0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = \frac{1}{(\tilde{p}^0 - p_+^0)} \frac{1}{(\tilde{p}^0 - p_-^0)}$$

iz čega slijedi da su singulariteti $p_\pm^0$ jednostavni polovi podintegralne funkcije iz (2.6.20). Odabir tretiranja singulariteta na putu krivulje integracije se u praksi najčešće svodi ili na infinitezimalno zaobilazanje singulariteta ili na glavnu vrijednost. Pretpostavit ćemo da se singulariteti moraju zaobilaziti, a onda a posteriori vidjeti da je to bio dobar odabir.

Razmotrimo sada integraciju u (2.6.20) i fokusirajmo se na integraciju po $\tilde{p}^0$. Da bi koristili teorem o reziduumima moramo nekako dobiti integraciju po konturi, tj. po petlji. Tu koristimo standardni trik po kojem možemo konturu zatvoriti polukružnicom beskonačnog radijusa. Pitanje je samo da li ju moramo zatvoriti odozgo (u gornjem dijelu kompleksne ravnine) ili odozdo (u donjem dijelu kompleksne ravnine). Prisustvo eksponencijalnog faktora u podintegralnoj funkciji nameće za $(x^0 - y^0) > 0$ zatvaranje polukružnicom odozdo, a za $(x^0 - y^0) < 0$ odozgo. Svaki drukčiji odabir bi učinio integraciju po polukružnici beskonačnom i teorem neupotrebljiv. Ovaj odabir ujedno čini da doprinos integraciji po konturi koji dolazi od polukružnica iščezava, pa je integral po konturi jednak integralu po realnoj osi. Sad dolazi pitanje: s koje strane zaobići singularitete $p_\pm^0$? Očito je da postoje 4 mogućnosti. Odgovor leži u zahtjevu (2.6.19): kontura integracija za slučaj $(x^0 - y^0) < 0$ ne smije obuhvaćati nikakve polove jer onda teorem



Slika 2.3: Kontura integracije koja daje retardiranu Greenovu funkciju. $E_p \equiv \omega_p$.

o reziduumima garantira da će integral po konturi iščezavati. To znači da krivulja integracije mora proći iznad polova, kao što je prikazano na slici 2.3.

Ekvivalentan način za izraziti pomicanje konture prema gore je pomaknuti polove infinitezimalno u suprotnom smjeru, tj. dodati im infinitezimalnu negativnu imaginarnu vrijednost. To pak možemo napisati kao:

$$G(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + ip^0 \epsilon}$$

Prednost ovog izraza je da je p^0 ponovo realan na konturi integracije. Sad možemo upotrijebiti teorem o reziduumima na integraciju po p^0 i rezultat je

$$D_R(x-y) = -i \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right), \quad p^0 = \omega_p \quad (2.6.21)$$

gdje je $\theta(t)$ step funkcija definirana s $\theta(t) = 1$ za $t > 0$ i $\theta(t) = 0$ za $t < 0$. U računu smo koristili da su rezidumi polova podintegralne funkcije

$$f(\tilde{p}^0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\tilde{p}^0 \cdot (x^0 - y^0)}}{p^2 - m^2 + ip^0 \epsilon} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\tilde{p}^0 \cdot (x^0 - y^0)}}{(\tilde{p}^0 - \omega_p + i\epsilon)(\tilde{p}^0 + \omega_p + i\epsilon)}$$

nakon uzimanja limesa $\epsilon \rightarrow 0$ dani s:

$$\text{Res}_{\pm \omega_p} f = \frac{1}{(2\pi) 2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p \cdot (x-y)} - e^{i\omega_p \cdot (x-y)} \right)$$

Sumnjičavi čitatelj može lako provjeriti da (2.6.21) zadovoljava definicionu relaciju za Greenovu funkciju (2.6.6). Zadovoljenje retardiranog rubnog uvjeta (2.6.19) garantira step funkcija θ .

2.7 Feynmanovi dijagrami

Što ako je jednačba gibanja nelinearna? U tom je slučaju konstrukcija egzaktne rješenja koja su relevantna za realne probleme najčešće prezahtijevan zadatak pa se moramo okrenuti ili numeričkim ili perturbativnim tehnikama.

Kao primjer na kojem ćemo demonstrirati perturbativni razvoj i tehniku Feynmanovih dijagrama, razmotrimo jednačbu

$$\square h - \lambda h^2 = j \quad (2.7.1)$$

gdje je λ neki parametar ("konstanta vezanja"). Iako jednačba izgleda prilično nevino, zbog postojanja homogenog člana egzaktne rješenja su nepoznata.

Ukoliko je λ dovoljno malen (a pogotovo ako je $|\lambda| \ll 1$), možemo primijeniti račun smetnje i potražiti rješenje u obliku perturbativnog razvoja

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n h^{(n)}(x) \quad (2.7.2)$$

Ako uvrstimo (2.7.2) u (2.7.1) i grupiramo članove s jednakim faktorom λ^n dobijamo

$$\square h^{(0)} - j + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\square h^{(n)} - \sum_{m=0}^{n-1} h^{(m)} h^{(n-m-1)} \right) = 0 \quad (2.7.3)$$

Pošto je λ proizvoljan, jednakost može biti zadovoljena samo ako ukupni koeficijent ispred λ^n za svaki $n \geq 0$ iščezava. Vidimo da smo dobili iterativnu proceduru kojom možemo redom izraziti svaku funkciju $h^{(n)}(x)$ pomoću funkcija nižeg reda.

Raspišimo detaljno račun za dva najniža člana. U najnižem redu ($n = 0$) dobijamo jednačbu za $h^{(0)}(x)$

$$\square h^{(0)} = j \quad (2.7.4)$$

koju smo naučili rješavati Greenovom metodom u prethodnom odjeljku

$$h^{(0)}(x) = h_0(x) - \int d^4 y G(x, y) j(y) \quad (2.7.5)$$

gdje je $G(x, y)$ dan u (2.6.10), a h_0 je rješenje jednačbe (2.7.4) s $j = 0$. Radi jednostavnosti razmotrimo slučaj u kojem je $h_0(x) = 0$, što znači da je

$$h^{(0)}(x) = - \int d^4 y G(x, y) j(y) \quad (2.7.6)$$

U prvom redu računa smetnje dobijamo jednačbu za $h^{(1)}(x)$

$$\square h^{(1)} = h^{(0)2} \quad (2.7.7)$$

Ova jednačba ima isti oblik kao (0tired), samo što sada $(h^{(0)}(x))^2$ igra ulogu izvora. Rješavanjem jednačbe pomoću Greenove funkcije i korištenjem rješenja iz prethodnog koraka (2.7.6) dobijamo

$$\begin{aligned} h^{(1)}(x) &= - \int d^4 y G(x, y) (h^{(0)}(y))^2 \\ &= - \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \int d^4 y_3 G(x, y_1) G(y_1, y_2) G(y_1, y_3) j(y_2) j(y_3) \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Proceduru možemo nastaviti dalje. Iz (2.7.3) slijedi da je n -ti red dan s

$$\square h^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} h^{(m)} h^{(n-m-1)}, \quad n \geq 1 \quad (2.7.9)$$

gdje se s lijeve strane nalaze funkcije $h^{(m)}$ s $m < n$, koje su izračunate u nižem redu računa smetnje pa dobijamo konzistentnu iterativnu proceduru.

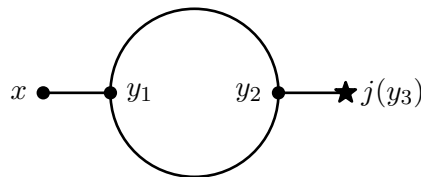
Analiziranjem (2.7.3) dolazi se do elegantne metode perturbativnog računanja rješenja zasnovane na grafičkoj reprezentaciji članova u perturbativnom razvoju pomoću **Feynmanovih dijagrama**, koja se naziva (klasični) **Feynmanov račun**. Za nulti i prvi red Feynmanovi dijagrami su

$$h(x) = x \bullet \text{---} \star j(y) + x \bullet \text{---} \bullet y_1 \begin{array}{l} \nearrow \star j(y_3) \\ \searrow \star j(y_2) \end{array} + O(\lambda^2) \quad (2.7.10)$$

Uz ove dijagrame ide pripadni skup **Feynmanovih pravila** s kojima u tandemu daju recept za računanje perturbativnog razvoja (2.7.2) za rješenje nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe (2.7.1):

1. Nacrtaj točku x i liniju do nove točke y_1 .
2. Ili završi liniju sa zvjezdicom na izvoru $j(y_1)$ ili u y_1 napravi čvor tako što dopustiš grananje u dvije nove linije koje završavaju na dvije nove točke y_2 i y_3 .
3. Nastavi ponavljati prethodni korak. U slučaju kad sve linije završe na zvjezdicama time je završena konstrukcija jednog Feynmanovog dijagrama. Crtaj jedan do drugog sve Feynmanove dijagrame tako da ih organiziraš po broju čvorova. Za svaki nedovršeni Feynmanov dijagram nastavi proceduru tako što se vratiš u točku (2). Ukoliko te zanima perturbativni razvoj do reda n , zaustavi se čim nacrtáš sve Feynmanove dijagrame koji imaju najviše n čvorova.
4. Perturbativni rezultat za $h(x)$ do željenog reda n se dobije sumiranjem doprinosa svih nacrtanih Feynmanovih dijagrama. Doprinos pojedinog Feynmanovog dijagrama se dobije tako da svaki čvor doprinosi faktor λ , svaka zvjezdica locirana u y_j faktor $j(y_j)$, dok svaka linija faktor $(-G(w, z))$, gdje su w i z rubne točke linije, te se na koncu integrira po svim točkama i čvorovima (osim točke x), $\int d^4 y_j$.

Ovo je primjer Feynmanovog računa za **klasičnu** teoriju polja. Može se lako zaključiti da su svi Feynmanovi dijagrami u klasičnoj teoriji **drvasti**, tj. dopušteno je grananje ali ne i stvaranje petlji.¹⁶ Kao što ćemo kasnije vidjeti, Feynmanov račun za **kvantnu** teoriju polja se razlikuje upravo po tome da Feynmanovi dijagrami dopuštaju i petlje. Npr. u drugom redu računa smetnje u kvantiziranoj varijanti teorije (2.7.1) mora se uzeti u obzir i dijagram



za koji kažemo da posjeduje jednu (nezavisnu) petlju.

¹⁶Matematičari nazivaju ovakve dijagrame **stabla**.

Poglavlje 3

Osnove kvantne teorije polja

U ovom poglavlju razmotrit ćemo neka glavna svojstva kvantnih teorija polja. Da bi izbjegli situaciju da se od drveta ne vidi šuma, radi preglednosti kao pokazni primjer koristit ćemo teoriju s jednim skalarnim poljem. U idućem poglavlju ćemo razmotriti pitanje spina i objasniti kako se rezultati dobijeni u ovom poglavlju generaliziraju na teorije s više polja koja mogu imati neiščezavajući spin.

3.1 Kanonska kvantizacija

Iz nerelativističke kvantne mehanike znamo da se prelazak s klasične na kvantnu mehaniku postiže tako da se fizikalne veličine poput kanonskih varijabli, tj. koordinate $q = \{q_j\}$ i pridruženi impulsi $p = \{p_j\}$, proglašaju hermitskim operatorima koji djeluju na Hilbertov prostor stanja. Prijelaz s klasične na kvantnu fiziku se može postići uspostavom sljedeće korespondencije između Poissonovih zagrada i komutatora

$$\{ \quad , \quad \}_P \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} [\quad , \quad] \quad (\text{bozoni}) \quad (3.1.1)$$

gdje je $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ oznaka za komutator dva operatora.¹ Ovaj način kvantiziranja klasične teorije naziva se **kanonska kvantizacija**.

Kanonska kvantizacija se može primijeniti i na teorije polja u kojima su kanonske varijable polja $\phi_r(x)$ i pridruženi kanonski impulsi $\pi_r(x)$ koji nakon kvantizacije postaju **operatorske distribucije**.² Primjena korespondencije (3.1.1) na kanonske Poissonove zgrade (2.4.3) daje nam **(istovremenske) kanonske komutacijske relacije**

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{rs} \quad , \quad [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad , \quad [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (3.1.2)$$

iz kojih možemo dobiti komutatore između bilo koja dva funkcionala kanonskih varijabli (definiranih u istom trenutku u vremenu) primjenom svojstava linearnosti i asocijativnosti koja zadovoljavaju komutatori.³

Par napomena vezanih uz kanonsku kvantizaciju:

1. Gornje relacije vrijede za bozonska polja. Vidjet ćemo da za fermionska polja treba zamijeniti komutatore antikomutatorima.

¹Kad god bude postojala opasnost da se pomiješaju operatori i obični brojevi odnosno funkcije (npr. svojstvene vrijednosti operatora) operatori će biti označeni obrnutom kvačicom (ˆ) iznad simbola. No, u najvećem dijelu daljnjeg teksta razlika će biti očita i u tim situacijama nećemo pisati kvačicu.

²Operatorska distribucija $\phi(x)$ je veličina koja daje regularni operator nakon što se prointegrira s “glatkom” testnom funkcijom, $\int d^4x f(x) \phi(x)$. Za testnu funkciju podrazumijeva se da je kvadratno integrabilna, tj. $\int d^4x |f(x)|^2 < \infty$.

³Poissonova zgrada i komutator imaju sljedeća zajednička algebarska svojstva: antisimetričnost, linearnost i Jacobijev identitet. Bez ove sličnosti kanonska kvantizacija ne bi bila konzistentna.

2. “Tehnički” detalji koji mogu dovesti do problema ako ih se ne tretira ispravno:

- (a) *Pitanje uređenja produkata*: pošto generalizirane koordinate ne komutiraju s impulsima nije svejedno u kojem poretku se napišu varijable u produktima. “Ispravan” poredak se dobije koristeći fizikalne argumente.
- (b) *Produkti operatora u istoj točki prostor-vremena*: Vidjeli smo da se u nekim važnim fizikalnim veličinama, poput energije, pojavljuju produkti polja u istoj točki prostor-vremena. Pošto su polja operatorske distribucije takav produkt često nije matematički smislen (kao što nije matematički smislen produkt Diracove delta funkcije sa samom sobom, $(\delta(x))^2$). Vidjet ćemo da takvi produkti dobivaju značenje kroz postupak **regularizacije**.

3. Može se dogoditi da sustav jednažbi (2.4.1) koji definira kanonske impulse nije invertibilan, tj. ne možemo izraziti sve $\dot{\phi}$ pomoću ϕ i π . U tom slučaju postoje **veze** (eng. constraints) koje možemo zapisati kao skup jednažbi $\chi_a(\phi, \pi) = 0$. Problem se sastoji u tome da Poissonove zagrade neće zadovoljavati

$$\{\chi_a(\phi, \pi), F\}_P \neq 0$$

za neke regularne operatore F , S druge strane, iz definicije komutatora jasno slijedi da mora vrijediti

$$[\chi_a(\phi, \pi), F] = 0$$

jer množenje nulom daje nulu. Očito je da u ovom slučaju korespondencija (3.1.1) ne funkcionira! Ovdje ćemo samo napomenuti da postoji dobro definirana procedura kojom se kvantiziraju teorije s vezama, koje uključuju definiranje nove vrste zagrada zvane Diracove zagrade (za tzv. veze druge vrste) i kvantizacija baždarnih teorija (za tzv. veze prve vrste). Elektrodinamika je važan primjer teorije u kojoj postoje veze i prve i druge vrste.

4. U kanonskoj kvantizaciji prostor i vrijeme očito igraju različite uloge i stoga ta procedura razbija **manifestnu** Lorentz kovarijantnost. To je najlakše vidjeti u činjenici da su kanonske komutacijske relacije definirane u istom trenutku vremena, a znamo da istovremenost nije invarijantna kategorija u specijalnoj relativnosti, tj. različita je za različite inercijalne promatrače. Postoje druge vrste kvantizacije čija prednost je da manifestno poštuju Lorentz kovarijantnost, npr. kvantizacija pomoću **integracija po putanjama** (eng. **path integral**).

Napomenimo ovdje da prilikom kvantizacije nije ideja dogmatski slijediti neki propisani skup recepata – ideja je na koncu dobiti dobro definiranu i konzistentnu kvantnu teoriju koja po mogućnosti poštuje sve simetrije koje mislimo da bi trebale postojati. Ako je u tom postupku potrebno malo korigirati recept, to nije nešto što bi nas trebalo posebno uzrujati. Pri tome treba imati u vidu da nemaju sve klasične teorije dobro definiranu kvantnu varijantu, te da u onima koje imaju može se dogoditi da neko svojstvo (poput simetrije) prisutno u klasičnoj teoriji ne preživi kvantizaciju (zbog postojanja **kvantnih anomalija**).

3.2 Kvantizacija slobodnog realnog skalarnog polja

3.2.1 Operatori stvaranja i poništenja

Već prije smo razmotrili jednostavnu klasu relativističkih teorija koje su opisane jednim realnim poljem $\varphi(x)$ s lagranžijanom oblika

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi) \quad (3.2.1)$$

Realne varijable nakon kvantiziranja postaju hermitski operatori, što znači da vrijedi

$$\varphi^\dagger(x) = \varphi(x) \quad (3.2.2)$$

gdje simbol $\dagger$ označava hermitsku konjugaciju.

Podijelimo sada gornji lagranžijan na dva dijela, jedan koji se sastoji od prva dva člana u (3.2.1)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (3.2.3)$$

i koji ćemo zvati lagranžijan **slobodnog** realnog skalarnog polja (ili **slobodni dio lagranžijana**), i drugi

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi)$$

koji ćemo zvati **interakcijski** član (ili **interakcijski dio lagranžijana**). Razlog za ova imena će ubrzo postati jasan. U ovom odjeljku pretpostavit ćemo da je $\mathcal{L}_{\text{int}} = 0$ što znači da je $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ i da je jednažba gibanja koju polje zadovoljava dana s

$$\square\varphi + m^2\varphi = 0 \quad (3.2.4)$$

Polje φ , koje zadovoljava jednažbu (3.2.4) koja slijedi iz lagranžijana $\mathcal{L}_0$, nazivamo **slobodno** realno skalarno polje. Gornja jednažba je upravo Klein-Gordonova jednažba (ili relativistička Schrödingerova jednažba) s kojom smo se već susreli.

Jednažbu (3.2.4) riješit ćemo primjenom Fourierovog transformata

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) \quad (3.2.5)$$

gdje uvjet realnosti (3.2.2) nameće

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t)^\dagger = \tilde{\varphi}(-\mathbf{p}, t) \quad (3.2.6)$$

Uvrštavanje (3.2.5) u parcijalnu diferencijalnu jednažbu (3.2.4) vodi na običnu diferencijalnu jednažbu po t

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\mathbf{p}^2 + m^2) \right] \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (3.2.7)$$

Vidimo da smo za svaki mod $\mathbf{p}$ dobili jednu jednažbu koja ima isti oblik kao jednažba koja se dobije u analiziranju običnog jednodimenzionalnog harmoničkog oscilatora, $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, frekvencije

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Cijeli sustav možemo promatrati kao skup nezavisnih harmoničkih oscilatora (po jedan za svaki $\mathbf{p}$). Stvar je u tome da mi znamo kvantizirati obični harmonički oscilator. Rješavanje jednažbe (3.2.7), uz korištenje uvjeta (3.2.6), daje za rješenje

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} \right) \quad (3.2.8)$$

gdje su $a_{\mathbf{p}}$ neki operatori (u stvari operatorske distribucije).

Za potpuni opis ovog sustava dovoljno je poznavanje komutacijskih relacija u skupu operatora $a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}$. Ove komutatore se može dobiti iz kanonskih komutacijskih relacija za $\varphi(x)$ i $\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$, što je podulji račun. Ovdje možemo uštediti nešto vremena tako da upotrijebimo analogiju s kvantiziranim harmoničkim oscilatorom, koja nas vodi na pretpostavku da $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ i $a_{\mathbf{p}}$ igraju ulogu operatora stvaranja i poništavanja, i pretpostavimo sljedeće komutacijske relacije⁴

⁴U kvantnoj mehanici operatori stvaranja i poništavanja koji pripadaju sustavu nezavisnih harmoničkih oscilatora zadovoljavaju komutator $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}$. Pošto su u slučaju polja operatori stvaranja i poništavanja označeni kontinuiranom varijablom $\mathbf{p}$, prirodno je očekivati da se umjesto Kroneckerovog simbola δ_{jk} nalazi nešto proporcionalno 3-dimenzionalnoj Diracovoj delta-funkciji $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Faktor $(2\pi)^3$ u (3.2.9) se fiksira zadovoljavanjem kanonskih komutacijskih relacija, što je pokazano u daljnjem tekstu.

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad , \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = 0 \quad , \quad [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0 \quad (3.2.9)$$

Lako se provjeri da je hipoteza (3.2.9), bazirana na analogiji s harmoničkim oscilatorom, konzistentna s kanonskom kvantizacijom. Uvrštavanje (3.2.8) u (3.2.5) daje

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} \right)$$

Pokazuje se spretnim u drugom članu napraviti supstituciju varijable integracije $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, što daje manifestno Lorentz-kovarijantan izraz

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \quad , \quad p^0 = \omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (3.2.10)$$

Ovaj način Fourierovog raspisa prirodno se generalizira na slobodna relativistička polja koja nose spin. Kanonski impuls pridružen polju φ je onda

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \quad (3.2.11)$$

Koristeći komutatore (3.2.9) nije teško pokazati da φ i π , dani u (3.2.10) i (3.2.11), zadovoljavaju kanonske komutacijske relacije (3.1.2), što znači da smo ispravno proveli proces kanonske kvantizacije.

Zadatak 3.2.1: Pokažite da iz (3.2.9)-(3.2.11) slijedi da su kanonske komutacijske relacije (3.1.2) zadovoljene.

Rješenje: Izračunajmo prvo komutator

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}'}}} \left([a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] e^{i(p'\cdot y - p\cdot x)} - [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] e^{i(p\cdot x - p'\cdot y)} \right) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Rezultat se slaže s (3.1.2). Vidimo da su komutatori između operatora stvaranja i poništenja ispravno normalizirani, jer da s desne strane u komutatoru (3.2.9) postoji neki dodatni faktor C , on bi se pojavio kao faktor s desne strane gornjeg rezultata. Na taj način zaključujemo da mora biti $C = 1$, kao što smo unaprijed i pretpostavili.

Na sličan način lako se pokažu preostala dva komutatora iz (3.1.2), tj.

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]$$

To prepuštamo čitatelju za vježbu.

Zadatak 3.2.2: Koristeći (3.2.10) i (3.2.11) pokažite da vrijedi

$$a_{\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{x} e^{ip\cdot x} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \varphi(x) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \pi(x) \right] \quad (3.2.12)$$

3.2.2 Energija i impuls kvantiziranog slobodnog realnog skalarnog polja

Da bi dobili operator energije (tj. hamiltonijan) izražen pomoću operatora stvaranja i poništenja trebamo uvrstiti (3.2.10) u izraz za hamiltonijan (2.3.25) ($\mathcal{V}_{\text{int}} = 0$ za slobodno polje). Dobijamo

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + E_0 \quad (3.2.13)$$

gdje je E_0 konstantni broj dan s

$$E_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \delta^3(0) \int d^3\mathbf{p} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} \quad (3.2.14)$$

U svim međudjelovanjima, osim gravitacijskog kojeg zanemarujemo u ovom kolegiju, mjerljive su samo razlike energija što znači da konstantni doprinos E_0 možemo zanemariti, tj. po želji ga postaviti na bilo koju vrijednost. Odabir $E_0 = 0$ će se pokazati najspretnijim. Poslije ćemo se vratiti na ovo pitanje i komentirati izraz za E_0 i njegovu (ne)važnost za gravitaciju.

Za operator impulsa trebamo uvrstiti (3.2.10) u (2.3.26). Rezultat je

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (3.2.15)$$

Zadatak 3.2.3: Izvedite (3.2.13) i (3.2.15).

Pokažimo (3.2.15). Impuls za slobodno realno skalarno polje je dan u (2.3.26). Vidimo da nam treba

$$\nabla\varphi(x) = i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.2.16)$$

Uvrštavanje toga i (3.2.10) u (3.2.11) daje

$$\mathbf{P} = \frac{i(-i)}{2} \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}'}}} \mathbf{p}' \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \left(a_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot x} - a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{ip' \cdot x} \right)$$

Sad mijenjamo redoslijed integracije i prvo integriramo po $\mathbf{x}$. Korištenjem

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(p-p') \cdot x} &= e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(p+p') \cdot x} &= e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = e^{\pm 2i\omega_{\mathbf{p}}t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \end{aligned}$$

i trivijalnim integriranjem po $\mathbf{p}'$ uz primjenu standardnih svojstava Diracove delta funkcije dobijamo

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

U izvodu smo također koristili očite jednakosti

$$\int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger = 0 \quad , \quad \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \delta^3(0) \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} = 0$$

koje slijede iz jednostavne opservacije da su podintegralne funkcije u svim izrazima neparne na $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, dok su granice integracije parne ($\pm\infty$ za svaku koordinatu p^j).

Dokaz (3.2.13) ostavljamo za vježbu.

3.2.3 Fockov prostor stanja i čestična interpretacija

Za okončanje procesa kvantizacije moramo konstruirati pripadni prostor stanja teorije (tzv. **Hilbertov prostor stanja**) na koji djeluju operatori koje smo upravo konstruirali. Pošto smo vidjeli da svaki mod $\mathbf{p}$ daje nezavisni harmonički oscilator, logično je i dovršiti priču slijedeći postupak konstrukcije prostora stanja običnog harmoničkog oscilatora koji ste naučili na kursu iz kvantne mehanike. Na koncu treba samo provjeriti da li je konstruirana teorija u cjelini smisljena i da li poštuje sve simetrije za koje se očekuje da trebaju postojati.

Postupak je sljedeći. Prvo definiramo stanje $|0\rangle$ koje ćemo nazvati **vakuum** (ubrzo će se vidjeti zašto taj naziv) kao stanje koje poništavaju **svi** operatori poništenja

$$N = 0 : \quad a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{p} \quad (3.2.17)$$

Time smo definirali nulti nivo. Možemo odmah izračunati energiju i impuls vakuuma djelujući operatorom hamiltonijana (3.2.13) i impulsa (3.2.15) koristeći (3.2.17)

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{P}}|0\rangle = 0 \quad \implies \quad E(0) = 0 \quad , \quad \mathbf{P}(0) = 0 \quad (3.2.18)$$

Vidimo da je vakuum svojstveno stanje energije svojstvene vrijednosti $E(0) = E_0$, s tim da smo odabrali postaviti $E_0 = 0$ (što možemo uraditi sve dok nas ne zanimaju učinci gravitacije), i svojstvene vrijednosti impulsa $\mathbf{P}(0) = 0$.

Koristeći vakuum definiramo bazu u prostoru stanja tako što djelujemo konačnim brojem operatora stvaranja, gdje na nivou $N = n$ djeluje n operatora stvaranja. Na prvom nivou vektori baze se definiraju kao

$$N = 1 : \quad |\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad (3.2.19)$$

Primjenom komutacijskih relacija operatora stvaranja i poništenja lako se pokaže da su ova stanja svojstvena stanja energije i impulsa sa svojstvenim vrijednostima $E(\mathbf{p})$ i $\mathbf{P}(\mathbf{p})$

$$\hat{H}|\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle \quad , \quad \hat{\mathbf{P}}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \quad \implies \quad E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad , \quad \mathbf{P}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad (3.2.20)$$

Ovu proceduru ponavljamo neograničeni broj puta. U n -tom koraku dobit ćemo vektore baze na nivou $N = n$ množenjem vakuuma s n operatora stvaranja, tj.

$$N = n : \quad |\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2; \dots; \mathbf{p}_n\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_j}} a_{\mathbf{p}_j}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (3.2.21)$$

Na ovom mjestu spretno je definirati **operator broja čestica** (objašnjenje naziva uskoro slijedi)

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} \quad , \quad N_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}$$

Uočite da vrijedi

$$[N_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^{\dagger} \quad , \quad [N_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}$$

Korištenjem ovih komutatora lako se pokaže da su stanja (3.2.21) svojstvena stanja svakog operatora koji možemo napisati u obliku

$$\hat{O} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}) N_{\mathbf{p}}$$

gdje je f proizvoljna funkcija, a svojstvene vrijednosti su dane s

$$O(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n f(\mathbf{p}_j)$$

Pošto se operatori energije i impulsa mogu napisati kao:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} \quad , \quad \hat{\mathbf{P}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} N_{\mathbf{p}}$$

slijedi da su stanja (3.2.21) svojstvena stanja operatora $\hat{N}$, $\hat{H}$ i $\hat{\mathbf{P}}$ sa svojstvenim vrijednostima danim s, redom (nakon odbacivanja aditivne konstante E_0 u energiji)

$$N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = n \quad , \quad E(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m^2} \quad , \quad \mathbf{P}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j$$

Opći vektor stanja može se napisati kao linearna superpozicija vektora baze, tj.

$$|\alpha\rangle = \tilde{f}_{\alpha}^{(0)}|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}}} \cdots \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_n}}} \tilde{f}_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{p}_n\rangle \quad (3.2.22)$$

gdje su koeficijenti u razvoju $\tilde{f}_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ **valne funkcije** u p -prostoru na nivou n koje poprimaju vrijednosti u prostoru kompleksnih brojeva (kako je to uobičajeno za valne funkcije u kvantnoj mehanici).

Ovakav prostor stanja čija baza je konstruirana množenjem vakuuma konačnim (ali neograničenim) brojem operatora stvaranja naziva se **Fockov prostor**. Ono što još nedostaje je fizikalna interpretacija konstruiranog Fockovog prostora, koja bi trebala biti očita iz činjenice da je svaki kvant kreiran s $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ karakteriziran **samo** impulsom iznosa $\mathbf{p}$ koji nosi energiju danu Einsteinovim relativističkim izrazom

$$E(\mathbf{p}) = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Pošto su ovo karakteristike točkaste čestice (tj. čestice bez ikakve unutarnje strukture koja bi zahtijevala dodatne varijable u opisu) i bez spina, dolazimo do sljedeće interpretacije:

Fockov prostor stanja kvantiziranog slobodnog realnog skalarnog polja opisuje sustav koji se može sastojati od neograničenog broja slobodnih nerazpoznatljivih relativističkih bezmasenih čestica mase m i spina 0. Čestica koja izgrađuje ovaj prostor stanja zadovoljava Bose-Einsteinovu statistiku i stoga spada u **bozone**.

Napomene:

1. Stanje $|0\rangle$ koje ne sadrži nijednu česticu ima najnižu energiju (koju smo “rukom” postavili na nulu) i stoga ćemo ga zvati **vakuum**.
2. Nerazpoznatljivost čestica i Bose-Einsteinova statistika direktno slijede iz komutiranja operatora stvaranja jer su stanja (3.2.21) invarijantna na zamjenu dviju čestica. Npr.

$$|\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger} |0\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_2}} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} |0\rangle = |\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1\rangle$$

Iz toga automatski slijedi da su valne funkcije $\tilde{f}_{\alpha}^{(n)}$, definirane u (3.2.22), simetrične na zamjenu mjesta parova čestica,

$$\tilde{f}_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_k, \dots, \mathbf{p}_n) = \tilde{f}_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n)$$

što je definicija **Bose-Einsteinove statistike**.

3. Neograničenost broja čestica je nužna da bi polje $\varphi(x)$ bilo dobro definirano na čitavom prostoru stanja. Kad operatorom $\varphi(x)$ djelujemo na stanje s n čestica, dobijamo linearnu kombinaciju dva stanja od kojih jedno sadrži $(n - 1)$ a drugo $(n + 1)$ česticu, pa vidimo da polje ne možemo definirati niti na prostoru s fiksnim brojem čestica niti s ograničenim brojem čestica ($n \leq n_{\max}$).

3.2.4 Valna funkcija u p-reprezentaciji

Razmotrimo malo detaljnije p -bazu (3.2.21) i pridružene valne funkcije u razvoju stanja u Fockovom prostoru po ovoj bazi (3.2.22). Normalizacijske relacije za ove vektore se dobiju primjenom komutacijskih relacija operatora stvaranja i poništavanja i normalizacijom vakuuma za koju uzimamo da je

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

Kao primjer, razmotrimo 1-čestična stanja:

$$\langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \langle 0|a_{\mathbf{p}'}a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} \langle 0|[a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]|0\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.2.23)$$

Vektori koji reprezentiraju fizikalna stanja su normirani na jedinicu $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ iz čega slijedi normalizacijski uvjet na komponente valne funkcije $\tilde{f}_\alpha^{(n)}$. Pogledajmo kako to izgleda na primjeru 1-čestičnog stanja

$$|1\alpha\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad (3.2.24)$$

Iz $\langle 1\alpha|1\alpha\rangle = 1$ i (3.2.23) slijedi

$$1 = \langle 1\alpha|1\alpha\rangle = \int \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p})^* \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}') \langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \int d^3\mathbf{p} |\tilde{f}_\alpha(\mathbf{p})|^2 \quad (3.2.25)$$

Generalizacija na opći vektor (3.2.22) jedinične norme daje

$$|\tilde{f}_\alpha^{(0)}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3\mathbf{p}_1 \cdots \int d^3\mathbf{p}_n |\tilde{f}_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|^2 = 1$$

Ove relacije pokazuju da su funkcije $\tilde{f}_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ ispravno normalizirane da predstavljaju amplitudu gustoće vjerojatnosti pronalaska sustava u stanju koje se sastoji od n nerazpoznatljivih čestica koje nose impulse $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, ili drugim riječima, da su to valne funkcije u p -reprezentaciji.

3.2.5 Valna funkcija u x-reprezentaciji

U teoriji polja koordinata u prostoru $\mathbf{x}$ nije operator pa, precizno govoreći, ne možemo govoriti o vektorima baze u x -reprezentaciji. No, kako čestice u eksperimentima detektiramo kao lokalizirane objekte, tj. mjerimo njihov položaj u prostoru, postavlja se pitanje kako iz danog vektora stanja dobiti amplitudu gustoće vjerojatnosti pronalaska čestica na danim položajima u prostoru, tj. valnu funkciju u x -prostoru. Pošto u teoriji slobodnih polja čestice ne međudjeluju, problemi koje smo opisali u odjeljku 1.4 nisu relevantni pa očekujemo da su ovakve valne funkcije dobro definirane. Postoje dva načina kako možemo pristupiti ovoj konstrukciji.

Prvi način koristi vezu između valnih funkcija u x - i p -reprezentacijama koju ste naučili u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, a to je putem Fourierovog transformata. Primjenjena na 1-čestičnom stanju (3.2.24), ova veza glasi

$$f_\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip\cdot x} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) \quad (3.2.26)$$

gdje je kao i prije $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$. Primjenom (3.2.25) lako se pokaže da ovako definirana valna funkcija zadovoljava standardni zahtjev normalizacije ukupne vjerojatnosti na jedinicu:

$$\int d^3\mathbf{x} |f_\alpha(x)|^2 = \int d^3\mathbf{p} |\tilde{f}_\alpha(\mathbf{p})|^2 = 1 \quad (3.2.27)$$

što nas navodi na ideju da definiramo $P_{\text{NR}}(x) = |f_\alpha(t, \mathbf{x})|^2$ kao gustoću vjerojatnosti pronalaska čestice oko točke $\mathbf{x}$ u trenutku t . No, važno je napomenuti da za ovako definiranu gustoću vjerojatnosti ne postoji pripadna jednačica

kontinuiteta, pa ovako definirana vjerojatnost nije lokalno sačuvana. Naravno, ovo je samo manifestacija problema, elaboriranog u odjeljku 1.4, da ne postoji relativistički opis koji je u potpunosti konzistentan s jednočestičnom valnom mehanikom.

U literaturi se često definira druga veličina na koju se referira kao na valnu funkciju u x -reprezentaciji, koja se na "prirodan" način dobije iz polja:

$$\psi_\alpha(x) \equiv \langle 0 | \varphi(x) | 1\alpha \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} \tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) \quad (3.2.28)$$

Ova veličina je Lorentz skalar i zbog toga je posebno spretna u računima. Očito je da dvije veličine, (3.2.26) i (3.2.28), nisu jednake jer se razlikuju za faktor $(2\omega)^{-1/2}$ u podintegralnoj funkciji. No, zbog tog faktora (3.2.28) ne zadovoljava normalizacijski uvjet (3.2.27) i stoga nije amplituda vjerojatnosti (po standardnoj definiciji). No, za ovu funkciju možemo na drugi način definirati veličinu koja mjeri gustoću vjerojatnosti u $\mathbf{x}$ prostoru. Sjetimo se da se u Klein-Gordonovoj teoriji može definirati struja

$$J_\mu = \frac{i}{2} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*)$$

koja je **sačuvana** (tj. zadovoljava jednažbu kontinuiteta $\partial_\mu j^\mu$) ako polje ψ zadovoljava Klein-Gordonovu jednažbu, što ψ_α očito zadovoljava. To nas navodi da pokušamo definirati lokalno sačuvanu gustoću vjerojatnosti kao:

$$P = J^0 = \frac{i}{2} (\psi_\alpha^* \dot{\psi}_\alpha - \psi_\alpha \dot{\psi}_\alpha^*) \quad (3.2.29)$$

No, kao što smo već diskutirali u odjeljku 1.4, ovako definirana vjerojatnost ne zadovoljava uvjet pozitivnosti.

Ovdje se trebamo prisjetiti da relativistika i kvantna mehanika u kombinaciji ne dopuštaju potpuno konzistentnu jednočestičnu formulaciju, tako da je najbolje razmotriti nerelativistički limes. Za nerelativističke impulse $\mathbf{p}^2 \ll m^2$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} + O((\mathbf{p}^2/m^2)^2) \right)$$

pa iz (3.2.26) i (3.2.28) slijedi da vrijedi:

$$\psi_\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{m}} f_\alpha \quad , \quad \dot{\psi}_\alpha \approx -im \psi_\alpha \approx -i\sqrt{m} f_\alpha$$

Vidimo da su u nerelativističkom limesu dvije funkcije faktički ekvivalentne, razlikuju se samo u normalizacijskoj konstanti. Također:

$$P \approx |f_\alpha|^2 = P_{\text{NR}} \quad (3.2.30)$$

Vidimo da nema nikakvih neslaganja između definicija valnih funkcija i gustoća vjerojatnosti u $\mathbf{x}$ prostoru u nerelativističkom režimu. Pokazuje se da je (3.2.28) spretnija i važnija u primjenama, npr. za računanje energija vezanih stanja.

Radi potpunosti, napomenimo da obje valne funkcije, (3.2.26) i (3.2.28), u nerelativističkom limesu zadovoljavaju nerelativističku Schrödingerovu jednažbu za slobodnu česticu:

$$i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = \left(m - \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi_\alpha + \dots$$

i isto za $f_\alpha(x)$. Točkice u gornjem izrazu sadrže članove koji sadrže faktore $\mathbf{p}^4/m^3$ (ili više potencije) pa su zanemarlivi u nerelativističkom režimu $|\mathbf{p}| \ll m$.

3.2.6 Lokalna polja – nelokalizirane čestice*

Zadržimo se malo na pitanju (ne)mogućnosti lokalizacije čestica u lokalnim kvantnim teorijama polja. Uzmimo jednočestično stanje (3.2.24) i izračunajmo prvo očekivanu vrijednost operatora gustoće broja čestice $\mathcal{N}(x)$, definiranog pomoću

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \equiv \int d^3\mathbf{x} \mathcal{N}(x) \quad (3.2.31)$$

Nije teško pokazati da je operator $\mathcal{N}(x)$ dan s

$$\mathcal{N}(x) = i \varphi^{(-)}(x) \dot{\varphi}^{(+)}(x) - i \dot{\varphi}^{(-)}(x) \varphi^{(+)}(x) \quad (3.2.32)$$

gdje su $\varphi^{(+)}$ i $\varphi^{(-)}$ dijelovi polja ϕ koji sadrže pozitivne, odnosno negativne, frekvencije

$$\varphi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x}, \quad \varphi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \quad (3.2.33)$$

Očito vrijedi

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (3.2.34)$$

Račun daje

$$\langle 1\alpha | \mathcal{N}(\mathbf{x}, 0) | 1\alpha \rangle = P(\mathbf{x}, 0) \quad (3.2.35)$$

gdje smo radi preglednosti uzeli $t = 0$, i gdje je P upravo (lažna) sačuvana "gustoća vjerojatnosti" definirana u (3.2.29). U stvari, gornji izraz nam otkriva pravo fizikalno značenje gustoće P u okviru kvantne teorije polja.

Razmotrimo sada očekivanu vrijednost neke druge lokalne veličine opisane hermitskim operatorom (lokalne opservable). U tu svrhu uzmimo gustoću energije danu gustoćom hamiltonijana, koju ćemo definirati tako da odbijemo doprinos vakumske energije:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \equiv \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(x) \quad (3.2.36)$$

Neposredan račun daje

$$\langle 1\alpha | \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) | 1\alpha \rangle = \frac{1}{2} \left\{ |\dot{f}_\alpha(\mathbf{x}, 0)|^2 + |\nabla f_\alpha(\mathbf{x}, 0)|^2 + m^2 |f_\alpha(\mathbf{x}, 0)|^2 \right\} \quad (3.2.37)$$

Ono što želimo pokazati je da jednočestična stanja ne posjeduju apsolutnu lokaliziranost, tj. da je lokaliziranost relativni pojam koji ovisi o lokalnoj opservabli koju mjerimo. Na primjer, iz (3.2.28) i (3.2.29) slijedi da lokaliziranost $P(\mathbf{x}, 0)$ u $\mathbf{x} = 0$ možemo postići na jedan od dva načina: (ili) uzimanjem $\tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$, što daje $f_\alpha(\mathbf{x}, 0) \propto \delta^3(\mathbf{x})$, (ili) uzimanjem $\tilde{f}_\alpha(\mathbf{p}) = i/\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$, što daje $\dot{f}_\alpha(\mathbf{x}, 0) \propto \delta^3(\mathbf{x})$. U prvom slučaju lako se vidi da $\dot{f}_\alpha$ nije lokalizirana funkcija, dok u drugom slučaju to vrijedi za f_α . Bez obzira koji od ova dva načina lokalizacije $P(x)$ odabrali, iz (3.2.37) je očito da očekivana vrijednost gustoće energije neće biti lokalizirana jer sadrži dijelove koji ovise ili samo o f_α ili samo o $\dot{f}_\alpha$. Može se pokazati, iako je račun malo zaguljeniji, da vrijedi i obrat - lokalizacija gustoće energije vodi na delokaliziranu gustoću broja čestica.

Ovaj primjer samo oslikava univerzalno svojstvo lokalnih relativističkih teorija polja, koje smo već susreli u različitim manifestacijama, a to je

U relativističkim teorijama polja čestice ne mogu biti u potpunosti lokalizirane.

Kao što smo već prije natuknuli, pokušaj stiskanja jedne čestice u proizvoljno maleni volumen će dovesti do mogućnosti stvaranja novih čestica, tj. stanje više neće biti jednočestično nego superpozicija stanja s različitim brojem čestica. Ono što je u ovim teorijama lokalno je način na koji čestice međudjeluju (bez obzira da li međusobno ili same sa sobom).

3.2.7 Energija vakuuma i prve beskonačnosti

Vratimo se sada na izraz za energiju vakuuma (3.2.14)

$$E_0 = \frac{1}{2} \delta^3(0) \int d^3\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \infty \quad (3.2.38)$$

Cilj nam je bolje razumijeti ovaj izraz i prirodu beskonačnosti u njemu. Za početak, napomenimo da to što je ukupna energija beskonačna nije samo po sebi čudno jer je prostor beskonačan. Ono što je relevantno za prostorno beskonačne sustave, pogotovo ako su simetrični na translacije u prostoru (a vakuumsko stanje je simetrično), je **gustoća energije** jer je to veličina koja je važna u termodinamičkom opisu i također ona veličina koja ulazi u gravitacijske jednadžbe opće relativnosti. Da bi izračunali gustoću energije upotrijebit ćemo mali trik koji ćemo koristiti i kasnije – zamisliti ćemo da je teorija umjesto u čitavom prostoru definirana u kutiji stranica L i volumena $V = L^3$ i pretpostaviti da na površini kutije polje zadovoljava periodične rubne uvjete.⁵ U stvari, to i nije tako nefizikalan uvjet jer se npr. eksperimenti najčešće i vrše u zatvorenim prostorijama, a s čisto matematičke strane ne očekujemo da uvođenje rubnih uvjeta čini dramatičnu razliku za lokalne veličine čije skale su puno manje od L . Na koncu ćemo ionako napraviti limes $L \rightarrow \infty$ čime se vraćamo na beskonačni prostor.⁶

Za potrebe ovog odjeljka nije nužno od početka definirati teoriju u kutiji već je dovoljno uočiti par korespondencija. Jedna je

$$\delta^3(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \implies \delta^3(0) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3\mathbf{x} = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (3.2.39)$$

Također, iz periodičnosti polja slijedi da valni vektor $\mathbf{p}$ može poprimiti samo diskretne vrijednosti određene s

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^3 n_j \hat{\mathbf{x}}_j, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$$

gdje su $\hat{\mathbf{x}}_j$, $j = 1, 2, 3$ jedinični vektori Kartezijevog koordinatnog sustava koji je postavljen tako da se osi nalaze na rubovima kutije. Iz toga slijedi

$$d^3\mathbf{p} \rightarrow \Delta p_1 \Delta p_2 \Delta p_3 = \frac{(2\pi)^3}{V} \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3 \quad (3.2.40)$$

pa prelazak na kutiju vodi na zamjenu

$$\int d^3\mathbf{p} F(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) \quad (3.2.41)$$

gdje je $F(\mathbf{p})$ proizvoljna funkcija od $\mathbf{p}$. Uvrštavanje gornjih izraza u (3.2.38) daje

$$E_0 \rightarrow \sum_{\mathbf{p}} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} \quad (3.2.42)$$

Vidimo da je ukupna energija naprosto suma dobro znanih nultih energija vakuuma običnih harmoničkih oscilatora koji u teoriji polja postoje za svaki mod $\mathbf{p}$. Dakle, to je potpuno očekivani rezultat koji nas nema što čuditi.

Upotrijebimo sada (3.2.39) u izrazu (3.2.38) za dobijanje gustoće energije vakuuma

$$\rho_0 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2} = \infty \quad (3.2.43)$$

gdje smo prešli na polarni sustav u integraciji po $d^3\mathbf{p}$. To što gustoća energije divergira je nezgodan rezultat jer, barem naivno gledano, iz opće relativnosti znamo da svi oblici energije i impulsa ulaze u Einstein-Hilbertovu gravitacijsku jednadžbu. Očito je u pitanju problem kojeg treba razriješiti.

⁵Ako bi pretpostavili da polje iščezava na površini kutije došli bi do istih zaključaka.

⁶U fizici kondenzirane materije obično i razmatramo sustave koji imaju konačan volumen tako da je normalizacija u kutiji sasvim prirodna stvar.

Jedan izlaz bi bio u pretpostavci da opisi prirode putem kvantnih teorija polja nisu fundamentalni već efektivni i da vrijede samo do neke skale u impulsu $p_{\max}$. U tom slučaju gornja granica u integralu u (3.2.43) nije beskonačna već reda veličine $p_{\max}$ što daje doprinos gustoći energije vakuuma

$$\rho_0 \sim \frac{p_{\max}^4}{16\pi^2}$$

gdje smo radi jednostavnosti pretpostavili da je $p_{\max} \gg m$. Pošto iz eksperimenata znamo da u prirodi postoji bar jedna skalarna čestica (Higgsova čestica) i da Standardni model dobro funkcionira barem do skale $p_{\max} \sim 1 \text{ TeV}$, možemo procijeniti doprinos gustoći energije vakuuma. Korisno je dobiveni rezultat usporediti s trenutno najboljim fitom za kozmološku konstantu Svemira $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{ GeV}$,

$$\frac{\rho_0}{\rho_\Lambda} \sim 10^{60}$$

Ovo je zbunjujući rezultat. Vidimo da postoje samo dvije mogućnosti: (a) postoje drugi doprinosi energiji vakuuma (odnosno kozmološkoj konstanti) koji su točno toliki da skoro u potpunosti ponište doprinos kvantne energije vakuuma polja, (b) doprinos energije vakuuma nije fizikalni i ne treba ga uzimati u obzir niti u gravitacijskim jednačima.

Iako je velika količina istraživanja, i to u mnogobrojnim smjerovima, bila usmjerena na pronalaženje mehanizama koji bi mogli generirati scenarij (a), nitko nije do sada pronašao zadovoljavajući koji bi bio “prirodan” tj. u kojem se doprinosi ne poništavaju tako da se “rukom” namještaju brojevi u sumi tako da se prvih 59 decimala poništi, ali ne i 60. decimala (ovo se zove **problem finog podešavanja** (eng. **fine tuning**) i teoretičari ga ne vole i smatraju takve procedure **neprirodnima**).

Što se tiče mogućnosti (b) tu također postoji problem. Kao prvo, kvantna energija vakuuma sigurno nije u potpunosti nefizikalna jer su neki njeni učinci izmjereni. Jedna takva pojava je tzv. **Casimirov efekt**, koji ćemo kasnije malo detaljnije razmotriti, u kojem se može mjeriti razlika energija u sustavu kojem mijenjamo geometriju i/ili rubne uvjete. Kao drugo, postoje doprinosi koji nisu čisto kvantni. Ukoliko sustav prolazi kroz dramatične promjene kao što su **fazni prijelazi**, energija vakuuma (osnovnog stanja) se može drastično mijenjati i te promjene su fizikalne i mjerljive. Na primjer, pretpostavlja se da je Svemir prolazio kroz fazne prijelaze u kratkom vremenu nakon Velikog praska. No, ono što treba odmah napomenuti je da niti u jednom od ovih mehanizama mi ne mjerimo apsolutnu energiju vakuuma nego *razlike* energija. Svejedno, detaljna analiza pokazuje da nije jasno zašto bi sadašnji iznos kozmološke konstante bio toliko malen u relativnom smislu.

Ovaj problem je poznat pod imenom **problem velike kozmološke konstante** i predstavlja jedno od najvećih neriješenih pitanja teorijske fizike uopće. No, uočite da se radi o vrsti problema karakteriziranih “neprirodnosti” (pojava fine-tuninga brojeva u teoriji), a ne matematičkom konzistentnošću teorije, i porijeklo problema može biti naprosto u tome što postavljamo krivo pitanje. Jedan od alternativnih pristupa rješavanju problema je korištenje **antropičkog principa**, koji daje neka parcijalna, iako ne i potpuno zadovoljavajuća, objašnjenja.

3.2.8 Normalno uređenje

Beskonačnost prisutna u energiji vakuuma nije jedini takav problem koji traži regularizaciju u kvantnim teorijama polja. Kao što smo vidjeli, mjerljive veličine, poput energije i impulsa, u svojoj definiciji sadrže integrale produkata polja u istoj točki prostor vremena, poput φ^2 . Lako je vidjeti da ovakvi produkti nisu dobro definirani. Npr. razmotrimo najjednostavniji slučaj očekivane vrijednosti operatora φ^2 u vakuumu. Koristeći (3.2.10) i komutatore (3.2.9) lako se pokaže

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x)^2 | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \infty \end{aligned}$$

Ova beskonačnost u stvari nije neočekivana. Ona je posljedica činjenice da su kvantna polja operatorske distribucije i stoga njihovi lokalni produkti nisu nužno dobro definirani (slično kao što je Diracova delta funkcija $\delta(x)$ dobro

definirana distribucija, no $\delta(x)^2$ nije matematički smislen objekt). Ključno je dakle pronaći način kako osmisliti (tj. **regularizirati**) ovakve produkte operatora.

Općenito, rješenje je isto kao u slučaju Diracove delta funkcije, koju smo koristili i u klasičnoj fizici i nerelativističkoj kvantnoj mehanici. Kvantna polja, kao operatorske distribucije, dobivaju značenje kroz integriranje po regularnim funkcijama koje su kvadratno integrabilne ("peglanje")

$$\varphi_f(t) = \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \int d^3\mathbf{x} |f(\mathbf{x}, t)|^2 < \infty \quad (3.2.44)$$

gdje je f neka glatka funkcija na prostoru. Ovako definirani operatori φ_f su analogoni operatora $\mathbf{x}$ u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, u smislu da njihovi svojstveni vektori nisu normalizabilni (tzv. neomeđeni operatori). Operatore φ_f se potom može slobodno množiti i potencirati. U odjeljku 3.4.1 dat ćemo jedan primjer rada s "ispeglanim" operatorom polja.

U slučaju slobodnih polja postoji jednostavna metoda neposredne regularizacije produkata kvantnih polja u istoj točki prostor-vremena koja se naziva **normalno uređenje**, a koju smo u stvari već primjenili prilikom regularizacije energije. Normalno uređenje produkata slobodnih polja se definira tako da se svi operatori stvaranja u produktu premjeste na lijevo od svih operatora poništenja,⁷ i označava se stavljanjem izraza između dviju dvotočki, $:(\dots):$. Na primjer,

$$:a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger: = :a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}: = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad , \quad :a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}: = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}} \quad (3.2.45)$$

Vidimo da se regularizacija energije stavljanjem $E_0 = 0$ u stvari postiže primjenom normalnog uređenja na operator Hamiltonijana (3.2.13). Jedna očita posljedica definicije je da svaki normalno uređeni produkt operatora stvaranja i/ili poništenja posjeduje iščezavajuću vakuumsku očekivanu vrijednost.

U radu s normalnim uređenjem produkata polja pokazuje se spretnim razdvojiti svako polje u pozitivno frekventni i negativno frekventni dio

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (3.2.46)$$

gdje su

$$\varphi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} \quad , \quad \varphi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \quad (3.2.47)$$

Pošto pozitivno frekventni dio $\varphi^{(+)}$ sadrži samo operatore poništavanja, a negativno frekventni dio $\varphi^{(-)}$ samo operatore stvaranja, vidimo da u normalno uređenom produktu svi pozitivno frekventni dijelovi idu na desno od negativno frekventnih dijelova, npr.

$$:\varphi(x)^2: = \varphi^{(+)}(x)^2 + 2\varphi^{(-)}(x) \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)^2 \quad (3.2.48)$$

Lako se može zaključiti da su svi matrični elementi normalno uređenih produkata polja (koji mogu uključivati i derivacije) sa stanjima iz Fockovog prostora dobro definirane distribucije.

Normalno uređenje je vrlo spretna i zahvalna tehnika regularizacije produkata slobodnih polja i koristit ćemo je kasnije za općenita slobodna polja. U slučaju interagirajućih kvantnih teorija polja, na žalost, normalno uređenje u pravilu nije primjenjivo jer ne znamo egzaktno riješiti jednažbu gibanja i dobiti razvoj polja pomoću operatora stvaranja i poništenja čestica.⁸ U interagirajućim teorijama polja regularizacija operatora je obično složena i u praksi se obično može napraviti samo ili u perturbativnom računu ili u različitim vrstama računa zasnovanih na numeričkim približenjima.

⁷U slučaju fermionskih polja, koja ćemo razmotriti kasnije, postoji i faktor $(-1)^P$ gdje je P parnost permutacije koju je potrebno napraviti na produktu operatora kako bi se od početnog dobilo normalno uređenje.

⁸Izuzetak su kvantne teorije slobodnih polja koja međudjeluju s klasičnim vanjskim izvorom.

3.3 Slobodno kompleksno skalarno polje. Antičestice

Pretpostavimo sada da je teorija opisana skalarnim poljem koje je kompleksno, tj. $\varphi^\dagger \neq \varphi$. U odjeljku 2.2.3 (vidi problem 2.4) pokazali smo da ako raspišemo polje na način

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \quad , \quad \varphi_r^\dagger = \varphi_r \quad (3.3.1)$$

da se lagranžijan za slobodno kompleksno polje

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

svodi na lagranžijan za dva razvezana slobodna polja

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^{(1)} + \mathcal{L}_0^{(2)}$$

gdje je $\mathcal{L}_0^{(r)}$ lagranžijan (3.2.3) za polje φ_r . Očito je da će ista stvar vrijediti i za kanonske komutacijske relacije te za izraze za ukupnu energiju i impuls – izrazi su naprosto unija ili zbroj doprinosa za dva nezavisna slobodna realna skalarna polja φ_r . To sve nam omogućava da vrlo jednostavno kvantiziramo ovaj sustav koristeći već dobivenu analizu za realno polje.

Na primjer, odmah možemo zaključiti da se kvantizirana polja mogu raspisati pomoću operatora stvaranja i poništavanja čestica

$$\varphi_r(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e^{ip \cdot x} \right) \quad , \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad , \quad r = 1, 2 \quad (3.3.2)$$

gdje operatori stvaranja i poništavanja zadovoljavaju standardnu algebru

$$[a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{q}}^{(s)\dagger}] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{q}}^{(s)}] = 0 \quad (3.3.3)$$

Energija i impuls su

$$H = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)} + 2E_0$$

$$\mathbf{P} = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(r)}$$

gdje je E_0 isti kao u (3.2.38). Fockov prostor stanja i pripadna interpretacija su potpuno isti kao za realno skalarno polje uz jedinu razliku da sada imamo dvije različite vrste relativističkih čestica, koje kreiraju nezavisni operatori stvaranja $a_{\mathbf{q}}^{(r)\dagger}$, koje imaju jednaku masu m i spin 0.

Pitanje je što onda razlikuje te dvije vrste čestica? Kako bi odgovorili na ovo pitanje uočimo prvo da način na koji možemo definirati čestice nije jednoznačan. Naime, ukoliko definiramo klasu operatora poništenja

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} &= \alpha_{11} a_{\mathbf{p}}^{(1)} + \alpha_{12} a_{\mathbf{p}}^{(2)} \\ b_{\mathbf{p}} &= \alpha_{21} a_{\mathbf{p}}^{(1)} + \alpha_{22} a_{\mathbf{p}}^{(2)} \end{aligned} \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in U(2) \quad (3.3.4)$$

gdje je $U(2)$ grupa dvodimenzionalnih unitarnih matrica, može se lako pokazati da $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}$ i $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ također zadovoljavaju operatorsku algebru (3.3.3), te da oblik izraza za energiju i impuls ostaje očuvan, tj. vrijedi

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$$

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right) \quad (3.3.5)$$

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right) \quad (3.3.6)$$

gdje smo usput odbacili energiju vakuumu $2E_0$ koja nije mjerljiva ako zanemarimo gravitacijske učinke.

Pošto grupa $U(2)$ posjeduje neprebrojivo mnogo elemenata, vidimo da postoji neprebrojivo mnogo mogućnosti odabira operatora stvaranja i poništavanja. Koji odabir se odnosi na "prave" "fizičke" čestice? Na određeni način, mogli bi reći da je to stvar konvencije. No, ipak postoji samo jedan odabir (do na irelevantnu fazu) koji preferira operator sačuvanog naboja koji smo vidjeli da postoji u ovoj teoriji i koji je dan s

$$Q = iq \int d^3\mathbf{x} \left(\varphi^\dagger \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^\dagger \right) \quad (3.3.7)$$

Odabir operatora stvaranja i poništavanja koji dijagonalizira Q je

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{p}}^{(1)} + i a_{\mathbf{p}}^{(2)} \right), \quad b_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{p}}^{(1)} - i a_{\mathbf{p}}^{(2)} \right) \quad (3.3.8)$$

koji se dobije ako se u (3.3.4) stavi $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_{12} = -\alpha_{22} = i/\sqrt{2}$. Izražen pomoću ovih operatora Q je dan s

$$Q = q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right) \quad (3.3.9)$$

Kombiniranjem (3.3.8), (3.3.1) i (3.3.2) vidimo da je

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.3.10)$$

tj. izbor (3.3.8) je upravo onaj prirodno dobijen iz fundamentalnog operatora teorije, tj. kompleksnog polja φ .

Važno je uočiti da dvije vrste čestica, generirane operatorima stvaranja $a^\dagger$ i $b^\dagger$ (tip-a i tip-b), **nose naboj jednak po iznosu ali suprotnog predznaka**, $Q_a = q$, $Q_b = -q$. To slijedi iz djelovanja Q na pripadna jednočestična stanja

$$Q |\mathbf{p}, a\rangle = q |\mathbf{p}, a\rangle, \quad Q |\mathbf{p}, b\rangle = -q |\mathbf{p}, b\rangle$$

što slijedi iz (3.3.9) i definicije jednočestičnih stanja

$$|\mathbf{p}, a\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle, \quad |\mathbf{p}, b\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

Kažemo da je čestica tipa-b **antičestica** čestice tipa-a (i obrnuto), jer ima jednaku masu i spin, no suprotan predznak naboja.

Kasnije ćemo vidjeti da u relativističkim teorijama polja postoji teorem koji kaže da svaka čestica ima svoju antičesticu, tj. česticu jednake mase i spina koje nose naboje jednakih iznosa ali suprotnih predznaka. Jedini izuzetak su čestice koje su same sebi antičestice, no takve čestice onda nužno imaju sve naboje jednake nula (primjer je foton).

Čitatelj se mogao zapitati zašto smo u izrazu za operator naboja (3.3.7) u drugom članu odabrali poredak $\varphi \dot{\varphi}^\dagger$ umjesto $\dot{\varphi}^\dagger \varphi$, koji bi čak možda bio i "prirodniji". Uočite da to nije trivijalno pitanje jer operatori u produktu ne komutiraju. Da smo upotrijebili ovo drugo uređenje, dobili bi da su svojstvene vrijednosti svih stanja pomaknute za konstantu Q_0 danu s:

$$Q_0 = -q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger] = -q \delta^3(0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (3.3.11)$$

koja je beskonačna. To bi ujedno značilo da vakuum posjeduje beskonačnu gustoću naboja. Ovaj primjer ilustrira situaciju u kojoj je izbor uređenja operatora nakon kvantizacije teorije određen zahtjevom regularnosti. Poredak operatora u (3.3.7) automatski vodi brigu o poštivanju normalnog uređenja.

3.4 Klasični limes kvantnih polja*

Na primjeru slobodnog skalarnog polja vidjeli smo kako izgleda kvantna teorija polja. Pitanje koje sada postavljamo je veza s klasičnom fizikom, odnosno u kojim situacijama i pod kojim uvjetima možemo očekivati da se kvantno polje približno ponaša kao klasično.

3.4.1 Komplementarnost i kvantna polja

Razmotrimo prvo jednostavni nerelativistički kvantnomehanički sustav opisan koordinatom x i pripadnim kanonskim impulsom p . U ovakvim teorijama razlika između kvante i klasične teorije je jasno vidljiva iz relacija neodređenosti

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.4.1)$$

gdje je Δp disperzija impulsa u nekom fizikalnom kvantnom stanju definirana s

$$\Delta p \equiv \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

i slično za Δx . Ova relacija neodređenosti je matematička posljedica komutatora operatora $[q, p] = i\hbar$. Vidimo da za razliku od klasične fizike, gdje svaku fizikalnu veličinu možemo u teoriji mjeriti s proizvoljnom preciznošću (odnosno, ako i postoje ograničenja, ona nisu povezana na neki fundamentalni način), u kvantnoj fizici to nije tako. Na primjer, iz (3.4.1) slijedi da potpuno točno poznavanje vrijednosti položaja u nekom trenutku automatski podrazumijeva potpunu neodređenost u pripadnom kanonskom impulsu, i obrnuto. Stanja u kojima postoji velika disperzija neke mjerljive veličine ne nalikuju na klasična stanja. Očito je da kvantna stanja koja nalikuju klasičnima moraju posjedovati sljedeća svojstva: (i) nejednakost u (3.4.1) treba biti minimizirana, (ii) i Δp i Δx trebaju svaki biti "makroskopski maleni", tj. puno manji od klasičnih skala u sustavu tako da se disperzija može zanemariti. U slučaju običnog harmoničkog oscilatora poznato je da tzv. **koherentna stanja**, čije očekivane vrijednosti energije zadovoljavaju $\langle H \rangle \gg \hbar\omega$, zadovoljavaju oba ova svojstva i približno pokazuju "klasično ponašanje".

Naravno, možemo probati istu ovu logiku ponoviti na kvantnim teorijama polja. U tu svrhu razmotrimo slobodno realno skalarno polje $\varphi(x)$ za koje ćemo pretpostaviti da je (lokalno) mjerljivo. Koristeći kanonski komutator između polja i pridruženog kanonskog impulsa mogli bi probati formalno konstruirati lokalnu relaciju neodređenosti koja bi sadržavala disperziju

$$\Delta\varphi(x) = \sqrt{\langle \varphi(x)^2 \rangle - \langle \varphi(x) \rangle^2}$$

No, tu odmah nailazimo na stanovite "tehničke" probleme. Kao što smo vidjeli u odjeljku 3.2.8, φ^2 nije dobro definirana veličina jer je polje φ operatorska distribucija, a distribucije se ne smiju množiti u istoj točki. Ovo se rješava na način da se radi s operatorima koji se dobiju "peglanjem" kvantnih polja integriranjem po glatkim funkcijama. Npr. operator koji je lokaliziran oko $\mathbf{x} = 0$ možemo dobiti na način

$$\bar{\varphi}(t) \equiv \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \int d^3\mathbf{x} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2a^2}} \varphi(x) \quad (3.4.2)$$

Vidimo da je ovako definirani operator efektivno lokaliziran oko $\mathbf{x} = 0$ s širinom $\sim a$. U limesu $a \rightarrow 0$ testna funkcija postaje $\delta^3(\mathbf{x})$ pa je $\lim_{a \rightarrow 0} \bar{\varphi}(t) = \varphi(\mathbf{x} = 0, t)$.

Sad možemo izračunati disperziju od $\bar{\varphi}(t)$ u vakuumu. Može se pokazati

$$\langle 0 | \bar{\varphi}(t)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-a^2 p^2}$$

Ovaj integral je sada konačan. U režimu jake lokaliziranosti, $a \ll 1/m$, dobijamo

$$\langle 0 | \bar{\varphi}(t)^2 | 0 \rangle \approx \frac{1}{8\pi^2 a^2} \quad , \quad a \ll \frac{1}{m}$$

Pošto je očito $\langle 0|\bar{\varphi}(t)|0\rangle = 0$ dobijamo da je disperzija za "ispeglani" operator u vakuumu dana s

$$\Delta\bar{\varphi}(t) = \sqrt{\langle 0|\bar{\varphi}(t)^2|0\rangle} \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a} \quad , \quad a \ll \frac{1}{m}$$

Iz ovog rezultata možemo izvući dva zaključka:

- Bez obzira što govorimo o lokalnoj teoriji polja, polja se ne mogu mjeriti s beskonačnom prostornom rezolucijom. Prostorna rezolucija je uvijek konačna, no teoretski proizvoljno velika.
- Pošto vrlo precizno lokalno mjerenje operatora u vakuumu vodi na ogromnu disperziju, vidimo da vakuum ne nalikuje na klasično stanje.

Ova dva opažanja u stvari ne bi trebala biti iznenađujuća (drugo opažanje vrijedi i za obični harmonički oscilator, a slobodno polje je formalno gledano beskonačna kolekcija harmoničkih oscilatora).

Koja svojstva bi trebala imati stanja u kojima se kvantno polje ponaša klasično? Da bi dobili odgovor na ovo pitanje, razmotrimo Fourierov razvoj slobodnog realnog bozonskog polja, kojeg je za potrebe argumenta koji slijedi spretnije napisati koristeći normalizaciju u kutiji:⁹

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right) \quad , \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 1$$

Za klasično polje, gdje je $a_{\mathbf{k}}$ obična funkcija s kodomenom u $\mathbb{C}$, svaki mod $\mathbf{k}$ je karakteriziran amplitudom $A_{\mathbf{k}}$ i fazom $\theta_{\mathbf{k}}$,

$$a_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} e^{i\theta_{\mathbf{k}}} \quad , \quad A_{\mathbf{k}} = \sqrt{a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}}$$

Sada ćemo pokušati konstruirati operatore koji u kvantnoj teoriji odgovaraju ovim veličinama. U slučaju konačnodimenzionalnih prostora, teorem o polarnoj dekompoziciji nam garantira da postoji operator $N_{\mathbf{k}}$, koji ima semipozitivni spektar, i unitarni operator $E_{\mathbf{k}}$ takvi da je

$$a_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} \sqrt{N_{\mathbf{k}}} \implies a_{\mathbf{k}}^{\dagger} = \sqrt{N_{\mathbf{k}}} E_{\mathbf{k}}^{\dagger}$$

Vidimo da je $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$ operator broja čestica u modu $\mathbf{k}$, dok unitarni operator $E_{\mathbf{k}}$ odgovara faktoru $e^{i\theta_{\mathbf{k}}}$. Koristeći komutatore operatora stvaranja i poništenja lako se pokaže da vrijedi

$$[E_{\mathbf{k}}, N_{\mathbf{k}}] = E_{\mathbf{k}} \quad (3.4.3)$$

Ukoliko sada napišemo unitarni operator kao $E_{\mathbf{k}} = e^{i\Theta_{\mathbf{k}}}$ gdje je $\Theta_{\mathbf{k}}$ hermitski "operator faze", primjenom Baker-Campbell-Hausdorff formule

$$e^{-A} B e^A = B - [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}[A, [A, \dots, [A, B]] \dots] + \dots \quad (3.4.4)$$

može se pokazati da (3.4.3) slijedi ako *pretpostavimo* komutacijsku relaciju

$$[N_{\mathbf{k}}, \Theta_{\mathbf{k}}] = i \quad (3.4.5)$$

Pošto su oba operatora u (3.4.5) hermitska, iz (3.4.5) se može dobiti relacija neodređenosti:¹⁰

$$\Delta N_{\mathbf{k}} \Delta \Theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \quad (3.4.7)$$

⁹Pisat ćemo samo one komutatore koji ne iščezavaju.

¹⁰Općenito, ako je $[A, B] = iC$, gdje su A, B i C neki hermitski operatori, na standardni način se može izvesti sljedeća relacija neodređenosti:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle| \quad (3.4.6)$$

Obratite pažnju da su oba operatora bezdimenzionalni i u SI sustavu jedinica, tako da gornja relacija izgleda isto i u SI sustavu (tj. nema nikakvih faktora $\hbar$). Očito je da ako želimo da stanje nalikuje na klasično, za modove koji daju važan doprinos stanju faza (čije svojstvene vrijednosti su ograničene periodičnošću na $0 \leq \theta < 2\pi$) mora imati disperziju puno manju od jedan, $\Delta\Theta_{\mathbf{k}} \ll 1$. Pošto onda iz (3.4.7) slijedi $\Delta N_{\mathbf{k}} \gg 1$, to znači da stanje može imati klasična svojstva samo ako je

$$\bar{N}_{\mathbf{k}} \equiv \langle N_{\mathbf{k}} \rangle \gg \Delta N_{\mathbf{k}} \gg 1 \quad (3.4.8)$$

Dolazimo do zaključka:

Stanje u teoriji polja može **izgledati klasično** samo ako modovi $\mathbf{k}$ koji dominantno doprinose stanju posjeduju srednji broj kvanata pobuđenja (čestica) puno veći od jedan i $\bar{N}_{\mathbf{k}} \gg \Delta N_{\mathbf{k}} \gg 1$.

Iako je gornji zaključak u osnovi istinit, treba napomenuti da je izvod pogrešan. To se može jednostavno provjeriti na način da se izračuna očekivana vrijednost relacije (3.4.5) u vakuumu:

$$\langle 0 | N_{\mathbf{k}} \Theta_{\mathbf{k}} | 0 \rangle - \langle 0 | \Theta_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = 0 \neq i \quad (3.4.9)$$

gdje smo koristili $\langle 0 | N_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} | 0 \rangle$. Očito je da relacija (3.4.5) nije valjana. Dva su problema koja korumpiraju njen izvod: (1) Polarna dekompozicija ne vrijedi nužno za operatore definirane na beskonačnodimenzionalnim prostorima, (2) Definicija operatora faze Θ je problematična jer zbog periodičnosti $\theta \sim \theta + 2\pi$ klasična faza nije jednoznačno definirana. Iako nećemo ulaziti u sve detalje, u par riječi ćemo objasniti kako se ovi problemi mogu zaobići.¹¹

Prvi problem ima relativno jednostavno rješenje. Pošto očekujemo da za stanja slična klasičnima doprinos vektora baze s brojem čestica $n_{\mathbf{k}} \gg \bar{N}_{\mathbf{k}} + \Delta N_{\mathbf{k}}$ zanemarivo malen, to možemo iskoristiti da efektivno odrežemo Fockov prostor stanja na nekom $n_{\max} \gg \bar{N}_{\mathbf{k}} + \Delta N_{\mathbf{k}}$ tako da zahtijevamo

$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger} |n_{\max}\rangle = 0$$

Na taj način polarni teorem će približno vrijediti za stanja kod kojih je doprinos vektora baze s $n_{\mathbf{k}} > n_{\max}$ zanemariv. Koliko približno, ovisi o tome koliki je doprinos "odsječenog" dijela. U idućem odjeljku vidjet ćemo da za stanja koja ćemo konstruirati taj doprinos atenuira s n putem faktora $(e\bar{N}/n)^n$ koji je užasno malen za $n \gg \bar{N} \gg 1$, pa relacije (3.4.3)-(3.4.3) vrijede s velikom točnošću kada se usendviše između bra i ket vektora koji pripadaju ovakvim stanjima.

Drugi problem je malo nezgodniji i svodi se na to da trebamo izbjeći uvođenje operatora faze Θ . Ideja je rastaviti unitarni operator $E_{\mathbf{k}}$ na nezavisne hermitske dijelove $C_{\mathbf{k}}$ i $D_{\mathbf{k}}$:

$$C_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{2}(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \quad , \quad D_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{2i}(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}^{\dagger})$$

Očito je da $C_{\mathbf{k}}$ i $D_{\mathbf{k}}$ odgovaraju $\cos \theta_{\mathbf{k}}$ i $\sin \theta_{\mathbf{k}}$ u klasičnom opisu. Sad više ne postoji nikakav problem s nejednoznačnošću i možemo nastaviti s procedurom. Rezultat su komutacijske relacije:

$$[N_{\mathbf{k}}, D_{\mathbf{k}}] \approx iC_{\mathbf{k}} \quad , \quad [N_{\mathbf{k}}, C_{\mathbf{k}}] \approx -iD_{\mathbf{k}} \quad (3.4.10)$$

iz čega slijede relacije neodređenosti

$$\Delta N_{\mathbf{k}} \Delta C_{\mathbf{k}} \gtrsim \frac{1}{2} |\langle D_{\mathbf{k}} \rangle| \quad , \quad \Delta N_{\mathbf{k}} \Delta D_{\mathbf{k}} \gtrsim \frac{1}{2} |\langle C_{\mathbf{k}} \rangle| \quad (3.4.11)$$

¹¹Detaljnija rasprava se može naći u knjizi A. Duncana, *The Conceptual Framework of QFT*, poglavlje 8.

3.4.2 Koherentna stanja

Između stanja koja posjeduju klasično ponašanje, postoji posebna klasa, zvana **koherentna stanja**, koja u određenom smislu posjeduju ultraklasično ponašanje. Svojstvo ovih stanja je da su relacije neodređenosti (3.4.11) saturirane (tj. minimizirane). Ovakva stanja, osim teorijske, imaju i eksperimentalnu važnost jer se proizvode u laserskim rezonantnim šupljinama i važna su u **kvantnoj optici**. Koherentna stanja su u potpunosti specificirana dodatnim uvjetom da su disperzije operatora $(a + a^\dagger)$ i $i(a^\dagger - a)$ jednake.¹² Relacije neodređenosti stoga daju

$$\Delta(a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger) = \Delta\frac{1}{i}(a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger) = 1$$

Posljedica ovih relacija je da su koherentna stanja svojstvena stanja operatora poništenja

$$a_{\mathbf{p}} |f\rangle = f(\mathbf{p}) |f\rangle \quad (3.4.12)$$

Koristeći Baker-Campbell-Hausdorff formulu (3.4.4) može se pokazati da su koherentna stanja dana s:

$$|f\rangle = \mathcal{N} \exp\left(\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger\right) |0\rangle \quad (3.4.13)$$

gdje je $\mathcal{N}$ normalizacijski faktor. Iz ove relacije direktno slijedi da je koherentno stanje svojstveno stanje pozitivno frekventnog dijela polja φ

$$\varphi^{(+)}(x)|f\rangle = \frac{1}{2} f(x)|f\rangle, \quad f(x) = \int d^3\mathbf{p} \tilde{f}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}$$

Očito je da negativno-frekventni dio polja zadovoljava

$$\langle f | \varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{2} f(x)^* \langle f |$$

Iz ovih jednakosti i $\varphi = \varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}$ slijedi

$$\langle f | \varphi(x) | f \rangle = \frac{1}{2} [f(x) + f^*(x)] \equiv \varphi_{\text{kl}}(x)$$

gdje smo na standardni način definirali "klasično polje" φ_{kl} , koje pripada stanju $|f\rangle$, kao očekivanu vrijednost. Očito je da $\varphi_{\text{kl}}(x)$ zadovoljava Klein-Gordonovu jednažbu gibanja. Razmotrimo sada očekivane vrijednosti nekih složenijih hermitskih operatora u koherentnim stanjima. Na primjer, lako se pokaže da je:

$$\begin{aligned} \frac{\langle f | : \varphi(x)^j : | f \rangle}{\langle f | f \rangle} &= \varphi_{\text{kl}}(x)^j \\ \frac{\langle f | : (\nabla \varphi(x))^2 : | f \rangle}{\langle f | f \rangle} &= (\nabla \varphi_{\text{kl}}(x))^2 \\ \frac{\langle f | : \dot{\varphi}(x)^2 : | f \rangle}{\langle f | f \rangle} &= \dot{\varphi}_{\text{kl}}(x)^2 \end{aligned}$$

gdje smo regularizirali operatore koristeći normalno uređenje. Koristeći gornje relacije i izraz za (normalno uređeni) hamiltonijan (2.4.6) možemo izračunati i očekivanu vrijednost energije koherentnih stanja

$$\overline{E}_f = \frac{\langle f | : H : | f \rangle}{\langle f | f \rangle} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left(\dot{\varphi}_{\text{kl}}(x)^2 + (\nabla \varphi_{\text{kl}}(x))^2 + m^2 \varphi_{\text{kl}}(x)^2 \right) = H[\varphi_{\text{kl}}]$$

gdje je $H[\varphi_{\text{kl}}]$ naprosto klasični hamiltonijan izvrjednjen na polju $\varphi_{\text{kl}}(x)$.

¹²Generalnija stanja koja ne zadovoljavaju ovaj zahtjev se nazivaju stisnuta stanja (eng. *squeezed states*). Ova stanja također igraju važnu ulogu u kvantnoj optici.

Iz gornjih izraza vidimo da su očekivane vrijednosti operatora, koji su pridruženi mjerljivim veličinama, za koherentna stanja jednake klasičnim izrazima izvrijednjenima na klasičnom polju $\varphi_{kl}(x)$. Drugim riječima,

Ako gledamo samo očekivane vrijednosti mjerljivih veličina, koherentno stanje se ponaša kao klasično stanje opisano poljem $\varphi_{kl}(x)$.

To je u osnovi razlog zašto se za koherentna stanja kaže da imaju **ultraklasično ponašanje**.

Zadatak 3.4.1: Razmotrite koherentna stanja definirana u (3.4.12).

- (a) Dokažite (3.4.13).
- (b) Ukoliko je stanje normalizirano na standardan način, $|\langle f|f \rangle| = 1$, pokažite da je normalizacijski faktor u (3.4.13) dan s

$$\mathcal{N} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} |f|^2 \right) \quad (3.4.14)$$

Naputak: Možete koristiti relaciju

$$e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A \quad (3.4.15)$$

koja vrijedi za bilo koji par operatora A i B koji zadovoljavaju $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$.

3.5 Međudjelovanje s klasičnim vanjskim izvorom

Kao prvi korak ka proučavanju interakcija među poljima, razmotrit ćemo jednostavniji problem vezanja kvantiziranog polja na **klasični vanjski izvor**. Klasični vanjski izvor znači da postoji vanjski utjecaj koji se nalazi u toliko visoko pobuđenom stanju da možemo zanemariti utjecaj kvantiziranog polja na njega (tj. zanemarujemo povratnu spregu) i koji se može opisati klasičnim veličinama (u ovom slučaju klasičnim poljima) koja su zadana.¹³ Ovakve vrste teorija važne su i u praksi i iz čisto teorijskih razloga. Zanimljivi primjeri iz prirode uključuju emisije elektromagnetskog zračenja različitih izvora koji se mogu aproksimirati kao klasični, te Hawkingovo zračenje za koje se vjeruje da nastaje u okolini horizonta crnih rupa. S čisto teorijskog aspekta, važnost ovakvih teorija je da su u nekim slučajevima **egzaktno rješive**, što se ne viđa često u interagirajućim teorijama.

Radi jednostavnosti, razmotrit ćemo vrlo jednostavni primjer u kojem je kvantizirano realno skalarno polje vezano na klasični vanjski izvor opisan fiksnim klasičnim skalarnim poljem $j(x)$, na način da je lagranžijan dan s:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \varphi j$$

Pretpostavljamo da je $j(x)$ unaprijed zadana realna funkcija na prostor-vremenu. Također ćemo prvo razmotriti slučaj u kojem izvor $j(x)$ iščezava, ili je zanemarivo malen, izvan vremenskog intervala $t_i < t < t_f$, te da je prostorno lokaliziran.¹⁴

¹³Zainteresirani čitatelj može pronaći nešto više o aproksimaciji klasičnim vanjskim izvorom u dopunskoj literaturi (npr. Weinberg I).

¹⁴Fraza koja se često koristi je da je izvor "uključen" samo u intervalu $t_i < t < t_f$. U stvari je za izvod dovoljno pretpostaviti da vrijedi

$$j(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad , \quad j(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{dovoljno brzo}$$

no prezentacija je puno jasnija i kraća ako se uzme da $j(x)$ egzaktno iščezava izvan intervala $t_i < t < t_f$.

Euler-Lagrangeove jednačbe daju za jednažbu gibanja polja:

$$(\square + m^2)\varphi = j \quad (3.5.1)$$

Sad ćemo pokazati da ova teorija nije bitno kompliciranija od teorije slobodnog polja i shodno tome se može egzaktno riješiti. Očito je da je najbolji pristup ovom problemu metodom Greenovih funkcija, koju smo proučavali u odjeljku 2.6. Opće rješenje jednačbe (3.5.1) je:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x-y) j(y) \quad (3.5.2)$$

gdje je φ_0 opće rješenje Klein-Gordonove jednačbe ($j = 0$), a G je Greenova funkcija za operator $L = \square + m^2$. Formulacija problema i zahtjev kauzalnosti na teoriju nam kaže da je ovdje prikladna **retardirana** Greenova funkcija, koju smo za navedeni operator već konstruirali u odjeljku 2.6.2 i napisali je u jednačbi (2.6.21):

$$G(x-y) = D_R(x-y) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \theta(x^0 - y^0) \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) \quad (3.5.3)$$

Možemo napisati kvantizirano realno slobodno skalarno polje na uobičajeni način:

$$\varphi_0(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.5.4)$$

gdje operatori $a_{\mathbf{p}}$ i $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ zadovoljavaju komutatore operatora stvaranja i poništavanja. Uvrštavanjem (3.5.3) i (3.5.4) u (3.5.2) završen je matematički posao rješavanja jednačbe gibanja. Ono što je preostalo je fizika: interpretacija veličina u rješenju i proučavanje fizikalnih posljedica.

Kao prvo, uočimo da izbor retardirane Greenove funkcije znači da je:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \quad , \quad \text{za} \quad t < t_i$$

što znači da su $a_{\mathbf{p}}$ i $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ operatori poništenja i stvaranja fizikalnih čestica u Fockovom prostoru stanja u asimptotskom režimu $t < t_i$ u kojem je polje slobodno. Druga stvar koju treba opaziti je da za $t > t_f$ sve točke u kojima je $j(y) \neq 0$ su u prošlosti pa možemo zamijeniti step funkciju jedinicom, $\theta(x_0 - y_0) \rightarrow 1$, što daje:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) + i \int d^4y \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) j(y) \quad , \quad t > t_f \\ &= \varphi_0(x) + i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(\tilde{j}(p) e^{-ip \cdot x} - \tilde{j}(p)^* e^{ip \cdot x} \right) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

gdje je Fourierov transformat od $j(x)$ definiran na standardan način:

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y e^{ip \cdot y} j(y)$$

Uočite da je $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$, tj. $p^2 = m^2$. Primjena (3.5.4) daje konačni izraz za rješenje za $t > t_f$:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\left(a_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}(p) \right) e^{-ip \cdot x} + \left(a_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}(p) \right)^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \quad , \quad t > t_f \quad (3.5.6)$$

Vidimo da je ukupni učinak izvora u vremenskom razvoju iz asimptotske prošlosti u asimptotsku budućnost dan redefinicijom operatora stvaranja i poništenja:

$$a_{\mathbf{p}} \quad (t < t_i) \quad \longrightarrow \quad A_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tilde{j}(p) \quad (t > t_f) \quad (3.5.7)$$

Može se lako zaključiti da sve veličine, poput energije i impulsa, ako se izraze pomoću operatora stvaranja i poništenja doživljavaju istu transformaciju. Tako je hamiltonijan u $t > t_f$ dan s:

$$H(t > t_f) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} A_{\mathbf{p}}^{\dagger} A_{\mathbf{p}} ,$$

operator impulsa s:

$$\mathbf{P}(t > t_f) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} A_{\mathbf{p}}^{\dagger} A_{\mathbf{p}} ,$$

a operator broja čestica s:

$$N(t > t_f) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} A_{\mathbf{p}}^{\dagger} A_{\mathbf{p}}$$

Pošto operatori $A_{\mathbf{p}}$ i $A_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ očito zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao $a_{\mathbf{p}}$ i $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, možemo zaključiti da je vakuum za $t > t_f$ određen s $A_{\mathbf{p}}|0_+\rangle = 0$ i da se djelovanjem operatora $A_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ na bilo koje stanje stvara čestica impulsa $\mathbf{p}$. Obratite pažnju da vakuum u $t < t_i$ nije jednak vakuumu u $t > t_f$ (veza između dva vakuumata je dio zadatka 3.5.1).

Pretpostavimo sada da je u $t < t_i$ sustav bio u stanju s fiksnim brojem čestica n . Očekivana vrijednost promjene energije je stoga dana s:

$$\Delta E \equiv \langle n | H(t > t_f) | n \rangle - \langle n | H(t < t_i) | n \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\tilde{j}(p)|^2$$

Slično za promjenu impulsa dobijamo:

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \langle n | \mathbf{P}(t > t_f) | n \rangle - \langle n | \mathbf{P}(t < t_i) | n \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\tilde{j}(p)|^2$$

a za promjenu broja čestica

$$\Delta N \equiv \langle n | N(t > t_f) | n \rangle - \langle n | N(t < t_i) | n \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\tilde{j}(p)|^2 \quad (3.5.8)$$

gdje je u sva tri izraza $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Vidimo da djelovanje vanjskog polja, čak i kad je klasičnog tipa, omogućuje **tvorbu čestica** što vrijedi čak i ako je početno stanje u $t < t_i$ bilo vakuum. Ovdje ponovo vidite zašto je svaki pokušaj konstrukcije jednočestične relativističke kvantne mehanike osuđen na propast. Naprosto, relativistika i sačuvanje broja čestica ne idu ruku pod ruku. Uočite da samo modovi od $\tilde{j}(p)$ koji su u rezonanciji s on-shell masenim uvjetom $p^2 = m^2$ doprinose ovom efektu, što znači da izvor $j(x)$ mora biti dovoljno brzo promjenjiva funkcija u vremenu. Očito je da stacionarni vanjski izvor ($\partial_0 j(x) = 0$) ne može izazvati efekt tvorbe čestica.

Može izgledati zbunjujuće da se energija sustava promijenila, no razlog je vrlo jednostavan. U ovom slučaju $j(x)$ je vremenski promjenjiva funkcija pa akcija više nije invarijantna na translacije u vremenu i stoga nema sačuvanja energije (sustav je "tjeran"). Izvor "tjera" polje i pritom izmjenjuje energiju s njim. Također, pošto je $j(x)$ prostorno promjenjiva funkcija akcija nije invarijantna na translacije u prostoru pa ukupni impuls nije sačuvan. Izvor "tjera" polje (sjetite se tjeranog harmoničkog oscilatora) i snabdjeva ga energijom i impulsom.¹⁵ Zakoni sačuvanja vrijede samo u asimptotskim područjima $t < t_i$ i $t > t_f$, u kojima je $j(x) = 0$.

Ovaj efekt postoji u svim kvantnim teorijama polja. Dva čuvena primjera su:

¹⁵Ta energija i impuls dolaze od vanjskog "agregata", tj. sustava koji generira i održava vanjsko polje $j(x)$.

1. **Schwingerov efekt:** Ako primjenimo dovoljno jako električno polje, iz vakuuma bi se trebali kreirati parovi čestica-antičestica. Razlog tvorbe parova a ne pojedinačnih čestica je sačuvanje električnog naboja. S obzirom da je elektron najlakša nabijena čestica, najlakše je kreirati parove elektron-pozitron. Važno je istaknuti da je u kvantnoj elektrodinamici tvorba čestica moguća čak i ako su polja statična ($\dot{\mathbf{E}} = 0$, $\mathbf{B} = 0$), i taj mehanizam je *neperturbativan*. Problem je što račun pokazuje da je za postizanje značajnije vjerojatnosti potrebno vrlo snažno električno polje iznosa $|\mathbf{E}| > \frac{m_e^2}{e} \approx 10^{18} \text{ V/m}$. Ovako jako polje još uvijek nije postignuto, čak ni uz primjenu najjačih lasera, tako da Schwingerov efekt još uvijek nije eksperimentalno potvrđen. Očekuje se da će nova generacija lasera, koja je upravo u izradi, moći postići dovoljnu snagu da testira postojanje Schwingerovog efekta.

Zanimljivo je da koristeći Schwingerov efekt možemo argumentirati da ne mogu postojati stabilni atomi rednog broja većeg od $Z \approx 137$. Iz Coulombovog zakona dobijamo da je iznos električnog polja u okolini jezgre dan s

$$|\mathbf{E}| \sim \frac{Ze}{4\pi r^2} \sim \frac{Ze}{4\pi m_e^{-2}}$$

gdje smo za radijus uzeli Comptonovu valnu duljinu elektrona $\lambda_e = 1/m_e$, jer smo za valne duljine $\lambda > 1/m_e$ sigurni u rezultat za račun tvorbe para iz vakuuma. Izjednačavanje tog električnog polja s kritičnim ($|\mathbf{E}_c| = m_e^2/e$) daje za kritični redni broj:

$$Z_{\text{krit}} \sim \frac{4\pi}{e^2} = \frac{1}{\alpha_e} \approx 137$$

Dakle, atomi s jezgrama koje imaju $Z \gtrsim 137$ će biti nestabilni na Schwingerov efekt.

2. **Hawkingovo zračenje:** Ako se kvantno polje nalazi u zakrivljenom prostor vremenu, to ima sličan efekt kao da postoji vanjski izvor. To pak znači da vremenska promjena metrike prostora može inducirati tvorbu čestica. Teorija predviđa da se taj efekt događa na horizontima crnih rupa stvarajući tzv. Hawkingovo zračenje. Na žalost snaga Hawkingovog zračenja za velike crne rupe je vrlo slaba, toliko da je za puno redova veličine zasjenjeno zračenjem koje emitira materija koja pada u crnu rupu. Uz današnju tehnologiju, jedini način za detekciju Hawkingovog zračenja bi bio iz izoliranih mikroskopskih crnih rupa. Neki znanstvenici su se nadali da bi se takve crne rupe mogle stvarati u sudarima na LHC akceleratoru, no to je više *science fiction* maštanje nego rezultat stvarnih proračuna u okvirima realističnih teorija.

Zadatak 3.5.1: Razmotrite situaciju u kojoj se kvantno polje u $t < t_i$ nalazilo u vakuumskom stanju $|0_-\rangle$, $a_{\mathbf{p}}|0_-\rangle = 0$.

- (a) Koristeći rezultate iz zadatka 3.4.1 pokažite da se vakuum definiran u $t > t_f$ može napisati na sljedeći način

$$|0_+\rangle = \mathcal{N} \exp\left(-i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \tilde{j}(p)\right), \quad \mathcal{N} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} |\tilde{j}(p)|^2\right) \quad (3.5.9)$$

tj., da je koherentno stanje kad ga se napiše pomoću vakuma i operatora stvaranja i poništenja za $t < t_i$.

- (b) Koristeći gornji rezultat pokažite da je vjerojatnost pronalaska sustava u vakuumskom stanju u $t > t_f$ dana s:

$$P(0) = e^{-\lambda}$$

gdje je $\lambda \equiv \Delta N$ iz (3.5.8).

- (c) Pokažite da je vjerojatnost da ćemo sustav u $t > t_f$ pronaći u stanju s n čestica dana s:

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

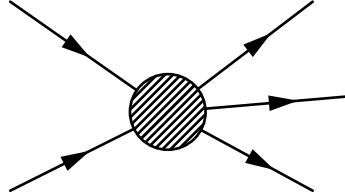
što je *Poissonova distribucija*.

3.6 Udarni presjeci i širine raspada

U kvantnoj fizici nas često zanimaju vjerojatnosti prijelaza iz nekog danog početnog stanja u trenutku t_i u neko konačno stanje u trenutku t_f , simbolički napisano $i \rightarrow f$. Kvantna mehanika nam daje procedure za računanje amplituda vjerojatnosti iz kojih se potom dobiju vjerojatnosti na način

$$\langle f; t_f | i; t_i \rangle \implies |\langle f; t_f | i; t_i \rangle|^2 \quad (3.6.1)$$

U kvantnoj teoriji polja uglavnom će nas zanimati početna i konačna stanja koja se sastoje od čestica koje su toliko međusobno udaljene da je međudjelovanje zanemarivo pa ih možemo tretirati kao slobodne.



Tipičan proces **raspršenja**, koji uključuje 2 čestice u ulaznom stanju i 3 čestice u izlaznom stanju (na svim dijagramima koje ćemo crtati vrijeme raste s lijeva na desno), je skiciran na dijagramu iznad. Zanimat će nas netrivialni procesi u kojima čestice tokom vremena dođu u “prostor međudjelovanja” (na gornjoj slici simboliziran iscrtanim krugom), tj. dio prostor-vremena u kojem su čestice dovoljno blizu da može doći do njihovog znatnijeg međudjelovanja (“sudar”), što dovodi do toga da stanje u budućnosti neće nalikovati ulaznom stanju. Nakon što protekne dovoljno vremena, izlazno stanje će imati svojstvo nekog stanja iz “izlaznog” Fockovog prostora, što znači superpozicija stanja slobodnih čestica koje se međusobno udaljavaju. Ukoliko nas zanima amplituda prijelaza u neko specifično stanje u Fockovom prostoru (na slici iznad to je stanje u kojem su nastale neke specifične 3 čestice s određenim kvantnim brojevima) govorimo o specifičnom **procesu**.

Kako bi se u potpunosti ispunio uvjet da su čestice u ulaznom i izlaznom stanju slobodne, formalno ćemo uzeti da je $t_i = -\infty$, $t_f = \infty$, jer će tada sve čestice u stanjima biti na beskonačnoj međusobnoj udaljenosti (tzv. asimptotska stanja). U praksi ta vremena naravno nisu beskonačna no dovoljno je da su bitno veća od vremena trajanja međudjelovanja, što je obično samo djelić sekunde.

Važna veličina koja će nas zanimati je **S-matrica** koja se definira kao:

$$\langle f | S | i \rangle \equiv \langle f; t_f = \infty | i; t_i = -\infty \rangle \quad (3.6.2)$$

gdje su $|i\rangle$ i $|f\rangle$ stanja u **neinteragirajućoj teoriji** (tj. teoriji slobodnih čestica). Naš cilj će biti razviti procedure za računanje S-matrice. No, za početak ćemo uvesti neke standardne mjerljive veličine koje se koriste u opisima procesa raspršenja.

3.6.1 Udarni presjeci

Udarni presjek za sudare čestica dobije se generalizacijom istog pojma koji ste definirali na predavanjima iz klasične i kvantne mehanike. Ako na neku metu nalijeće snop čestica koji se na njoj raspršuje, udarni presjek σ se definira kao:

$$\sigma = \frac{\text{broj raspršenih čestica}}{\text{vrijeme} \times \text{gustoća čestica u snopu} \times \text{brzina čestica u snopu}} = \frac{1}{T} \frac{N}{\Phi}$$

gdje je N broj raspršenih čestica, Φ tok upadnih čestica (gustoća broja čestica puta brzina čestica), i T vrijeme trajanja eksperimenta. Možemo definirati **diferencijalni** udarni presjek $d\sigma/d\Omega$, gdje je $d\sigma$ broj raspršenih čestica u infinitezimalni element prostornog kuta $d\Omega$.

U kvantnoj mehanici udarne presjeke definiramo pomoću vjerojatnosti

$$d\sigma = \frac{1}{T} \frac{dP}{\Phi}, \quad dP = \frac{N}{N_{\text{upada}}} \quad (3.6.3)$$

gdje je N_{upada} ukupni broj čestica koje su napucane na metu, tok Φ je sada normaliziran kao da je u upadnom snopu samo jedna čestica, a dP je diferencijalna vjerojatnost raspršenja u stanja s nekim svojstvima (najčešće u diferencijalni element kinetičkih varijabli izlaznog stanja).

Veličina koja se često koristi u eksperimentalnoj fizici, pogotovo na sudaračima čestica, je **luminozitet** L , koji se definira kao

$$dN = L d\sigma \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{N}{\sigma T}$$

Iz praktičnih razloga teško je organizirati (pa se i u prirodi rijetko događaju) istovremene sudare više od dvije čestice (tzv. **dvočestični procesi**), pa ćemo se fokusirati na procese tipa

$$2 \longrightarrow N \quad , \quad p_1 + p_2 \longrightarrow p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_N$$

gdje su čestice u ulaznom i izlaznom stanju karakterizirane impulsom (i spinom i drugim kvantnim brojevima nužnim za potpuno specificiranje stanja, no ove oznake nećemo pisati već ćemo ih podrazumijevati). Proces u kojima se raspršuje više čestica se najčešće sastoje od nezavisnih uzastopnih dvočestičnih procesa, pa pripadne vjerojatnosti dobijemo množenjem vjerojatnosti dvočestičnih procesa).

Da bi ulazna i izlazna stanja bila fizikalna, čestice ne mogu nositi točno definirani impuls već postoji glatka normalizabilna (kvadratno integrabilna) valna funkcija u p -prostoru. To ujedno osigurava da se radi o lokaliziranim valnim paketima u x -prostoru, što je nužan uvjet da možemo govoriti o slobodnim česticama u početnom i konačnom stanju. Stoga, kad govorimo o čestici impulsa $\mathbf{p}$ prešutno pretpostavljamo da je ona ustvari opisana normalizabilnom valnom funkcijom koja je toliko oštro lokalizirana oko impulsa $\mathbf{p}$ da za većinu praktičnih potreba možemo uzeti da je u stanju $|\mathbf{p}\rangle$. To je puno praktičnije u računima nego raditi s valnim paketima, što zna biti nespretno i činiti izraze nepotrebno kompliciranima. Doduše, to će u par situacija zahtijevati korištenje nekih trikova kod izvoda, poput normalizacije u kutiji.

U sustavu mirovanja jedne ulazne čestice (“meta” u laboratorijskom sustavu) vrijedi

$$\Phi = \frac{|\mathbf{v}|}{V}$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina druge ulazne čestice (“projektil”), a V ukupni volumen prostora koji zauzima čestica. U drugim sustavima, u kojima se obje čestice gibaju, gornja relacija prelazi u

$$\Phi = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{V}$$

pa stoga (3.6.3) postaje

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{dP}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \quad (3.6.4)$$

Vjerojatnosti pak dobijemo iz normaliziranih amplituda prijelaza

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} d\Pi \quad (3.6.5)$$

gdje je $d\Pi$ infinitezimalni element u prostoru impulsa konačnog stanja $|f\rangle$. Da bi izvrjednili veličine u (3.6.5) najspretnije je koristiti normalizaciju u kutiji koju smo objasnili u odjeljku 3.2.7. U tom slučaju možemo napisati

$$\Delta\Pi = \prod_{j=1}^N \Delta n'_{jx} \Delta n'_{jy} \Delta n'_{jz} \quad \Longrightarrow \quad d\Pi = \prod_{j=1}^N \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}'_j \quad (3.6.6)$$

gdje smo koristili korespondenciju (3.2.40). Normalizacija stanja $|i\rangle$ i $|f\rangle$ je pak

$$\begin{aligned} \langle i|i\rangle &= \langle \mathbf{p}_1|\mathbf{p}_1\rangle \langle \mathbf{p}_2|\mathbf{p}_2\rangle = (2\pi)^3 2E_1 \delta^3(0) (2\pi)^3 2E_2 \delta^3(0) = 4E_1 E_2 V^2 \\ \langle f|f\rangle &= \prod_{j=1}^N \langle \mathbf{p}'_j|\mathbf{p}'_j\rangle = \prod_{j=1}^N (2E'_j V) \end{aligned}$$

gdje smo koristili korespondenciju (3.2.39), i gdje su $E_{1,2}$ energije čestica u početnom stanju a E'_j energije čestica u finalnom stanju.

Razmotrimo malo opća svojstva S-matrice koristeći “perturbativni” način razmišljanja. Ukoliko bi teorija bila slobodna, bez međudjelovanja, ne bi uopće bilo raspršenja i S-matrica bi bila jednaka jediničnoj matrici, $S = 1$. To znači da učinak međudjelovanja možemo izolirati tako da napišemo

$$S = 1 + i\mathcal{T} \quad (3.6.7)$$

gdje se $\mathcal{T}$ naziva **transfer matrica** i ona sadrži svu informaciju o međudjelovanjima. Pošto pretpostavljamo sačuvanje energije i impulsa, očekujemo da $\mathcal{T}$ mora biti oblika

$$\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M} \quad , \quad p_i = p_1 + p_2 \quad , \quad p_f = \sum_{j=1}^N p'_j \quad (3.6.8)$$

gdje je $\mathcal{M}$ **invarijantna amplituda**. Uvrštavanje u (3.6.7) daje

$$\langle f|(S-1)|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f|\mathcal{M}|i\rangle \quad (3.6.9)$$

Pretpostavit ćemo sada da nas zanima **generički matrični element** $|f\rangle \neq |i\rangle$ i ostaviti razmatranje posebnog slučaja u kojem je $|f\rangle = |i\rangle$ (eng. forward scattering) za drugu prigodu. U tom slučaju jedinica u gornjem izrazu ne doprinosi i imamo

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = (2\pi)^8 [\delta^4(p_f - p_i)]^2 |\langle f|\mathcal{M}|i\rangle|^2$$

Kvadrat Diracove δ funkcije, koji matematički nema smisla i pojavljuje se zato što nismo radili s normalizabilnim valnim funkcijama, ćemo izvrijedniti koristeći normalizaciju u kutiji:

$$[\delta^4(p_f - p_i)]^2 = \delta^4(0) \delta^4(p_f - p_i) = \frac{TV}{(2\pi)^4} \delta^4(p_f - p_i)$$

gdje se, zbog toga što imamo 4-dimenzionalnu δ funkciju, sada pojavljuje volumen u 4-dimenzionalnom prostoru-vremenu $V_4 = VT$. Uvrštavanje toga gore daje

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = (2\pi)^4 TV \delta^4(p_f - p_i) |\langle f|\mathcal{M}|i\rangle|^2$$

Sad možemo ovo, skupa s (3.6.6) uvrstiti nazad u (3.6.5) i dobiti

$$dP = \frac{T}{V} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(2E_1)(2E_2)} d\Pi_{\text{LIPS}} \quad , \quad \mathcal{M}_{fi} \equiv \langle f|\mathcal{M}|i\rangle \quad (3.6.10)$$

gdje je

$$d\Pi_{\text{LIPS}} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{j=1}^N \frac{d^3\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \quad (3.6.11)$$

Lorentz invarijantan infinitezimalni element faznog prostora čestica u konačnom stanju. Lorentz invarijantnost mjere integracije $d\Pi_{\text{LIPS}}$ je predmet zadatka 3.6.1.

Ako uvrstimo (3.6.10) u (3.6.4) dobijamo konačni izraz za diferencijalni udarni presjek

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} d\Pi_{\text{LIPS}} \quad (3.6.12)$$

Konačno, veličina koja će nas također zanimati je totalni udarni presjek σ za dani skup čestica u izlaznom stanju koji se dobije integracijom diferencijalnog udarnog presjeka po čitavom faznom prostoru:

$$\sigma_f = \frac{1}{S_f} \int d\sigma_f \quad (3.6.13)$$

gdje je S faktor simetrije koji za svaki skup od n_j istovrsnih čestica u konačnom stanju sadrži faktor $n_j!$, koji kompenzira višestrukosti koje generira integracija po faznom prostoru. U slučaju kad su sve čestice u konačnom stanju različite, $S = 1$.

Zadatak 3.6.1: Pokažite da vrijedi

$$\int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) f(p) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} f(p^0 = E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \quad (3.6.14)$$

gdje je $f(p)$ proizvoljna funkcija 4-impulsa p , a $\theta(x)$ je step-funkcija definirana s

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.6.15)$$

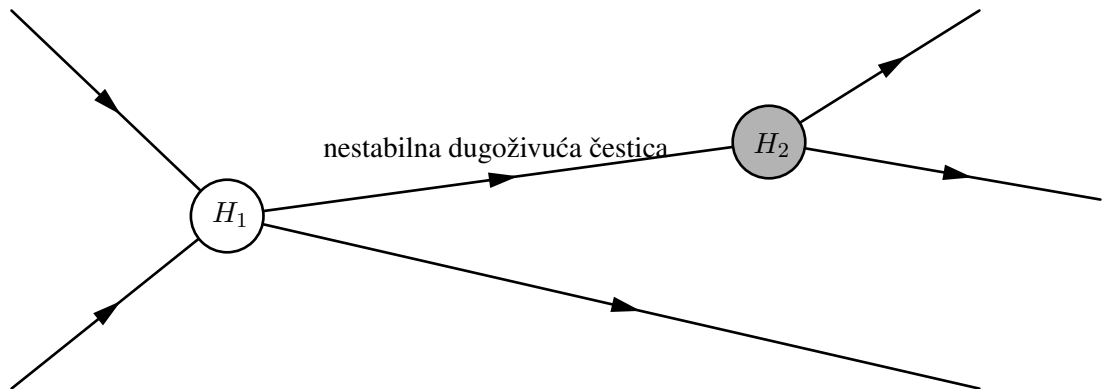
Pošto su i d^4p i $\delta^4(p^2 - m^2)$ i $\theta(p^0)$ invarijantni na Lorentzove transformacije, formula (3.6.14) pokazuje da je mjera $d^3\mathbf{p}/(2E_{\mathbf{p}})$ Lorentz invarijantna.

3.6.2 Brzina raspada

Poseban slučaj procesa je onaj u kojem se u početnom stanju nalazi samo jedna čestica:

$$1 \longrightarrow N \quad , \quad p_1 \longrightarrow p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_N \quad (3.6.16)$$

To je proces koji opisuje **raspad nestabilne čestice**. Strogo uzevši, nestabilna čestica ne može biti element asimptotskih prostora stanja koji se matematički definiraju u $t \rightarrow \pm\infty$, jer nakon beskonačno vremena vjerojatnost pronalaska takve čestice je nula. Stoga bi se moglo prigovoriti da nije ispravno koristiti S-matricu za računanje raspada čestica. No, u praksi postoje situacije (i nisu rijetke) u kojima je ovakav opis ipak primjenjiv, u smislu aproksimativnog računa. Na primjer, razmotrimo situaciju u kojoj hamiltonijan ima oblik $H = H_1 + \lambda H_2$, gdje je konstanta vezanja λ dovoljno malena da je perturbativni razvoj po njoj smislen, a čestica koju razmatramo je stabilna za $\lambda = 0$, tj. nestabilnost uzrokuje perturbacija λH_2 . U tom slučaju čestica može nastati u procesu za koji je odgovoran dio hamiltonijana H_1 i ako je perturbacija malena možemo očekivati da je vrijeme života čestice dovoljno veliko tako da će ona u pravilu prevaliti veliki put prije nego se raspadne pod utjecajem perturbacije (ovo je slikovito prikazano na dijagramu ispod). Očito je da u ovakvom perturbativnom računu možemo tretirati česticu kao da je efektivno u asimptotskom ulaznom stanju i računati pripadne S-matrične elemente.



Diferencijalna brzina raspada, tj. vjerojatnost da će se čestica s impulsom p_1 raspasti u specifično višestručno stanje s impulsima p'_j u infinitezimalnom elementu faznog prostora u jedinici vremena, je dana s

$$d\Gamma_f = \frac{dP_f}{T} \quad (3.6.17)$$

Slična procedura kojom smo dobili formulu (3.6.12) za diferencijalni udarni presjek u ovom slučaju daje

$$d\Gamma_f = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_1} d\Pi_{\text{LIPS}} \quad (3.6.18)$$

Često nas zanima **parcijalna brzina raspada**, tj. brzina raspada u dani skup čestica u konačnom stanju f , koja se dobije iz diferencijalne brzine raspada integracijom po faznom prostoru stanja (uključujući sumaciju po spinovima)

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \int d\Gamma_f \quad (3.6.19)$$

gdje je S ponovo isti faktor simetrije kao u (3.6.13). **Ukupna brzina raspada** se dobije sumiranjem po svim mogućim modovima raspada čestice

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f$$

Ukoliko u trenutku t imamo $N(t)$ nestabilnih čestica, koje su sve u istom stanju, tada iz definicije ukupne brzine raspada slijedi da će očekivani broj čestica koje će se raspasti u intervalu $(t, t + dt)$ biti dan s $\Gamma N(t) dt$. Iz toga slijedi da je promjena broja čestica dana jednadžbom

$$dN(t) = -\Gamma N(t) dt \quad \implies \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t)$$

Integriranje ove jednostavne obične diferencijalne jednadžbe (metodom separacije varijabli) daje da će očekivani broj čestica u trenutku t biti dan formulom:

$$N(t) = N(0) e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = \frac{1}{\Gamma}$$

gdje je τ srednje vrijeme života čestice.

3.6.3 Posebni slučajevi

Razmotrit ćemo neke vrste procesa koji se često javljaju u praksi, a za koje se integracije po faznom prostoru impulsa mogu analitički napraviti.

Raspršenje $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ u sustavu centra masa

Vrlo često nas zanima raspršenje dvije čestice u dvije čestice u sustavu centra masa (CM)

$$p_1 + p_2 \longrightarrow p'_1 + p'_2$$

U CM sustavu zakoni očuvanja nameću veze $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ i $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$. Uvodimo ukupnu energiju u sustavu CM: $E_{\text{CM}} = E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$. Pošto se ove veze u izrazu za udarni presjek nameću delta funkcijom, možemo ih odmah uvrstiti u matrični element $\mathcal{M}_{fi}$. Iz (3.6.11) dobijamo

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \quad (3.6.20)$$

Ukoliko uvrstimo ovo u (3.6.12) te potom prointegriramo po $\mathbf{p}'_2$ koristeći δ funkciju, te pređemo na polarni koordinatni sustav pri integraciji po $\mathbf{p}'_1$, dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \int_0^\infty dp_f \frac{p_f^2}{E'_1 E'_2} \delta(E'_1 + E'_2 - E_{\text{CM}}) |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

gdje je $d\Omega$ element prostornog kuta u prostoru impulsa $\mathbf{p}'_1$, i gdje su

$$p_f = |\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2|, \quad E'_j = \sqrt{p_f^2 + m_j'^2}, \quad j = 1, 2$$

U ovom trenutku je praktično napraviti supstituciju varijable integracije $p_f \rightarrow x = E'_1 + E'_2 - E_{\text{CM}}$, s tim da držimo E_{CM} fiksnim. Za prelazak na varijablu x treba nam jakobijan transformacije

$$\frac{dp_f}{dx} = \left(\frac{dx}{dp_f} \right)^{-1} = \left(\frac{p_f}{E'_1} + \frac{p_f}{E'_2} \right)^{-1} = \frac{E'_1 E'_2}{E'_1 + E'_2} \frac{1}{p_f}$$

pa dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \int_{x(0)}^\infty dx \delta(x) \frac{p_f |\mathcal{M}_{fi}|^2}{E'_1 + E'_2} = \frac{p_f |\mathcal{M}_{fi}|^2 \theta(E_{\text{CM}} - m'_1 - m'_2)}{(8\pi)^2 E_1 E_2 E_{\text{CM}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}$$

gdje je $x(0) \equiv x(p_f = 0) = m'_1 + m'_2 - E_{\text{CM}}$ a $\theta(x)$ je step-funkcija definirana s

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

i njena uloga je očito da “pazi” da se proces može dogoditi samo ako početno stanje ima dovoljnu energiju. Kako u sustavu CM vrijedi

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \left| \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2} \right| = |\mathbf{p}_1| \frac{E_{\text{CM}}}{E_1 E_2}$$

konačan rezultat za diferencijalni udarni presjek u sustavu centra masa je

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathbf{p}'_1|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \theta(E_{\text{CM}} - m'_1 - m'_2) \quad (3.6.21)$$

U posebnom slučaju kada čestice u konačnom stanju imaju jednaku masu kao čestice u početnom stanju, tj. $m_1 = m'_1$ i $m_2 = m'_2$ (**elastično raspršenje**), vrijedi $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}'_1|$, pa gornja jednadžba glasi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}, \quad (m_1 = m'_1, \quad m_2 = m'_2) \quad (3.6.22)$$

Elastično raspršenje $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ u laboratorijskom sustavu

Laboratorijski sustav je sustav u kojem jedna upadna čestica **miruje**. U ovom slučaju mirujuća upadna čestica se naziva **meta**, a gibajuća upadna čestica **projektil**. Elastično raspršenje znači da se mase upadnih i izlaznih čestica podudaraju, tj. $m_1 = m'_1$ i $m_2 = m'_2$

Ako metu označimo s 2, a projektil s 1, diferencijalni udarni presjek je dan s

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}'_1)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2}{m_2 |\mathbf{p}_1| |(E_1 + m_2)| \mathbf{p}'_1| - |\mathbf{p}_1| E'_1 \cos \theta|} \quad (3.6.23)$$

gdje je θ kut između $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}'_1$.

U posebnom slučaju kad je projektil bezmasen ($m_1 = 0$) gornja formula se pojednostavljuje u

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \left(\frac{E'_1}{8\pi m_2 E_1}\right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (3.6.24)$$

Zadatak 3.6.2: Dokažite (3.6.23) i (3.6.24).

Raspad $1 \rightarrow 1' + 2'$

U slučaju najjednostavnijeg procesa raspada u dvije čestice $1 \rightarrow 1' + 2'$, gdje radi jednostavnosti radimo u sustavu CM u kojem ulazna čestica miruje ($\mathbf{p}_1 = 0$), koristeći (3.6.18) i (3.6.19) lako se pokaže da je parcijalna brzina raspada dana s

$$\Gamma_f = \frac{1}{S} \frac{|\mathbf{p}|}{8\pi m_1^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (3.6.25)$$

gdje je $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$. Faktor simetrije konačnog stanja S je definiran kao i prije. Vidimo da je u ovom slučaju sva integracija u potpunosti određena kinematikom i da smo je mogli napraviti bez ikakvog poznavanja dinamike (tj. $\mathcal{M}_{fi}$). U slučaju raspada u tri čestice ovo svojstvo više ne vrijedi.

Zadatak 3.6.3: Dokažite (3.6.25).

3.6.4 Nerelativistički limes

U nerelativističkom limesu, tj. režimu u kojem su iznosi svih impulsa čestica $|\mathbf{p}|$ puno manji od njihovih masa, možemo usporediti rezultate s onima dobijenima primjenom nerelativističke kvantne mehanike. Pošto u nerelativističkoj kvantnoj mehanici nema stvaranja ni poništenja čestica, to implicira da su čestice 1 i $1'$ istovrsne, kao i 2 i $2'$ (elastično raspršenje), iz čega slijedi $m_1 = m'_1$ i $m_2 = m'_2$. Iz definicionih jednadžbi (3.6.7)-(3.6.9) nije teško pokazati da je invarijantna amplituda $\mathcal{M}$ povezana s nerelativističkom amplitudom raspršenja $f(\mathbf{k})$ u CM sustavu putem relacije

$$\mathcal{M}_{fi} \approx 8\pi E_{\text{CM}} f(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \approx 8\pi(m_1 + m_2) f(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (3.6.26)$$

gdje je $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ i $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}'_1$, koja vrijedi ukoliko su čestice koje se sudaraju **različite**. U drugoj jednakosti smo koristili nerelativističku aproksimaciju u kojoj je $E_{\text{CM}} \approx m_1 + m_2$. Ukoliko su čestice **identične**, relacija ima oblik

$$\mathcal{M}_{fi} \approx 8\pi(m_1 + m_2) [f(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \pm f(-\mathbf{p}' - \mathbf{p})] \quad (3.6.27)$$

gdje se predznak $+$ odnosi na bozone, a predznak $-$ na fermione. Najniži red (drvasta aproksimacija) Feynmanovog računa odgovara **Bornovoj aproksimaciji** u nerelativističkoj teoriji, u kojoj je:

$$f(\mathbf{k}) \approx -\frac{\mu}{2\pi} \tilde{V}(\mathbf{k}) \quad , \quad \tilde{V}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \quad (3.6.28)$$

gdje je $V(\mathbf{x})$ potencijalna energija međudjelovanja čestica u nerelativističkoj mehanici, dok je μ reducirana masa čestica,

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Vidimo da nam formule (3.6.26)-(3.6.28) daju recept za izračunavanje klasične nerelativističke potencijalne energije međudjelovanja čestica koje se sudaraju pomoću invarijantne amplitude $\mathcal{M}$. U slučaju različitih čestica recept nam daje formulu:

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) \approx -\frac{\mathcal{M}_{fi}}{4 m_1 m_2} \quad (3.6.29)$$

Komentari:

1. U slučaju identičnih čestica (za koje kvantna teorija polja kaže da su nerazpoznatljive), $\mathcal{M}$ u gornjoj formuli treba zamijeniti pripadnom "polovicom", u skladu s formulom (3.6.27).
2. Činjenica da nam invarijantna amplituda $\mathcal{M}$ između ostalog daje i potencijalnu energiju omogućava nam analizu vezanih stanja. Ovo je samo jedan primjer koji demonstrira da je u $\mathcal{M}$ skrivena velika informacija o danoj teoriji polja (ali ne i potpuna).
3. Drvasta aproksimacija nam daje izraz za klasični potencijal. U Feynmanovom razvoju za kvantnu teoriju polja postoje dijagrami s petljama koji također odgovaraju Bornovoj aproksimaciji, u smislu da imaju samo jednu "prečku". Doprinos ovih dijagrama daje kvantnu korekciju nerelativističkoj potencijalnoj energiji. Na primjeru Yukawa teorije u odjeljku 4.16.3 razjasnit ćemo ovo detaljnije, a na primjeru spinorne kvantne elektrodinamike u odjeljku 5.5.3 izračunat ćemo prvu kvantnu korekciju potencijalnoj energiji.

3.7 S-matrica i vremensko uređenje

U prošlom odjeljku uveli smo S-matricu koja opisuje raspršenja čestica kao

$$\langle f|S|i\rangle \equiv \langle f; t = \infty | i; t = -\infty \rangle \quad (3.7.1)$$

Sada krećemo u razvoj tehnika koje nam omogućuju računanje elemenata S-matrice, odnosno njenog netrivialnog dijela, invarijantne amplitude $\mathcal{M}$. Kao što smo objasnili u prethodnom poglavlju, pretpostavljamo da je zadovoljeno:

1. Vrijeme trajanja međudjelovanja je efektivno ograničeno.
2. Asimptotska stanja $|i; t = -\infty\rangle$ i $|f; t = \infty\rangle$ se sastoje od skupa slobodnih čestica.

Napomenimo samo da je u tipičnim procesima u fizici čestica efektivno vrijeme međudjelovanja u procesima izuzetno kratko ($10^{-23} - 10^{-6}$ s) tako da vrijeme trajanja procesa uopće ne treba biti jako veliko da bi uvjeti bili zadovoljeni.

3.7.1 LSZ redukcijrska formula

U asimptotskom podruuju moemo uvesti operatore stvaranja i poništenja kao i u slobodnoj teoriji

$$|i; t = -\infty\rangle = \sqrt{2\omega_1} \cdots \sqrt{2\omega_n} a_{\mathbf{p}_1}^{(\text{in})\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{(\text{in})\dagger} |\Omega\rangle \quad (3.7.2)$$

$$|f; t = +\infty\rangle = \sqrt{2\omega'_1} \cdots \sqrt{2\omega'_N} a_{\mathbf{p}'_1}^{(\text{out})\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}'_N}^{(\text{out})\dagger} |\Omega\rangle \quad (3.7.3)$$

gdje oznaka “in” (“out”) govori da se radi o operatoru koji stvara slobodnu esticu u ulaznom/početnom (izlaznom/konačnom) asimptotskom Fockovom prostoru (u $t_i = -\infty$, odnosno $t_f = \infty$), n (N) broj estica u ulaznom (izlaznom) stanju (u računima će obično biti $n = 2$), i uveli smo kratice $\omega_j \equiv \omega_{\mathbf{p}_j}$ i $\omega'_j \equiv \omega_{\mathbf{p}'_j}$. Treba uočiti da je $|\Omega\rangle$ “pravi” vakuum, tj. vakuum interagirajuće teorije i da je različit od vakuuma slobodne teorije koji ćemo označavati s $|0\rangle$. Pošto je $|\Omega\rangle$ stanje najniže energije, njegova interpretacija se tijekom vremena ne mijenja i stoga je $|\Omega\rangle$ isti u ulaznom i izlaznom asimptotskom Fockovom prostoru stanja.¹⁶

Uvrštavanje (3.7.2) i (3.7.3) u (3.7.1) daje

$$\langle f|S|i\rangle = \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2\omega_j} \right) \left(\prod_{k=1}^N \sqrt{2\omega'_k} \right) \langle \Omega| a_{\mathbf{p}'_1}^{(\text{out})} \cdots a_{\mathbf{p}'_N}^{(\text{out})} a_{\mathbf{p}_1}^{(\text{in})\dagger} \cdots a_{\mathbf{p}_n}^{(\text{in})\dagger} |\Omega\rangle \quad (3.7.4)$$

gdje su stanja $|i\rangle$ i $|f\rangle$ stanja u slobodnoj teoriji s istim formalnim estičnim interpretacijama kao ona u (3.7.2) i (3.7.3) (ali ne i fizikalnim interpretacijama, u smislu mjerenja). Naš prvi cilj je napisati S-matricu koristeći fundamentalna polja u teoriji, a to su interagirajuća polja. Ponovo, radi jednostavnosti izraza pretpostavit ćemo da postoji samo jedno polje $\varphi(x)$ koje je realno i skalarno, no formule koje dobijemo se mogu poopćiti na prirodan način na proizvoljne teorije polja s bilo kojim brojem polja. Radi jednostavnosti izvoda, pretpostavit ćemo da je svaki impuls u ulaznom stanju različit od svakog impulsa u izlaznom stanju, tj. $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}'_k$ za svaki j i k , a na kraju ćemo poopćiti izraz na sve impulse.

Koristeći činjenicu da su energija i impuls generatori translacija u prostoru i vremenu, moemo pisati

$$\langle \Omega| \varphi(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle \Omega| e^{i\hat{P}\cdot x} \varphi(0) e^{-i\hat{P}\cdot x} | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip\cdot x} \langle \Omega| \varphi(0) | \mathbf{p} \rangle = \sqrt{Z} e^{-ip\cdot x}$$

gdje smo koristili $\hat{P}^\mu |\Omega\rangle = 0$ i $\hat{P}^\mu | \mathbf{p} \rangle = p^\mu | \mathbf{p} \rangle$. Konstanta Z je definirana s

$$\sqrt{Z} = \langle \Omega| \varphi(0) | \mathbf{p} \rangle$$

Pretpostavit ćemo sada da je polje $\varphi(x)$ normalizirano tako da je $Z = 1$, iz čega slijedi

$$\langle \Omega| \varphi(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip\cdot x} \quad (3.7.5)$$

Treba imati na umu da smo napravili renormalizaciju polja, što znači da polje više nije normalizirano “kanon-ski” u smislu da kinetički i maseni članovi u lagranžijanu nakon renormalizacije polja dobijaju faktor Z . Ovo treba zapamtiti jer će biti važno kad pređemo na renormalizaciju kvantnih teorija polja. Razlog zašto smo napravili ovu renormalizaciju polja je da iz (3.7.5) slijedi da renormalizirano polje ima jednaku valnu funkciju kao slobodno polje.

Kad interagirajuće polje napišemo koristeći Fourierov transformat dobijemo

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}}(t) e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}(t)^\dagger e^{ip\cdot x} \right)$$

¹⁶Da ne bi bilo zabune razjasnimo malo ovu stvar. Postoji samo jedan prostor stanja teorije pa ulazni i izlazni Fockov prostor stanja opisuju isti prostor stanja. Ono što se vremenom mijenja je interpretacija tih stanja, npr. stanje napisano u (3.7.2) će u $t \rightarrow -\infty$ izgledati kao skup n nezavisnih slobodnih estica fiksnih impulsa, no tijekom vremena uslijed međudjelovanja njegova interpretacija se mijenja pa u $t \rightarrow \infty$ ono će općenito izgledati kao superpozicija stanja u (3.7.3) koja razapinju izlazni Fockov prostor (imajte na umu da koristimo Heisenbergovu sliku u kojoj su stanja statična, a vremensku promjenu doživljavaju operatori uključujući i i mjerljive veličine). U stvari, kad govorimo o Fockovom prostoru prešutno ćemo uvijek podrazumijevati i interpretaciju stanja putem slobodnih estica.

Zbog postojanja međudjelovanja, jednačba gibanja za polje više nije jednaka onoj za slobodno polje, i kao posljedica operatori $a_{\mathbf{p}}(t)$ nisu konstantni u vremenu. No, kad polje djeluje na asimptotska stanja u $t \rightarrow \pm\infty$ u Fockovim prostorima slobodnih čestica očito je da polje djeluje na isti način kao slobodna polja, što znači da $a_{\mathbf{p}}(t)$ i $a_{\mathbf{p}}(t)^\dagger$ postaju proporcionalni operatorima stvaranja i poništavanja asimptotski slobodnih čestica. No, jednom kad smo polje normalizirali kao u (3.7.5), možemo zaključiti da je konstanta proporcionalnosti jednaka 1 pa imamo

$$a_{\mathbf{p}}(-\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}}^{(\text{in})}, \quad a_{\mathbf{p}}(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}}^{(\text{out})} \quad (3.7.6)$$

Može se pokazati da vrijedi (dokaz se može pronaći u Schwartzovom udžbeniku, na stranici 71.)

$$i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\square + m^2) \varphi(x) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (3.7.7)$$

Kompleksna konjugacija daje

$$i \int d^4x e^{-ip \cdot x} (\square + m^2) \varphi(x) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(-\infty)^\dagger - a_{\mathbf{p}}(\infty)^\dagger] \quad (3.7.8)$$

Nakon upotrebe (3.7.6) vidimo da su operatori u (3.7.4) poslagani u vremenskom uređenju, koje se definira na sljedeći način (na primjeru produkta dva lokalna operatora)

$$T\{A(x)B(y)\} \equiv \theta(x^0 - y^0) A(x)B(y) + \theta(y^0 - x^0) B(y)A(x) \quad (3.7.9)$$

Primjenom vremenskog uređenja (3.7.4) možemo napisati kao

$$\begin{aligned} \langle f|S|i \rangle = & \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{2\omega_j} \right) \left(\prod_{k=1}^N \sqrt{2\omega'_k} \right) \langle \Omega | T \left\{ [a_{\mathbf{p}'_1}(\infty) - a_{\mathbf{p}'_1}(-\infty)] \cdots [a_{\mathbf{p}'_N}(\infty) - a_{\mathbf{p}'_N}(-\infty)] \right. \\ & \left. \times [a_{\mathbf{p}_1}(-\infty)^\dagger - a_{\mathbf{p}_1}(\infty)^\dagger] \cdots [a_{\mathbf{p}_n}(-\infty)^\dagger - a_{\mathbf{p}_n}(\infty)^\dagger] \right\} | \Omega \rangle \end{aligned}$$

gdje članovi koje smo dodali u odnosu na (3.7.4) iščezavaju kao posljedica vremenskog uređenja. Sad možemo iskoristiti (3.7.7)-(3.7.8) da napišemo gornji izraz u traženom obliku u kojem je S-matrica u potpunosti izražena pomoću polja u interagirajućoj teoriji:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 \cdots \mathbf{p}'_N | S | \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n \rangle = & \left[\prod_{j=1}^n i \int d^4x_j e^{-ip_j \cdot x_j} (\square_j + m_j^2) \right] \left[\prod_{k=1}^N i \int d^4x'_k e^{ip'_k \cdot x'_k} (\square'_k + m_k'^2) \right] \times \\ & \times \langle \Omega | T \{ \varphi(x'_1) \cdots \varphi(x'_N) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Ova izuzetno važna formula se naziva **LSZ redukcijaska formula**.

Ubrzo ćemo vidjeti da nam je u praktičnim primjenama često zanimljivija LSZ formula u p -reprezentaciji. U tu svrhu definiramo Fourierov transformat T -uređene korelacijske funkcije na sljedeći način:

$$\tilde{G}(q_1, q_2, \dots, q_k) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_k) = \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_k e^{i \sum_j q_j \cdot x_j} \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) \} | \Omega \rangle$$

Prisustvo Diracove delta funkcije je posljedica invarijantnosti na translacije u prostor-vremenu. Inverz ove relacije je:

$$\langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) \} | \Omega \rangle = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4q_k}{(2\pi)^4} e^{-i \sum_j q_j \cdot x_j} \tilde{G}(q_1, q_2, \dots, q_k) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_k)$$

Primjena gornje relacije u (3.7.10) vodi na LSZ formulu u p -reprezentaciji:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 \cdots \mathbf{p}'_N | S | \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - p'_1 - \cdots - p'_N) \left[\prod_{j=1}^n (-i)(q_j^2 - m_j^2) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{k=1}^N (-i)(q_k'^2 - m_k'^2) \right] \tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -q'_1, \dots, -q'_N) \Bigg|_{\substack{q_j = p_j \\ q'_k = p'_k}} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Iz ovog izraza slijedi da je, za slučajeve u kojima upadno i izlazno stanje nije identično, invarijantna amplituda dana s:

$$i \mathcal{M} = \left[\prod_{j=1}^n (-i)(q_j^2 - m_j^2) \right] \left[\prod_{k=1}^N (-i)(q_k'^2 - m_k'^2) \right] \tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -q'_1, \dots, -q'_N) \Bigg|_{\substack{q_j = p_j \\ q'_k = p'_k}} \quad (3.7.12)$$

Nekoliko komentara o LSZ formuli:

1. U izvodu smo koristili pretpostavku da su svi impulsi u početnom stanju različiti od svakog impulsa u konačnom stanju. Može se pokazati, koristeći analitičko produljenje, da formula vrijedi i kad je neki par impulsa jednak, $\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_j$ za neke parove (j, k) . **Dakle, formula vrijedi za svaki izbor impulsa u početnom i konačnom stanju.**
2. Vakuumske očekivane vrijednosti produkata lokalnih polja nazivaju se **korelacijske funkcije** ili **r -točkaste funkcije** (gdje se r naziva **broj nogu** a označava broj lokalnih polja u produktu, npr. LSZ formula (3.7.10) sadrži $(n + N)$ -točkastu funkciju). Kao što pokazuje i primjer LSZ formule, najčešće nas zanimaju korelacijske funkcije koje podrazumijevaju vremensko uređenje, i takve ćemo zvati **T -uređene korelacijske funkcije** ili T -uređene r -točkaste funkcije. Potpuni skup T -uređenih korelacijskih funkcija sadrži potpunu informaciju o danoj kvantnoj teoriji polja. LSZ formula je samo jedan primjer koji pokazuje kako se složene mjerljive veličine mogu u potpunosti izraziti pomoću T -uređenih korelacijskih funkcija.
3. Formula 3.7.11 nam govori da S -matrici doprinose samo reziduumi polova u $p_j^2 = m_j^2$ i $p_k'^2 = m_k'^2$, tj. samo članovi tipa $(p^2 - m^2)^{-1}$ u Laurentovom razvoju Fourierovog transformata T -uređenih korelacijskih funkcija polja daju doprinos u LSZ formuli. Iz regularnosti S -matrice očito slijedi da ovi Fourierovi transformati ne mogu sadržavati više polove, tj. članove tipa $(p^2 - m^2)^{-r}$, $r > 1$.
4. Kad se pažljivije razmotri izvod i izgled LSZ formule, može se vidjeti da je zahtjev na polja koja se pojavljuju u izrazu (3.7.10) taj da imaju neiščezavajući matični element dan u (3.7.5) i da su “ispravno” normalizirana (u smislu relacije (3.7.5)). To znači da smo umjesto “fundamentalnog” polja $\varphi(x)$ mogli upotrijebiti bilo koja polja $\mathcal{O}_r(x)$ koja zadovoljavaju relaciju

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_r(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ip \cdot x} \quad (3.7.13)$$

U tom slučaju LSZ formula ima oblik

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 \cdots \mathbf{p}'_N | S | \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n \rangle &= \left[\prod_{j=1}^n i \int d^4 x_j e^{-ip_j \cdot x_j} (\square_j + m_j^2) \right] \left[\prod_{k=1}^N i \int d^4 x'_k e^{ip'_k \cdot x'_k} (\square'_k + m_k'^2) \right] \times \\ &\times \langle \Omega | T \left\{ \mathcal{O}'_k(x'_1)^\dagger \cdots \mathcal{O}'_N(x'_N)^\dagger \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \right\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

gdje su polja $\mathcal{O}_j$ i $\mathcal{O}'_k$ bilo koja polja koja zadovoljavaju (3.7.13). Ova formula je generalnija u smislu da ako u teoriji postoji više različitih vrsta čestica, svakoj je pridružen različit operator $\mathcal{O}_r(x)$ koji “poništava” pripadno jednočestično stanje.

5. Pouka gornje generalizacije je da LSZ formula ne razlikuje elementarne od kompozitnih čestica (vezanih stanja). Važno je samo pronaći operator koji kreira danu česticu iz vakuuma.
6. LSZ formula se prirodno generalizira na proizvoljna relativistička polja.

3.7.2 Feynmanov propagator

Vidjet ćemo kasnije da će nam za potrebe perturbativnog računa trebati T -uređene 2-točkaste funkcije slobodnih polja, koje se nazivaju **Feynmanovi propagatori**.

Izračunajmo sada Feynmanov propagator za slobodno realno skalarno polje koje znamo da možemo napisati kao

$$\varphi_0(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

Feynmanov propagator je definiran kao

$$D_F(x, y) \equiv \langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(y) \} | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi_0(x) \varphi_0(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi_0(y) \varphi_0(x) | 0 \rangle \quad (3.7.15)$$

Vidimo da moramo izračunati korelator

$$\langle 0 | \varphi_0(x) \varphi_0(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} e^{i(q \cdot y - p \cdot x)} \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

Uvrštavanje ovog izraza u (3.7.15) daje

$$D_F(x, y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ip \cdot (x-y)} \right] \quad (3.7.16)$$

Sad ćemo upotrijebiti matematički identitet:

$$e^{-i\omega_{\mathbf{p}}\tau} \theta(\tau) + e^{i\omega_{\mathbf{p}}\tau} \theta(-\tau) = i \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon} \quad (3.7.17)$$

Uočimo da je izraz u uglatoj zagradi u (3.7.16) upravo oblika kao lijeva strana u (3.7.17), pa kad primijenimo gornji identitet dobijamo konačno

$$D_F(x, y) \equiv \langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(y) \} | 0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.7.18)$$

gdje smo napravili preimenovanje varijable integracije $\omega = p^0$ koju smo uključili kao nultu komponentu u 4-vektor $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$.

Važnije napomene:

1. Vidimo da vrijedi $D_F(x, y) = D_F(x - y)$. To se moglo zaključiti i unaprijed iz simetrije teorije na translacije u prostor-vremenu.
2. Iz izraza (3.7.18) lako se zaključi da je Feynmanov propagator $D_F(x, y)$ ujedno i Greenova funkcija (pomnožena s i), što znači da zadovoljava

$$(\square_x + m^2) D_F(x, y) = -i \delta^4(x - y) \quad (3.7.19)$$

Ovo svojstvo da je Feynmanov propagator pomnožen s $(-i)$ ujedno i Greenova funkcija vrijedi u svim teorijama slobodnih polja i koristit ćemo ga kasnije kod proučavanja polja neiščezavajućih spinova.

3. Vidimo da je Feynmanov propagator Greenova funkcija koja se odnosi na posebne rubne uvjete koji su određeni “ $i\epsilon$ pravilom” za manipuliranje integracije oko pola u $p^2 = m^2$ (vidi diskusiju u odjeljku 2.6, posebno dio oko jednadžbe (2.6.10)). Ponovno, ovo svojstvo je neovisno o spinu pa nam daje prečac za računanje Feynmanovog propagatora za opća polja: Izračunajte Fourierov transformat propagatora iz jednadžbe gibanja za polje vezano na vanjsku struju i onda u nazivniku napravite zamjenu¹⁷ $(p^2 - m^2) \rightarrow (p^2 - m^2 + i\epsilon)$, gdje se podrazumijeva limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ (u pravilu taj limes se ne piše eksplicitno u formulama, ali se uvijek implicitno podrazumijeva).

Vježba 3.7.1: Dokažite (3.7.17).

Jednostavnije je krenuti od desne strane jednakosti (3.7.17) i pokazati da je jednaka lijevoj. Uočimo da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \quad , \quad f(\omega) = \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\epsilon}$$

možemo izvršiti koristeći teorem o reziduumima. Za tu svrhu korisno je napraviti faktorizaciju

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} = \frac{1}{(\omega - \omega_p + i\epsilon)(\omega + \omega_p - i\epsilon)}$$

gdje smo koristili da je ϵ infinitezimalan. Vidimo da podintegralna funkcija $f(\omega)$, definirana za $\omega \in \mathbb{C}$, ima jednostavni pol u točkama $\omega_{\pm} = \pm(\omega_p - i\epsilon)$ s reziduumima

$$\text{Res } f = \pm \frac{e^{\pm i\omega_p\tau}}{2\omega_p}$$

dok je svugdje drugdje analitička. Eksponencijalni faktor u podintegralnoj funkciji omogućava nam da zatvorimo konturu integracije “polukružnicom u beskonačnosti” (tj. polukružnica beskonačnog radijusa sa središtem u ishodištu) jer čini da dio integracije po polukružnici iščezava nakon što ispravno odaberemo polukružnicu (s gornje ili donje strane realne osi). Taj odabir ovisi o predznaku od τ .

Za $\tau > 0$ treba odabrati beskonačnu polukružnicu iznad realne osi, što znači da kontura obuhvaća polove s pozitivnim imaginarnim dijelom – u ovom slučaju samo ω_- (vidi sliku¹⁸ 3.1), pa imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \oint d\omega f(\omega) = 2\pi i \text{Res } f = -i\pi \frac{e^{-i\omega_p\tau}}{\omega_p} \quad (3.7.20)$$

Za $\tau < 0$ treba odabrati beskonačnu polukružnicu ispod realne osi, što znači da kontura obuhvaća polove s negativnim imaginarnim dijelom – u ovom slučaju samo ω_+ (vidi sliku 3.2), pa imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = - \oint d\omega f(\omega) = -2\pi i \text{Res } f = -i\pi \frac{e^{i\omega_p\tau}}{\omega_p} \quad (3.7.21)$$

gdje minus nakon prvog znaka jednakosti dolazi od toga što za konturu uzimamo da ima smjer suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu.

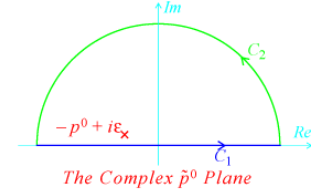
Jednakosti (3.7.20) i (3.7.21) možemo napisati u jednoj jednadžbi na sljedeći način

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} = -i \frac{\pi}{\omega_p} [e^{-i\omega_p\tau} \theta(\tau) + e^{i\omega_p\tau} \theta(-\tau)]$$

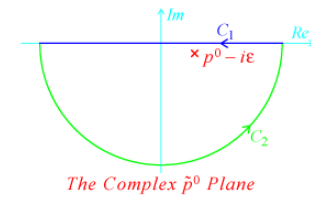
što je očito isto što i (3.7.17).

¹⁷U relativističkim teorijama uvijek će biti taj faktor u nazivniku.

¹⁸Oznake na slici su drukčije nego u tekstu, u smislu da je $p^0 = \omega_p$ i $\tilde{p}^0 = \omega$.



Slika 3.1: Kontura za $\tau > 0$.



Slika 3.2: Kontura za $\tau < 0$.

3.8 Feynmanova pravila

Vidjeli smo da se mjerljive veličine poput udarnih presjeka svode na računanje vremenski uređenih korelacijskih funkcija. No, u pravilu ove znamo izračunati egzaktno samo za slobodna polja (izuzetak su samo neke teorije polja u manjem broju dimenzija). Zbog toga smo osuđeni na dvije mogućnosti: (ili) numeričke tehnike (npr. račun na rešetki), (ili) perturbativne tehnike. U ovom odjeljku ćemo razjasniti sistematičan i učinkovit perturbativni račun poznat pod nazivom **Feynmanovi dijagrami**. Iz pedagoških razloga izvod ćemo napraviti na dva načina, lagranžijanski i hamiltonijanski.

3.8.1 Lagranžijanski izvod

Schwinger-Dysonove jednadžbe

Vidjeli smo da slobodno realno skalarno polje zadovoljava sljedeće komutacijske relacije

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.8.1)$$

gdje smo privremeno odlučili pisati $\hbar$ eksplicitno kako bi mogli vidjeti točno što su kvantni doprinosi u izrazima. Slobodno polje zadovoljava jednadžbu

$$(\square + m^2)\varphi_0 = 0 \quad (3.8.2)$$

Nas zanima interagirajuća teorija u kojoj gornja jednadžba dobija dodatne članove. Pretpostavka je da lagranžijan možemo podijeliti u slobodni i interagirajući dio

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (3.8.3)$$

gdje $\mathcal{L}_0$ sam za sebe vodi na (3.8.2), dok $\mathcal{L}_{\text{int}}$ opisuje međudjelovanje za koje ćemo ovdje, radi jednostavnosti, pretpostaviti da ne mijenja izraz za kanonski impuls $\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$, tako da komutacijske relacije (3.8.1) vrijede i nakon dodavanja međudjelovanja. Euler-Lagrangeova jednadžba daje

$$(\square + m^2)\varphi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \varphi(x)} \quad (3.8.4)$$

U slučaju kad je $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -\mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi(x))$, gdje je $\mathcal{V}$ neki polinom u polju $\varphi(x)$, gornja jednadžba postaje

$$(\square + m^2)\varphi(x) = -\frac{d\mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi(x))}{d\varphi(x)}$$

Tvrdimo da vrijedi sljedeća relacija

$$(\square_x + m^2)\langle \Omega | T\{\varphi(x) \varphi(x')\} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T\left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \varphi(x)} \varphi(x') \right\} | \Omega \rangle - i\hbar \delta^4(x - x') \quad (3.8.5)$$

Vježba 3.8.1: Dokažite (3.8.5).

Prvo razmotrimo djelovanje prve derivacije po vremenu $t = x^0$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \Omega | T\{\varphi(x) \varphi(x')\} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T\{\dot{\varphi}(x) \varphi(x')\} | \Omega \rangle + \langle \Omega | \varphi(x) \varphi(x') | \Omega \rangle \partial_t \theta(t - t') \\ &\quad + \langle \Omega | \varphi(x') \varphi(x) | \Omega \rangle \partial_t \theta(t' - t) \end{aligned}$$

gdje smo prije deriviranja uvrstili definiciju (3.7.9) za T -uređenu 2-točkastu funkciju. Sada koristimo poznatu relaciju koja povezuje step funkciju θ i Diracovu δ -funkciju:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

Upotreba ove relacije u izraz iznad daje

$$\begin{aligned}\partial_t \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T \{ \dot{\varphi}(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle + \delta(t - t') \langle \Omega | [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T \{ \dot{\varphi}(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle\end{aligned}$$

gdje smo upotrijebili prvu jednadžbu iz (3.8.1). Kada primijenimo još jednu derivaciju po t na sličan način dobijamo

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T \{ \ddot{\varphi}(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle + \delta(t - t') \langle \Omega | [\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T \{ \ddot{\varphi}(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle - i\hbar \delta^4(x - x')\end{aligned}\quad (3.8.6)$$

gdje smo sad upotrijebili drugu jednadžbu iz (3.8.1) i $\delta^4(x - x') = \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Pošto trivijalno vrijedi

$$(m^2 - \nabla_x^2) \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ (m^2 - \nabla_x^2) \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle \quad (3.8.7)$$

zbrajanjem (3.8.6) i (3.8.7) dobijamo

$$(\square_x + m^2) \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ (\square_x + m^2) \varphi(x) \varphi(x') \} | \Omega \rangle - i\hbar \delta^4(x - x')$$

što nakon primjene (3.8.4) daje (3.8.5).

Može se lako pokazati da je generalizacija (3.8.5) na T -uređene n -točkaste funkcije dana s relacijama

$$\begin{aligned}(\square_x + m^2) \langle \Omega | T \{ \varphi(x) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | T \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \varphi(x)} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \right\} | \Omega \rangle \\ &\quad - i\hbar \sum_{j=1}^n \delta^4(x - x_j) \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{j-1}) \varphi(x_{j+1}) \cdots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle\end{aligned}\quad (3.8.8)$$

koje se nazivaju **Schwinger-Dysonove jednadžbe**.

Napomene:

1. Vidimo da se kvantni učinci manifestiraju kao tzv. **kontaktni članovi** (tako se zovu jer su proporcionalni δ^4 funkcijama). Pokazat ćemo da kontaktni članovi dovode do pojave novih Feynmanovih dijagrama (u odnosu na klasičnu teoriju) koji su karakteristični po tome da sadrže zatvorene petlje.
2. Schwinger-Dysonove jednadžbe su neperturbativne relacije i kao takve imaju brojne i važne primjene i izvan Feynmanovog perturbativnog računa.

Feynmanova pravila u x -prostoru

Sad ćemo iskoristiti Schwinger-Dysonove jednadžbe za konstrukciju perturbativnog računa za korelacijske funkcije. Za početak, razmotrimo teoriju slobodnog polja u kojoj je $\mathcal{L}_{\text{int}} = 0$. Znamo otprije da je 2-točkasta funkcija u ovom slučaju jednaka Feynmanovom propagatoru

$$\langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \} | 0 \rangle = D_F(x_1, x_2)$$

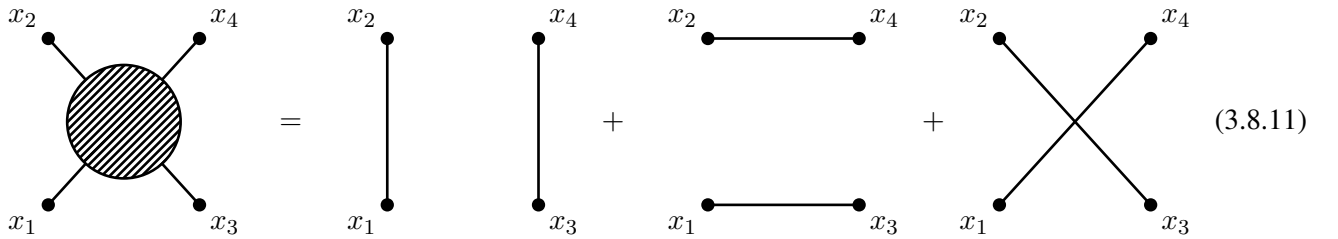
koji je dan u (3.7.18) i koji zadovoljava

$$(\square_{x_1} + m^2) D_F(x_1, x_2) = -i \delta^4(x_1 - x_2) \quad (3.8.9)$$

Koristeći Schwinger-Dysonove jednačbe i gornje izraze možemo izraziti 4-točkastu funkciju pomoću Feynmanovog propagatora

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x_3) \varphi_0(x_4) \} | 0 \rangle \\
&= \int d^4x \delta(x - x_1) \langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x_3) \varphi_0(x_4) \} | 0 \rangle \\
&= i \int d^4x [(\square_x + m^2) D_F(x, x_1)] \langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x_3) \varphi_0(x_4) \} | 0 \rangle \\
&= i \int d^4x D_F(x, x_1) (\square_x + m^2) \langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x_3) \varphi_0(x_4) \} | 0 \rangle \\
&= \int d^4x D_F(x, x_1) [\delta^4(x - x_2) D_F(x_3, x_4) + \delta^4(x - x_3) D_F(x_2, x_4) + \delta^4(x - x_4) D_F(x_2, x_3)] \\
&= D_F(x_1, x_2) D_F(x_3, x_4) + D_F(x_1, x_3) D_F(x_2, x_4) + D_F(x_1, x_4) D_F(x_2, x_3) \quad (3.8.10)
\end{aligned}$$

Postoji zgodna slikovita reprezentacija, koju smo već upotrijebili u odjeljku 2.7, putem Feynmanovih dijagrama. Ukoliko reprezentiramo svaki propagator $D_F(x_j, x_k)$ linijom koja spaja točke x_j i x_k , tada se gornji rezultat za slobodnu 4-točkastu funkciju može prikazati kao



Sada pređimo na interagirajuću teoriju. Radi preglednosti, odaberimo neki $\mathcal{L}_{\text{int}}$, npr. najjednostavniji izbor je¹⁹

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{3!} \varphi^3 \implies \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \varphi} = \frac{g}{2} \varphi^2 \quad (3.8.12)$$

gdje je g konstanta vezanja.

Razmotrimo 2-točkastu funkciju u ovoj teoriji. Ponavljanjem gornje procedure na koordinatu x_1 , koja se sastoji od, redom, uvođenja δ funkcije, korištenja (3.8.9), parcijalne integracije kako bi prebacili djelovanje diferencijalnog operatora na korelacijsku funkciju i na koncu primjene Schwinger-Dysonove jednačbe (3.8.5), dobijamo

$$\langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \} | \Omega \rangle = D_F(x_2, x_1) + \frac{ig}{2} \int d^4x D_F(x, x_1) \langle \Omega | T \{ \varphi(x)^2 \varphi(x_2) \} | \Omega \rangle$$

Kada to isto ponovimo pod integralom za koordinatu x_2 dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \} | \Omega \rangle &= D_F(x_2, x_1) + ig \int d^4x D_F(x, x_1) D_F(x, x_2) \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle \\
&\quad - \frac{g^2}{4} \int d^4x \int d^4y D_F(x, x_1) D_F(y, x_2) \langle \Omega | T \{ \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 \} | \Omega \rangle \quad (3.8.13)
\end{aligned}$$

Gornja relacija, koja je samo po sebi egzaktna, se može upotrijebiti za dobijanje perturbativnog razvoja po konstanti vezanja g . Pretpostavimo da nas zanima rezultat za 2-točkastu funkciju do drugog reda u g , tj. do i uključujući članove proporcionalne g^2 . Prvo uočimo da do traženog reda 4-točkastu funkciju koja se pojavljuje u zadnjem članu u (3.8.13) možemo zamijeniti rezultatom u najnižem redu, što znači onom za slobodna polja koju smo napisali u (3.8.10):

$$\langle \Omega | T \{ \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 \} | \Omega \rangle = 2 D_F(x, y)^2 + D_F(x, x) D_F(y, y) + O(g)$$

¹⁹U odjeljku 2.3.2 pokazali smo da ova teorija ne posjeduje stanje najniže energije, pa stoga ne zadovoljava uvjet stabilnosti vakuuma, i ne možemo ju smatrati dobrom teorijom za opis svijeta oko nas. Svejedno, vrlo često se koristi u svrhe demonstracije jer posjeduje najjednostavniji lagranžijan među svim interagirajućim teorijama polja.

Što se tiče 1-točkaste funkcije koja se pojavljuje u drugom članu u (3.8.13) ponavljanjem sad već standardne procedure dobijamo

$$\langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle = \frac{ig}{2} \int d^4y D_F(y, x) \langle \Omega | \varphi(y)^2 | \Omega \rangle = \frac{ig}{2} \int d^4y D_F(y, x) D_F(y, y) + O(g^3)$$

Uvrštavanje ovih rezultata u (3.8.13) daje

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\varphi(x_1) \varphi(x_2)\} | \Omega \rangle &= D_F(x_2, x_1) - g^2 \int d^4x \int d^4y \left[\frac{1}{2} D_F(x, x_1) D_F(x, y)^2 D_F(y, x_2) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} D_F(x, x_1) D_F(x, x) D_F(y, y) D_F(y, x_2) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} D_F(x, x_1) D_F(x, x_2) D_F(x, y) D_F(y, y) \right] + O(g^4) \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

Koristeći slikoviti prikaz pomoću **Feynmanovih dijagrama**:

$$x_1 \text{---} \text{shaded circle} \text{---} x_2 = x_1 \text{---} x_2 + x_1 \text{---} x \text{---} y \text{---} x_2 + \dots + O(g^4) \quad (3.8.15)$$

gdje ponovo svaka linija simbolizira propagator, dok čvor (točka iz koje izlaze više od dvije linije) označava integraciju pripadne varijable po čitavom prostor-vremenu.

Analizom računa kojim smo stigli do gornjeg rezultata i uz malo promišljanja da se zaključiti kako općenito “radi” ovaj perturbativni razvoj, uključujući članove višeg reda, opće T-uređene korelatore i/ili općenitija međudjelovanja.

Recept je dan **Feynmanovim pravilima** u x -prostoru:

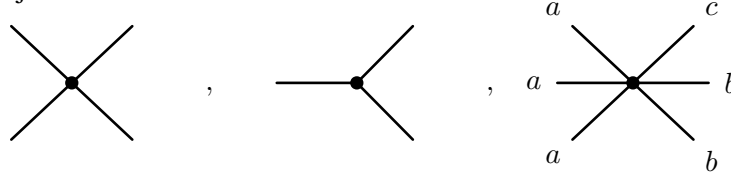
1. Započnite ucrtavanjem vanjskih točaka x_i za koordinate koje se nalaze u traženoj korelacijskoj funkciji. Nacrtajte liniju koja izlazi iz svake od tih točaka.
2. Linija se može spojiti na postojeću liniju, dajući pripadni **Feynmanov propagator** ili se može rascijepiti uslijed postojanja međudjelovanja. Rascjep daje **čvor** proporcionalan koeficijentu koji množi produkt polja u pripadnom članu u $\delta \mathcal{L}_{\text{int}} / \delta \varphi(x)$ puta imaginarna jedinica i , te daje nove linije koje izlaze iz čvora, a koje korespondiraju s poljima koja se nalaze u članu u $\delta \mathcal{L}_{\text{int}} / \delta \varphi(x)$ koji daje dotični čvor.
3. U danom redu u razvoju po konstanti vezanja, rezultat je suma doprinosa svih potpunih dijagrama (koji se mogu dobiti ponavljanjem točke 2.) koji doprinose u danom redu perturbativnog računa. Potpuni dijagram je onaj u kojem su sve linije spojene i izvršene su integracije po svim položajima na kojima se nalaze čvorovi, te (za polja koja nose neiščezavajući spin) sumacije po indeksima vezanim uz spinske i/ili interne stupnjeve slobode.

Ostaje nam za pojasniti kako se dobije točan numerički faktor koji pripada danom čvoru. Kao prvo, pokazuje se spretnim normalizirati konstante vezanja u $\mathcal{L}_{\text{int}}$ tako da se izluči faktor $1/k!$ za svako polje koje se pojavljuje s k -tom

potencijom. Navedimo par primjera mogućih članova u interakcijskom lagranžijanu²⁰

$$\frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad \frac{g}{3!} \varphi^3, \quad \frac{\kappa}{3!2!} \varphi_a^3 \varphi_b^2 \varphi_c$$

gdje su λ , g i κ konstante vezanja. U trećem primjeru međudjelovanje povezuje tri različita polja. Čvorovi pridruženi gornjim primjerima interakcijskih članova su



Sad uočimo da svaka faktorijela $1/k!$ nakon deriviranja u $\partial \mathcal{L}_{\text{int}}/\partial \varphi$ postaje $1/(k-1)!$. Taj faktor se pak krati s faktorom broja permutacija nogu koje izlaze iz čvora $((k-1)!)$. To znači da će čvor doprinositi faktor jednak konstanti vezanja, tj. λ , g i κ u gornjim primjerima.

U nekim slučajevima, koji se u praksi uglavnom sreću samo u teorijama s realnim skalarnim poljima, neke permutacije nisu različite, tj. ne daju zasebni doprinos, pa faktorije $1/k!$ nisu potpuno pokraćene. U tim slučajevima doprinos dijagrama treba podijeliti s **faktorom simetrije dijagrama**. Kao primjer, razmotrite zadnja tri dijagrama u (3.8.15):

- U zadnjem dijagramu dvije noge koje izlaze iz čvora u y su potpuno ekvivalentne i njihova zamjena ne daje različit dijagram. Stoga doprinos ovog dijagrama treba podijeliti s faktorom simetrije jednakim 2.
- U predzadnjem dijagramu imamo dvije takve situacije u točkama x i y . Stoga je faktor simetrije $2 \times 2 = 4$
- U predpredzadnjem dijagramu dvije linije koje povezuju točke x i y su potpuno ekvivalentne i njihova zamjena ne daje novi dijagram pa je faktor simetrije jednak 2.

Uočite da faktori simetrije koje smo upravo izračunali daju točno faktore $1/2$, $1/4$ i $1/2$ prisutne unutar uglatih zagrada u (3.8.14).

Ovo razmatranje nas vodi na još jedno Feynmanovo pravilo koje treba dodati trima pravilima koje smo do sada definirali:

4. Odbacite $1/k!$ faktore iz interakcijskog lagranžijana, ali potom podijelite **geometrijskim faktorom simetrije** dijagrama.

Pošto je Feynmanov račun izuzetno važna tehnikacija koja se koristi vrlo često u računima, još jednom ćemo rekapitulirati postupak. Ključna stvar je nacrtati **sve topološki različite**²¹ Feynmanove dijagrame koji se mogu konstruirati koristeći osnovne gradivne elemente i koji doprinose u traženom redu računa smetnje. Osnovni gradivni elementi su **propagatori** (po jedan za svako elementarno polje) i **čvorovi** (po jedan za svaki monom u $\mathcal{L}_{\text{int}}$). Svaki čvor doprinosi jednoj potenciji konstante vezanja koja se nalazi u pripadnom monomu u $\mathcal{L}_{\text{int}}$.

Za naš primjer teorije s jednim realnim skalarnim poljem čiji lagranžijan je dan u (3.8.12) osnovni gradivni elementi su (jedan) propagator i (jedan) čvor:

$$x \bullet \text{---} \bullet y = D_F(x, y)$$

$$\text{---} \bullet \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} = g$$

²⁰Slučaj kad se u $\mathcal{L}_{\text{int}}$ pojavljuju derivacije polja ćemo razmotriti kasnije u odjeljku 3.8.8.

²¹Topološki različit, ili neekvivalentan, znači da se ne može dobiti iz originala kontinuiranim deformacijama. Kontinuirane deformacije mogu uključivati translacije, rotacije, savijanja, uvijanja, istezanja, skupljanja, ali ne rezanja niti spajanja nepovezanih dijelova.

U ovoj teoriji dijagram s n čvorova daje doprinos proporcionalan g^n , što znači da ako računamo do nekog reda n u razvoju po konstanti vezanja g moramo nacrtati sve različite dijagrame s brojem čvorova manjim ili jednakim n . Pri tome ne treba zaboraviti podijeliti doprinos svakog dijagrama geometrijskim faktorom simetrije (ukoliko postoji).

3.8.2 Hamiltonijanski izvod

U Heisenbergovoj slici vremenski razvoj operatora dan je jednačbom

$$i\dot{\phi}(x) = [\phi(x), H]$$

čije je formalno rješenje

$$\phi(\mathbf{x}, t) = S(t, t_0)^\dagger \phi(\mathbf{x}, t_0) S(t, t_0) \quad (3.8.16)$$

gdje operator vremenskog razvoja $S(t, t_0)$ zadovoljava jednačbu

$$i \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = H(t_0) S(t, t_0) \quad (3.8.17)$$

Pretpostavit ćemo da hamiltonijan možemo razdvojiti na način

$$H = H_0 + V \quad (3.8.18)$$

gdje teoriju s $H = H_0$ znamo egzaktno riješiti. U slučaju naše “pokazne” φ^3 teorije H_0 je hamiltonijan za slobodno realno skalarno polje $\varphi(x)$, a V je

$$V(t) = \frac{g}{3!} \int d^3\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, t)^3$$

Za potrebe perturbativnog računa zgodno je prijeći u **interakcijsku** sliku u kojoj je vremenski razvoj operatora dan s H_0 , što znači da polja imaju vremenski razvoj poput slobodnih polja

$$\phi_0(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(\mathbf{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

Kombiniranjem s (3.8.16) dobijamo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = S(t, t_0)^\dagger e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_0(\mathbf{x}, t) e^{iH_0(t-t_0)} S(t, t_0) = U(t, t_0)^\dagger \phi_0(\mathbf{x}, t) U(t, t_0) \quad (3.8.19)$$

gdje smo uveli operator

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} S(t, t_0) \quad (3.8.20)$$

koji povezuje Heisenbergovu s interakcijskom slikom. Koristeći (3.8.20) i (3.8.17) dobijamo

$$\begin{aligned} i\partial_t U(t, t_0) &= i \left(\partial_t e^{iH_0(t-t_0)} \right) S(t, t_0) + i e^{iH_0(t-t_0)} \partial_t S(t, t_0) \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} [H(t_0) - H_0] S(t, t_0) \\ &= V_I(t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (3.8.21)$$

gdje smo unutar uglate zagrade iskoristili (3.8.18) i definirali

$$V_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} V(t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (3.8.22)$$

Formalno rješenje jednačbe (3.8.21) je dano **Dysonovim razvojem**

$$U(t, t_0) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right] \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T \{ V_I(t_1) \cdots V_I(t_n) \} \quad (3.8.23)$$

Izvod Dysonovog razvoja može se naći u većini udžbenika iz napredne kvantne mehanike ili kvantne teorije polja (npr. u Schwartzovom udžbeniku na str. 86).

Neka svojstva operatora $U(t_1, t_2)$

Iz definicija očit je da operatori S i U zadovoljavaju

$$S(t_1, t_2)^\dagger = S(t_2, t_1) \quad , \quad U(t_1, t_2)^\dagger = U(t_2, t_1)$$

Također je jasno da su oba operatora unitarni

$$S(t_1, t_2)^\dagger = S(t_1, t_2)^{-1} \quad , \quad U(t_1, t_2)^\dagger = U(t_1, t_2)^{-1}$$

te da zadovoljavaju

$$S(t_3, t_2) S(t_2, t_1) = S(t_3, t_1) \quad , \quad U(t_3, t_2) U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1)$$

Ova svojstva ćemo koristiti u izvodima koji slijede.

Vakuumski matrični elementi

Naš cilj će biti povezati T -uređene korelacijske funkcije u interagirajućoj teoriji s onima u koja ulaze slobodna polja. U tu svrhu prvo pronađimo vezu između vakuuma za slobodna polja $|0\rangle$, definiranog s $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$, i onog u punoj interagirajućoj teoriji $|\Omega\rangle$ koji zadovoljava

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{p}}(t) |\Omega\rangle = 0$$

Iz (3.8.19) slijedi $a_{\mathbf{p}}(t) = U(t, t_0)^\dagger a_{\mathbf{p}} U(t, t_0)$ što uvršteno gore daje

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{p}} U(t, t_0) |\Omega\rangle = 0$$

jer je $U(t, t_0)$ unitaran, što znači i invertibilan operator. Iz definicije $|0\rangle$ slijedi²² da mora biti

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t, t_0) |\Omega\rangle = \mathcal{N}_i |0\rangle$$

gdje je $\mathcal{N}_i$ neka konstanta. Invertiranjem gornje jednadžbe dobijamo

$$|\Omega\rangle = \mathcal{N}_i \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t, t_0)^\dagger |0\rangle = \mathcal{N}_i \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t_0, t) |0\rangle \quad (3.8.24)$$

Na isti način iz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Omega | a_{\mathbf{p}}(t)^\dagger = 0$$

slijedi

$$\langle \Omega | = \mathcal{N}_f \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | U(t, t_0) \quad (3.8.25)$$

Sad ćemo upotrijebiti (3.8.24), (3.8.25) i (3.8.19) u T -uređenoj n -točkastoj funkciji. Radi jednostavnosti, za početak pretpostavimo da su vremena u korelatoru već ispravno uređena, tj. $t_1 > t_2 \cdots t_n$. U tom slučaju imamo

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \\ &= \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i \langle 0 | U(\infty, t_1) \phi_0(x_1) U(t_1, t_2) \phi_0(x_2) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, -\infty) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Pošto je gornji izraz potpuno vremenski uređen, ako uzmemo opća (tj. neuređena) vremena t_j , rezultat je naprosto vremenski uređena gornja formula

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i \langle 0 | T \{ U(\infty, t_1) \phi_0(x_1) U(t_1, t_2) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, -\infty) \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

²²Pretpostavljamo da je vakuum u interagirajućoj teoriji također jedinstven.

Pošto pretpostavljamo da je vakuumsko stanje normalizirano

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i = (\langle 0 | U(\infty, -\infty) | 0 \rangle)^{-1}$$

Uvrštavanje toga i Dysonove formule (3.8.23) daje formulu u željenom obliku

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle} \quad (3.8.26)$$

u kojem je desna strana u potpunosti izražena pomoću slobodnih polja i vakuuma. Ovaj izraz je poznat kao **Gell-Mann–Low formula** za korelatore.

Interakcijski potencijal

Razmotrimo sada поближе interakcijski potencijal V_I . U teorijama polja s lokalnom akcijom V ima oblik

$$V(t) = - \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi(\mathbf{x}, t)]$$

Kao primjer uzmimo našu pokaznu φ^3 teoriju s jednim realnim skalarnim poljem φ . Tada je

$$\mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi(x)] = \frac{g}{3!} \varphi(x)^3 \quad (3.8.27)$$

Pošto je općenito

$$\phi_0(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_0(\mathbf{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)}$$

iz (3.8.22) slijedi

$$V_I(t) = - \frac{g}{3!} \int d^3 \mathbf{x} \varphi_0(\mathbf{x}, t)^3$$

Generalizacija na proizvoljni polinomni $\mathcal{L}_{\text{int}}$ je

$$V(t) = - \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_0(\mathbf{x}, t)] \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t) = - \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_0]$$

što uvršteno u (3.8.26) daje sljedeći oblik za Gell-Mann–Low formulu

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \exp \left[i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_0] \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_0] \right] \right\} | 0 \rangle} \quad (3.8.28)$$

Wickov teorem

Wickov teorem je recept za izražavanje vremenski uređenih produkata slobodnih polja pomoću **normalno uređenih** produkata. Normalno uređenje, koje se označava dvotočkama $: \cdots :$, se definira tako da se svi operatori stvaranja unutar svakog produkta pomaknu na lijevo od svih operatora poništenja.²³ Na primjer

$$: a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_3}^\dagger : \equiv a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_3}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}$$

Wickov teorem za slučaj jednog realnog skalarnog polja glasi

²³Za fermionska polja se dodaje ekstra faktor $(-1)^P$, gdje je P parnost permutacije članova produkta kojom se postiže normalno uređenje.

$$T \{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \} = : \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) : + \text{sve moguće kontrakcije} :$$

gdje svaka pojedinačna kontrakcija dva polja $\phi(x_j)$ i $\phi(x_k)$ daje pripadni Feynmanov propagator $D_F(x_j, x_k)$.

Dokaz Wickovog teorema nije nešto posebno iluminativan, pa ćemo ga preskočiti, a može se pronaći u većini udžbenika iz kvantne teorije polja (npr. u dodatku 7.A u Schwartzovom udžbeniku). Umjesto toga, pojasnit ćemo ga na jednom primjeru:

Primjer 3.8.2: Raspišite T-uređenu 4-točkastu funkciju koristeći Wickov teorem.

$$\begin{aligned} T \{ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \phi_0(x_3) \phi_0(x_4) \} = & : \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \phi_0(x_3) \phi_0(x_4) : + D_F(x_1, x_2) : \phi_0(x_3) \phi_0(x_4) : \\ & + D_F(x_1, x_3) : \phi_0(x_2) \phi_0(x_4) : + D_F(x_1, x_4) : \phi_0(x_2) \phi_0(x_3) : \\ & + D_F(x_2, x_3) : \phi_0(x_1) \phi_0(x_4) : + D_F(x_2, x_4) : \phi_0(x_1) \phi_0(x_3) : \\ & + D_F(x_3, x_4) : \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) : + D_F(x_1, x_2) D_F(x_3, x_4) \\ & + D_F(x_1, x_3) D_F(x_2, x_4) + D_F(x_1, x_4) D_F(x_2, x_3) \end{aligned}$$

Važno svojstvo normalnog uređenja, i ujedno glavni razlog zašto će nam Wickov teorem biti jako koristan, je da vakuumske očekivane vrijednosti normalno uređenih operatora **iščežavaju**

$$\langle 0 | : \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) : | 0 \rangle = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

Iz toga slijedi da su vakuumske očekivane vrijednosti T-uređenih korelacijskih funkcija slobodnih polja dane s

$$\langle 0 | T \{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_{2n}) \} | 0 \rangle = \sum_{\text{sve kontrakcije}} D_F(x_{j_1}, x_{j_2}) D_F(x_{j_3}, x_{j_4}) \cdots D_F(x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}) \quad (3.8.29)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_{2n-1}) \} | 0 \rangle = 0 \quad (3.8.30)$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, a suma ide po svim različitim mogućnostima potpunih kontrakcija po parovima.

Vremenski uređeni produkti i kontrakcije

Ideja je primijeniti Wickovu formulu na Gell-Mann–Low formulu (3.8.28) i na taj način dobiti upotrebljiv perturbativni razvoj za koji će se pokazati da je upravo Feynmanov razvoj. Radi preglednosti ponovo ćemo račun prvo demonstrirati na jednostavnom primjeru: uzet ćemo našu pokaznu φ^3 teoriju s realnim skalarnim poljem za koju je $\mathcal{L}_{\text{int}}$ dan u (3.8.27) i razmotriti 2-točkastu funkciju koju ćemo izračunati do reda g^2 .

Zasebno ćemo računati brojnik i nazivnik iz (3.8.28). Brojnik je

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left\{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi_0] \right] \right\} | 0 \rangle = & \langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \} | 0 \rangle + \\ & + \frac{ig}{3!} \int d^4x \langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x)^3 \} | 0 \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \varphi_0(x_2) \varphi_0(x)^3 \varphi_0(y)^3 \} | 0 \rangle + O(g^3) \end{aligned}$$

Sada upotrijebimo (3.8.29) i (3.8.30). Rezultat je

$$\langle 0|T\{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\}|0\rangle = D_F(x_1, x_2)$$

$$\langle 0|T\{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\varphi_0(x)^3\}|0\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\varphi_0(x)^3\varphi_0(y)^3\}|0\rangle = & 9 D_F(x_1, x_2) D_F(x, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + 6 D_F(x_1, x_2) D_F(x, y)^3 + \\ & + 18 D_F(x_1, x) D_F(x_2, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + 9 D_F(x_1, x) D_F(x_2, y) D_F(x, x) D_F(y, y) + \\ & + 18 D_F(x_1, x) D_F(x_2, y) D_F(x, y)^2 + 18 D_F(x_1, y) D_F(x_2, y) D_F(x, y) D_F(x, x) + \\ & + 9 D_F(x_1, y) D_F(x_2, x) D_F(x, x) D_F(y, y) + 18 D_F(x_1, y) D_F(x_2, x) D_F(x, y)^2 \end{aligned}$$

Uvrštavanje ovih izraza nazad u gornji izraz za brojnik daje

$$\begin{aligned} \langle 0|T\left\{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi_0]\right]\right\}|0\rangle = & D_F(x_1, x_2) - g^2 \int d^4x \int d^4y \times \\ & \times \left[\frac{1}{8} D_F(x_1, x_2) D_F(x, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + \frac{1}{12} D_F(x_1, x_2) D_F(x, y)^3 + \right. \\ & + \frac{1}{2} D_F(x_1, x) D_F(x_2, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + \frac{1}{2} D_F(x_1, x) D_F(x_2, y) D_F(x, y)^2 + \\ & \left. + \frac{1}{4} D_F(x_1, x) D_F(x_2, y) D_F(x, x) D_F(y, y) \right] + O(g^4) \end{aligned} \quad (3.8.31)$$

Usporedbom ovog izraza s (3.8.14) vidimo da se razlikuju u tome da su prva dva člana u uglatoj zagradi u (3.8.31) višak. Po čemu su ovi članovi posebni možemo vidjeti iz pripadnih Feynmanovih dijagrama:



Usporedbom s (3.8.15) vidimo da su gornji dijagrami specifični u tome što posjeduju **mjhure** (eng. **bubbles**), tj. podgrafove koji nisu povezani ni s jednom vanjskom linijom.

Ne smijemo smetnuti s uma da rezultat u (3.8.31) moramo podijeliti s nazivnikom iz (3.8.28). Perturbativni račun za nazivnik daje

$$\begin{aligned} \langle 0|T\left\{\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi_0]\right]\right\}|0\rangle = & 1 - \frac{g^2}{72} \int d^4x \int d^4y \langle 0|T\{\varphi_0(x)^3\varphi_0(y)^3\}|0\rangle \\ = & 1 - \frac{g^2}{72} \int d^4x \int d^4y [9 D_F(x, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + 6 D_F(x, y)^3] + O(g^4) \end{aligned}$$

pa slijedi

$$\left(\langle 0|T\left\{\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}[\varphi_0]\right]\right\}|0\rangle\right)^{-1} = 1 + \frac{g^2}{72} \int d^4x \int d^4y [9 D_F(x, x) D_F(x, y) D_F(y, y) + 6 D_F(x, y)^3] + O(g^4)$$

Uvrštavanjem gornje formule i (3.8.31) u (3.8.28) dobijamo upravo rezultat (3.8.14) dobijen lagranžijanskom metodom. **Uočite da nazivnik igra ulogu poništavanja dijagrama s mjhurima.**

Može se pokazati da se ova tvrdnja generalizira na sve redove računa smetnje i sve vrste međudjelovanja. To znači da kad primjenjujemo Feynmanov račun Gell-Man-Low formulu (3.8.28) možemo napisati kao:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \langle 0 | T \left\{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_0] \right] \right\} | 0 \rangle \text{ bez mjehura} \quad (3.8.33)$$

gdje “bez mjehura” znači da ne uključujemo Feynmanove dijagrame koji sadrže mjehure.

Primjenom ove formule i Wickovog teorema mogu se izvesti Feynmanova pravila u x -prostoru, koja smo napisali već u odjeljku 3.8.1.

3.8.3 Feynmanova pravila u impulsnom prostoru

Pokazuje se da nam češće trebaju korelacijske funkcije u impulsnom p -prostoru nego u koordinatnom x -prostoru. Veza je putem Fourierovog transformata:

$$\left(\prod_{j=1}^n \int d^4x_j e^{ip_j \cdot x_j} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{G}_F(p_1, \dots, p_n) \quad (3.8.34)$$

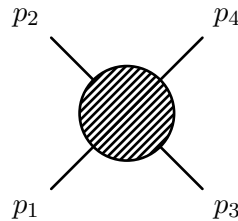
gdje postojanje δ^4 funkcije na desnoj strani slijedi iz pretpostavke translacijske invarijantnosti korelacijskih funkcija.²⁴

Ako zamijenimo korelacijsku funkciju u x -prostoru njenim Feynmanovim razvojem, dobijamo Feynmanov razvoj u p -prostoru s pravilima koja direktno slijede iz pravila u x -prostoru. Integracije po d^4x_j u (3.8.34) vode na sljedeće korespondencije:

- Propagatore u dijagramu treba predstaviti pomoću Fourierovog transformata, što za realno skalarno polje znači upotrijebiti (3.7.18).
- Integracija po vanjskoj točki x_j u (3.8.34) daje sljedeći doprinos

$$\begin{aligned} \int d^4x_j e^{ip_j \cdot x_j} D_F(x - x_j) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4x_j e^{i(p_j - p) \cdot x_j} \\ &= \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip_j \cdot x} \end{aligned} \quad (3.8.35)$$

gdje je x čvor povezan linijom s x_j . Iz gornjeg izraza možemo izvući sljedeći zaključak. Prvi je da u p prostoru nema vanjske točke, a noga koja se veže na vanjsku točku x_j postaje **vanjska linija**. Vanjskoj liniji se pridružuje propagator u p -prostoru fiksnog impulsa p_j (impuls pridružen x_j putem Fourierovog integrala) koji po definiciji **ulazi u dijagram**. (Faktor $e^{ip_j \cdot x}$ u (3.8.35) povezujemo s čvorom x i posljedice koje stvara ćemo razmotriti malo niže.) To znači da u p prostoru Feynmanovi dijagrami imaju oblik



gdje pretpostavljamo da svi impulsi p_j **ulaze** u graf (smjer impulsa je važan jer određuje predznak u relacijama sačuvanja impulsa u čvorovima - impulsi koji ulaze imaju suprotni predznak od impulsa koji izlaze iz čvora). Radi smanjenja mogućnosti pogreške obično se za svaku liniju dijagrama smjer impulsa eksplicitno označi strelicom.

²⁴Najlakši način za ustanoviti postojanje δ^4 funkcije je prijeći s $4n$ varijabli integracije x_j , $j = 1 \dots n$, na varijable $X_j = x_j - x_n$, $j = 1, \dots, n-1$, i $X_n = x_n$. Pošto iz translacijske invarijantnosti korelacijske funkcije u x prostoru ne ovise o varijabli X_n , integracija po njoj daje upravo δ^4 funkciju puta $(2\pi)^4$.

- Zbog postojanja integracija po unutarnjim čvorovima u x_a -prostoru, u svakom čvoru postoji faktor

$$\int d^4 x_a \exp \left(i \sum_r q_{ur}^{(a)} \cdot x_a - i \sum_r q_{ir}^{(a)} \cdot x_a \right) = (2\pi)^4 \delta^4(q_{u1}^{(a)} + q_{u2}^{(a)} + \dots - q_{i1}^{(a)} - q_{i2}^{(a)} - \dots) \quad (3.8.36)$$

gdje su $\{q_{ur}^{(a)}\}$ svi 4-impulsi koji ulaze u dani čvor a , a $\{q_{ir}^{(a)}\}$ svi 4-impulsi koji izlaze iz čvora a . δ -funkcija u svakom čvoru nameće lokalno sačuvanje 4-impulsa. Treba uočiti da se u računu za svaki dijagram može izlučiti kao faktor δ -funkcija koja daje sačuvanje ukupnog 4-impulsa (na vanjskim nogama), a koja je faktorizirana u izrazu (3.8.34).

Uzevši sve ovo u obzir, iz Feynmanovih pravila u x -prostoru slijede Feynmanova pravila u p -prostoru, tj. recept za perturbativno računanje korelacijskih funkcija $\tilde{G}_F(p_1, \dots, p_n)$ definiranih u (3.8.34).

Feynmanova pravila u p -prostoru:

1. Nacrtajte **sve topološki različite** dijagrame s n vanjskih linija (kao u x -prostoru). Svakoj liniji pridružite 4-impuls, s tim da su na vanjskim linijama impulsi p_j iz funkcije $\tilde{G}_F(p_1, \dots, p_n)$ koju računamo. Svi vanjski impulsi **ulaze** u dijagram.
2. Svakoj liniji pridružite kao faktor **propagator** u p -prostoru, koji je za skalarno polje

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

gdje je q impuls koji prolazi kroz danu liniju.

3. Čvorovi dolaze od članova s međudjelovanjem u lagranžijanu. Svaki doprinosi faktor $i \times$ **konstanta vezanja**.
4. U svakom čvoru nametnite **sačuvanje 4-impulsa**.
5. Integrirajte po svim **nefiksiranim** impulsima q_j

$$\int \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$$

6. Dodajte **faktor simetrije** dijagrama.
7. **Sumirajte** doprinos svih dijagrama do željenog reda u perturbativnom razvoju po konstantama vezanja.

Način kako se određuje konstanta vezanja i faktor simetrije je opisan u odjeljku 3.8.1.

3.8.4 S-matrica i invarijantna amplituda $\mathcal{M}$

Na osnovu do sada dobijenih rezultata želimo napisati Feynmanova pravila za invarijantnu amplitudu $\mathcal{M}$ koju smo definirali pomoću S-matrice putem relacije

$$\langle f | S | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) i \mathcal{M}, \quad |i\rangle \neq |f\rangle$$

gdje su p_f i p_i ukupni 4-impulsi u izlaznom (konačnom) i ulaznom (početnom) stanju. Ukoliko upotrijebimo LSZ formulu (3.7.10) te u njoj maloprije dobijena Feynmanova pravila za T -uređene korelacijske funkcije možemo uočiti sljedeće:

- Operator $i(\square_j + m^2)$ u p prostoru daje $i(-p^2 + m^2)$ što točno krati doprinos vanjske linije j u korelacijskoj funkciji (propagator u p prostoru)

- Impulsi na izlaznim vanjskim linijama imaju suprotan predznak pa ih crtamo kako **izlaze** iz dijagrama.

Uzevši u obzir ove napomene, dobijamo:

Feynmanova pravila za $i\mathcal{M}$:

1. Nacrtajte sve dopuštene topološki različite Feynmanove dijagrame na isti način kao u x prostoru (zasad bez ikakvih oznaka). Na vanjske linije stavite impulse, s tim da impulsi na linijama ulaznog stanja (iz i stanja) ulaze u dijagram, a impulsi na linijama izlaznog stanja (f stanje) izlaze iz dijagrama. Na svaku unutrašnju liniju stavite strelicu i pripadni impuls q_j .
2. Svakoj unutarnjoj liniji pridružite propagator, koji je za realno skalarno polje dan s

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

3. Čvorovi dolaze od interakcijskih članova u lagranžijanu. Svakome pridružite pripadnu konstantu vezanja puta imaginarna jedinica i .
4. Vanjske linije doprinose faktor 1 (za skalarna polja, inače polarizacijski tenzor).
5. U svakom čvoru nametnite sačuvanje 4-impulsa.
6. Integrirajte po neodređenim impulsima

$$\int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4}$$

7. Dodajte faktor simetrije dijagrama.
8. Sumirajte doprinos svih dijagrama do željenog reda u perturbativnom razvoju po konstantama vezanja.

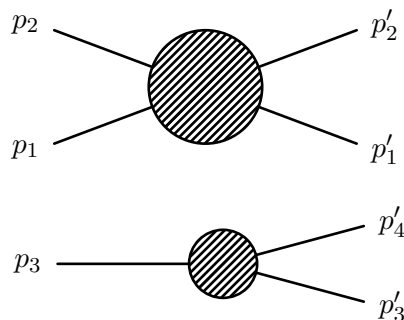
3.8.5 Nepovezani dijagrami

U pojedinim dijelovima računa implicitno smo pretpostavili ne samo da su ulazno i izlazno stanje različiti, $|i\rangle \neq |f\rangle$, nego i da su f i i stanja **ireducibilna**, tj. da ne postoji podskup 4-impulsa ulaznih čestica u $|i\rangle$ koji ima ukupni 4-impuls jednak ukupnom 4-impulsu nekog podskupa impulsa izlaznih čestica u $|f\rangle$. Što kad to ne vrijedi?

Na primjer, pretpostavimo da gledamo **reducibilni** proces $p_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4$ u kojem je

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad p_3 = p'_3 + p'_4$$

gdje druga jednakost slijedi iz prve zbog sačuvanja ukupnog 4-impulsa. U ovom slučaju sačuvanje energije i impulsa dopušta dijagrame oblika



Ovakvi dijagrami, u kojima nisu sve vanjske noge povezane kroz dijagram, se nazivaju **nepovezani**. Po definiciji, doprinos amplituda od svih ovakvih dijagrama će biti umnožak dva nezavisna doprinosa (jer imamo dva odvojena nezavisna podprocesa).

Ključno pitanje je može li se dogoditi interferencija između povezanih i nepovezanih dijagrama, u smislu da jedni i drugi značajno doprinose u danom procesu? Za odgovoriti na ovo pitanje prvo uočimo da će povezani dijagrami dati doprinos S-matrici koji ima strukturu

$$S = 1 + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}$$

gdje $\mathcal{M}$ ne sadrži nikakve δ funkcije. Ovo se može zaključiti iz strukture povezanih Feynmanovih dijagrama. S druge strane možemo zaključiti, opet iz analize Feynmanovih dijagrama, da će nepovezani dijagrami doprinositi amplitudi $\mathcal{M}$ tako da će ona biti proporcionalna δ funkciji. Npr, za gornji primjer vrijedi

$$\mathcal{M} \propto \delta^4(p'_3 + p'_4 - p_3)$$

Zbog dodatne δ funkcije ovaj doprinos od nepovezanih dijagrama je puno (tj. beskonačno) veći od doprinosa povezanih dijagrama, pa stoga doprinos povezanih dijagrama možemo **zanemariti**. Odgovor na gornje pitanje je da ne može doći do interferencije.

Gornja analiza vodi na važan zaključak:

Za sve vrste procesa dovoljno je računati samo doprinose povezanih dijagrama. Amplitudu za reducibilni proces dobijemo naprosto kao umnožak amplituda za ireducibilne podprocese (kojima po definiciji mogu doprinositi samo povezani dijagrami).

3.8.6 Primjer: φ^3 teorija

Primjenu tehnike Feynmanovih dijagrama uvježbat ćemo na primjeru φ^3 teorije:

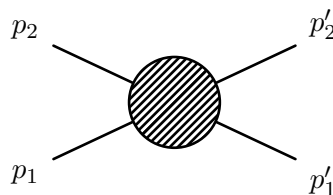
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{3!} \varphi^3$$

Grativni elementi za ovu teoriju su jedan propagator i jedan čvor:

$$\begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = i g$$

Razmotrimo proces elastičnog raspršenja $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$:



U najnižem redu u konstanti vezanja g imamo 3 dijagrama:

$$\begin{aligned}
s : \quad & \begin{array}{c} p_2 \\ \searrow \\ \text{---} p_1 + p_2 \text{---} \\ \nearrow \\ p_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} p_2' \\ \nearrow \\ \text{---} p_1 + p_2 \text{---} \\ \searrow \\ p_1' \end{array} \quad \Rightarrow \quad i\mathcal{M}_s = (ig) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} (ig) = \frac{-ig^2}{s - m^2} \\
t : \quad & \begin{array}{c} p_2 \\ \searrow \\ \text{---} p_1 - p_1' \text{---} \\ \nearrow \\ p_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} p_2' \\ \nearrow \\ \text{---} p_1 - p_1' \text{---} \\ \searrow \\ p_1' \end{array} \quad \Rightarrow \quad i\mathcal{M}_t = (ig) \frac{i}{(p_1 - p_1')^2 - m^2} (ig) = \frac{-ig^2}{t - m^2} \\
u : \quad & \begin{array}{c} p_2 \\ \searrow \\ \text{---} p_1 - p_2' \text{---} \\ \nearrow \\ p_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} p_2' \\ \nearrow \\ \text{---} p_1 - p_2' \text{---} \\ \searrow \\ p_1' \end{array} \quad \Rightarrow \quad i\mathcal{M}_u = (ig) \frac{i}{(p_1 - p_2')^2 - m^2} (ig) = \frac{-ig^2}{u - m^2}
\end{aligned}$$

Ukupnu amplitudu dobijamo sumiranjem svih dijagrama, što u ovom slučaju znači

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u + O(g^4) = -g^2 \left[\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right] + O(g^4)$$

Diferencijalni udarni presjek u sustavu centra masa je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{g^4}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \left[\frac{1}{s-m^2} + \frac{1}{t-m^2} + \frac{1}{u-m^2} \right]^2 + O(g^6)$$

Napomena: U slučaju realnih polja, strelice u dijagramima služe samo da bi označile smjer impulsa. Kad budemo prešli na kompleksna polja, gdje strelica označava da li se radi o čestici ili antičestici, trebat ćemo biti malo oprezniji u povezivanju strelica s impulsima za ulazne i izlazne antičestice.

Mandelstammove variijable

U gornjem računu uveli smo sljedeće Lorentz invarijante:

$$\begin{aligned}s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 \\ t &\equiv (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \\ u &\equiv (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2\end{aligned}$$

koje se nazivaju **Mandelstamove varijable** i koje se pokazuju vrlo spretnima za izražavanje rezultata za općenita raspršenja $2 \rightarrow 2$. Iz sačuvanja ukupnog impulsa lako se vidi da nisu sve nezavisne, već da su povezane kroz relaciju

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2$$

gdje u slučaju kad sve čestice u procesu imaju jednaku masu m desna strana daje $4m^2$. Važno je uočiti da su domene Mandelstamovih varijabli ograničene s

$$s > 0 \quad , \quad t < 0 \quad , \quad u < 0$$

3.8.7 Generalizacija na više polja

U izvodima i dosadašnjim primjerima sve formule smo pisali kao da teorija posjeduje samo jedno nezavisno dinamičko polje (za koje smo zasad uzeli da je realno skalarno polje). Što ako imamo više nezavisnih polja, npr. više realnih skalarnih polja? Odgovor je sljedeći:

Svako nezavisno dinamičko polje koje se pojavljuje u lagranžijanu ima **svoju** vlastitu liniju i pripadni propagator. Feynmanova pravila ostaju nepromijenjena, samo što moramo linije u dijagramima **označiti** da bude jasno kojem polju (odnosno, čestici) pripadaju i spajati samo linije istog polja.

Kao primjer, razmotrimo teoriju s dva skalarna polja, koja ćemo označiti s a i b , za koju je lagranžijan dan s

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_a)^2 - \frac{m_a^2}{2} \varphi_a^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_b)^2 - \frac{m_b^2}{2} \varphi_b^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_a^2 \varphi_b^2$$

Osnovni gradivni elementi za Feynmanove dijagrame su sada dvije vrste propagatora i jedan čvor:

$$\begin{aligned} \frac{a, p}{\text{---}} &= \frac{i}{p^2 - m_a^2 + i\epsilon} \\ \frac{b, p}{\text{---}} &= \frac{i}{p^2 - m_b^2 + i\epsilon} \\ \begin{array}{c} b \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} &= i\lambda \end{aligned}$$

U dijagramima smijemo spajati samo linije koje imaju istu oznaku (obje a ili obje b).

3.8.8 Vezanja koja uključuju derivacije polja

Do sada smo se fokusirali na međudjelovanja u kojima $\mathcal{L}_{\text{int}}$ sadrži samo produkte polja, ali ne i njihovih derivacija. Što ako postoje i derivacije polja? Uočimo prvo da je

$$\partial_\mu \varphi_0(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(-i p_\mu a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + i p_\mu a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

iz čega zaključujemo da derivacija polja u kontrakcijama ulazi s $-ip_\mu a_{\mathbf{p}}$ umjesto samo s $a_{\mathbf{p}}$. Dolazimo do pravila:

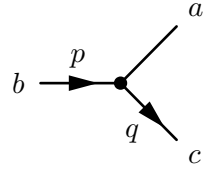
Ako se čestica poništava u čvoru (tj. ulazi u čvor) svaka derivacija ∂_μ daje dodatni faktor $-ip_\mu$, a ako se čestica kreira u čvoru (tj. izlazi iz čvora) dodatni faktor je ip_μ .

Kao primjer na kojem ćemo pojasniti gornje pravilo razmotrimo sljedeće međudjelovanje (koje uključuje tri različita realna skalarna polja)

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \lambda \varphi_a (\partial_\mu \varphi_b) (\partial^\mu \varphi_c) \quad (3.8.37)$$

Koristeći gornje pravilo možemo zaključiti da je doprinos pripadnog čvora u dijagramima dan s²⁵

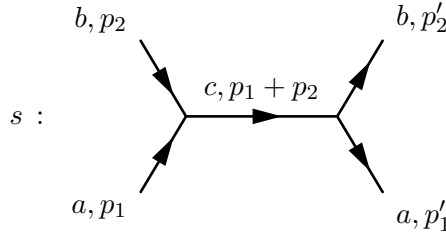
²⁵Sjetimo se da za realna polja strelica na liniji samo označava smjer impulsa i nema neko dodatno značenje. To znači da je moguće i da obje strelice ulaze u čvor ili da obje izlaze iz čvora, s tim da svaka promjena smjera strelice doprinosi faktor (-1) .



$$= i\lambda(-ip_\mu)(iq^\mu) = i\lambda(p \cdot q) \quad (3.8.38)$$

Vježba 3.8.3: U teoriji s tri realna skalarna polja φ_a, φ_b i φ_c s masama m_a, m_b i m_c , koja međudjeluju putem (3.8.37), nacrtajte sve Feynmanove dijagrame za proces elastičnog raspršenja čestica a i b , $a + b \rightarrow a + b$, koji doprinose amplitudi $\mathcal{M}$ do reda λ^2 . Izračunajte doprinos s -kanalnog dijagrama. Izraz napišite pomoću Mandelstamovih varijabli s, t i u . Impulse ulazne (izlazne) čestice a označite s p_1 (p'_1), a čestice b s p_2 (p'_2).

Rješenje: Dijagrami koji doprinose do reda λ^2 imaju isti oblik kao oni koji su nacrtani u primjeru iz odjeljka (3.8.6), s tim da unutarnja linija na sva tri dijagrama označava česticu tipa c . s -kanalni dijagram je



Koristeći (3.8.38) dobijamo da je doprinos amplitudi ovog dijagrama

$$i\mathcal{M}_s = i\lambda p_2 \cdot (p_1 + p_2) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m_c^2} i\lambda p'_2 \cdot (p'_1 + p'_2) = -\frac{i\lambda^2}{4} \frac{(s - m_a^2 + m_b^2)^2}{s - m_c^2}$$

gdje smo koristili $p_1^2 = m_a^2$ i $p_2^2 = m_b^2$, te

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \quad , \quad p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2$$

Zadatak 3.8.4: U teoriji sa dva realna skalarna polja i lagranžijanom danim s

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_1(\partial_\mu\varphi_2)(\partial^\mu\varphi_2) + \frac{g}{2}\varphi_1^2\varphi_2 \quad (3.8.39)$$

izračunajte diferencijalni udarni presjek u sustavu centra masa za raspršenje čestica $\varphi_1 + \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ u drvastoj aproksimaciji.

3.8.9 Kompleksna polja

Do sada smo u izvodima pretpostavljali da u teoriji postoje samo realna polja. U slučaju kompleksnih polja, koja karakterizira to da postoje čestice i antičestice, postoje neke dodatne finese koje ćemo ovdje razjasniti na primjeru kompleksnog skalarnog polja φ .

Realnost lagranžijana i stabilnost teorije (postojanje najnižeg stanja) nameću da se u svakom monomu u lagranžijanu moraju pojavljivati φ i $\varphi^\dagger$ u parovima. Pošto se operator poništenja čestice nalazi u φ a operator stvaranja u $\varphi^\dagger$ (i obrnuto za antičestice) očito je da će se u Wickovom teoremu nalaziti sve kontrakcije između parova φ i $\varphi^\dagger$, tj. kontrakcije će doprinositi propagator

$$\langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0(y)^\dagger \} | 0 \rangle$$

Lako se pokaže da je ovaj propagator potpuno identičan onom za realno skalarno polje, tj,

$$\langle 0 | T \{ \varphi_0(x) \varphi_0^\dagger(y) \} | 0 \rangle = D_F(x, y) \quad (3.8.40)$$

gdje je D_F dan u (3.7.18). Novost je da po liniji koja pripada kompleksnom polju može putovati **čestica ili antičestica**, što dovodi do toga da takva linija posjeduje smjer pa ćemo to označavati **strelicom na liniji**. Konvencija koja se standardno uzima je da strelica na liniji prati smjer nastanak $\rightarrow$ nestanak (stvaranje $\rightarrow$ poništenje) **čestice**. Pošto polje $\varphi_0(x)$ poništava česticu i stvara antičesticu u x , a polje $\varphi_0^\dagger(x)$ stvara česticu i poništava antičesticu u x , to nas vodi na sljedeća **Feynmanova pravila za kompleksno skalarno polje**:

- Definicija propagatora iz (3.8.40) govori da strelica ide od y prema x . Grafički:

$$y \bullet \longrightarrow \bullet x = D_F(x, y)$$

U p -prostoru strelicu možemo (iako ne moramo, ali je spretno) iskoristiti za određivanje smjera 4-impulsa p koji putuje po liniji, tako da je **propagator** u p -prostoru dan s:²⁶

$$\xrightarrow{p} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- Iz LSZ formule (3.7.14) slijedi da za **vanjske linije** čestica i antičestica u p prostoru vrijede pravila:

ulazna čestica :	$p \xrightarrow{\quad} \bullet$	=	1
ulazna antičestica :	$p \xleftarrow{\quad} \bullet$	=	1
izlazna čestica :	$\bullet \xrightarrow{\quad} p$	=	1
izlazna antičestica :	$\bullet \xleftarrow{\quad} p$	=	1

Strelice iznad linija označavaju smjer impulsa. Uočite dvije stvari. Prvo, vidimo da umjesto da uvodimo posebne vanjske linije za čestice i antičestice, antičestica se označava strelicom u suprotnom smjeru.²⁷ Drugo, impulsi čestica koje se nalaze u ulaznom stanju uvijek ulaze u dijagram, dok impulsi čestica iz izlanog stanja uvijek izlaze iz dijagrama, bez obzira da li se radi o česticama ili antičesticama. **To znači da je za antičestice na vanjskim linijama smjer impulsa suprotan od strelice na liniji.** To treba imati na umu jer zbog preglednosti dijagrama uglavnom nećemo ucrtavati posebne strelice za impulse.

Često će biti slučaj (primjer: kvantna elektrodinamika) da se kompleksno polje pojavljuje u interakcijama samo kroz produkt $\phi^\dagger \phi$. U tom slučaju svaka linija koja pripada polju ϕ unutar bilo kojeg dopuštenog Feynmanovog dijagrama leži na “usmjerenom” krivulji sačinjenoj od (vanjskih i/ili unutarnjih linija), gdje usmjerenost znači da kako idemo po krivulji sve strelice gledaju u istom smjeru. Usmjerena krivulja može biti otvorena, u kojem slučaju joj početak i kraj mora biti na vanjskim linijama, ili zatvorena (petlja) u kojem slučaju ne sadrži vanjske linije.

²⁶Za skalarna polja propagator je simetričan na zamjenu $p \rightarrow -p$, pa za sam propagator strelica nije važna, no važna je za postavljanje uvjeta sačuvanja impulsa u čvorovima koje povezuje propagator. No, vidjet ćemo da za polja višeg spina propagator nije invarijantan na $p \rightarrow -p$, tako da je strelica važna i za sam propagator.

²⁷Ovo može izgledati nelogično jer se čini kao da antičestica koja putuje normalno iz prošlosti u budućnost izgleda kao čestica suprotnog 4-impulsa koja putuje iz budućnosti u prošlost. U stvari, gledajući kroz prijenos 4-impulsa i ostalih naboja to je formalno točno. Obratite pažnju na riječ formalno, jer fizikalne čestice i antičestice uvijek imaju pozitivnu energiju.

3.9 Integrali po stazama*

Do sada smo koristili kanonski pristup kvantizaciji polja. U stvari, u praksi se češće koristi drugi pristup pomoću **integrala po stazama** (eng. *path integrals*) koji pored manifestne Poincaré kovarijantnosti posjeduje i neke druge prednosti u odnosu na kanonsku kvantizaciju. U ovom poglavlju objasniti ćemo integrale po stazama za bozonska polja.

Pretpostavimo da imamo klasičnu teoriju polja određenu skupom elementarnih lokalnih polja $\phi(x) \equiv \{\phi_r(x)\}$ i akcijom $S[\phi]$. Kvantizacija putem integrala po stazama se može definirati putem formule za vakuumske očekivane vrijednosti vremenski uređenih produkata polja

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_n(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) e^{i(S[\phi] + "i\epsilon\text{-članovi}")}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + "i\epsilon\text{-članovi}")}} \quad (3.9.1)$$

gdje pretpostavljamo da su polja $\mathcal{O}_j$ funkcije ili lokalni funkcionali elementarnih polja ϕ .

Integracija koja se pojavljuje u gornjem izrazu je posebna vrsta integracije, tzv. **funkcionalna integracija**, u kojoj se integrira po prostoru svih klasičnih konfiguracija elementarnih polja $\phi_r(x)$ s prihvatljivim rubnim uvjetima. Mjera ovakve funkcionalne integracije se označava s $\mathcal{D}\phi$ i uskoro ćemo vidjeti jedan način kako ju se može definirati. Vidimo da se svakoj klasičnoj konfiguraciji polja $\phi(x) \equiv \{\phi_r(x)\}$ u integraciji pridjeljuje težinski faktor $\exp(iS[\phi])$ u kojem figurira (klasična) akcija.

Neke važne napomene vezane uz formulu (3.9.1):

1. Desna strana u definiciji (3.9.1) je u potpunosti određena **klasičnim** veličinama (klasičnim poljima i klasičnom akcijom) što u odnosu na kanonsku kvantizaciju, gdje se mora raditi s operatorima i vektorima stanja u Hilbertovom prostoru, ima očitu prednost. Na primjer, problemi poput množenja polja u istoj točki prostora se u ovom formalizmu, bar naizgled, ne pojavljuju (iako će neki od ovih problema uskrsnuti kroz pojavu beskonačnosti i potrebu za regularizacijom i renormalizacijom).
2. Očuvanje klasičnih simetrija u kvantiziranoj teoriji je manifestno. Vidimo da ako postoji klasična simetrija, na čije djelovanje je akcija S invarijantna, invarijantnost mjere integracije na djelovanje simetrije garantira da je simetrija prisutna i u kvantiziranoj teoriji. U nekim situacijama se pokazuje da se ne može uvijek konstruirati mjera koja je invarijantna na sve simetrije klasične teorije pa neke simetrije nakon kvantizacije više ne postoje. Ovo je primjer tzv. **kvantnih anomalija**.
3. Treba imati na umu da formula (3.9.1) ima svoja ograničenja. U slučaju teorija čiji hamiltonijan nije kvadratičan u generaliziranim impulsima (tačno značenje ove tvrdnje i objašnjenje je dano u odjeljku (3.9.2)), i teorija u kojim postoje **veze** (eng. *constraints*) može se dogoditi da klasična akcija dobija dodatne članove, odnosno da postoje dodatna nefizikalna polja, tzv. **duhovi** (eng. *ghosts*).
4. Kao što ćemo objasniti, klasičnoj akciji treba dodati takozvane " $i\epsilon$ -članove", u kojima se podrazumijeva da $\epsilon \rightarrow 0^+$. Matematička uloga ovih članova je da pomaknu polove u n -točkastim funkcijama s realne osi u kompleksnu ravninu na točno određeni način (koji ćemo komentirati kasnije), što efektivno znači da definiraju način na koji kontura integracije zaobilazi te polove. Što se tiče Feynmanovog razvoja, jedina, ali vrlo važna, posljedica ovih članova je da uzrokuju $i\epsilon$ doprinose u nazivnicima Feynmanovih propagatora. U praksi se u formulama poput (3.9.1) " $i\epsilon$ -članovi" u pravilu ne pišu već se podrazumijevaju, i mi ćemo u kasnijim formulama slijediti ovu praksu.

Naravno, moramo pokazati da definicija (3.9.1), uz prikladnu definiciju mjere integracije $\mathcal{D}\phi$, zadovoljava sva svojstva koja se u kvantnoj teoriji očekuju od nje. To ćemo napraviti tako što ćemo formulu (3.9.1) izvesti koristeći kanonsku kvantizaciju i time istovremeno pokazati da su ove dvije vrste kvantizacije ekvivalentne, bar u situacijama gdje se obje mogu primijeniti. Čitatelj koji smatra da formulu (3.9.1) razumije u dovoljnoj mjeri da mu izvod nije potreban može odmah preskočiti na odjeljak 3.9.4.

3.9.1 Gaussovski integrali

U računima s integralima po stazama, često se javljaju tzv. Gaussovski integrali, pa ćemo ih stoga ovdje razmotriti. Opći jednodimenzionalni Gaussovski integral po varijabli ξ se definira kao

$$I_n(J) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^n e^{-\frac{a}{2}\xi^2 + J\xi} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9.2)$$

gdje su a i J neišcezavajući realni parametri. Uočite da je ovaj integral konvergentan pa se mogu primijeniti sve tehnike manipulacije takvih integrala. Jedna od takvih manipulacija je da (3.9.2) za proizvoljni n možemo dobiti deriviranjem osnovnog integrala I_0 po J n puta.

$$I_n(J) = \frac{\partial^n I_0}{\partial J^n} \quad (3.9.3)$$

Stoga je dovoljno izračunati osnovni integral I_0 . To je najlakše napraviti tako da se izraz u eksponentu pretvori u potpuni kvadrat na način

$$-\frac{1}{2}a\xi^2 + J\xi = -\frac{a}{2}\left(\xi - \frac{J}{a}\right)^2 + \frac{J^2}{2a}$$

i potom napravi redefinicija varijable integracije $u \equiv \sqrt{a}(\xi - \frac{J}{a})$. Integral I_0 postaje

$$I_0(J) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad (3.9.4)$$

Integral koji se pojavljuje u gornjem izrazu je poznati integral koji se može naći u svim tablicama integrala i glasi

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{1}{2}u^2} = \sqrt{2\pi}$$

Uvrštavanje ovog rezultata u (3.9.4) daje

$$I_0(J) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \quad (3.9.5)$$

Nas će u stvari zanimati multidimenzionalni Gaussovski integrali. Nije teško pokazati da se formule koje smo izveli za jednodimenzionalne integrale generaliziraju na slučaj integracije po r varijabli $\xi = \{\xi_j\}$, $j = 1, \dots, r$ na sljedeći način:

$$I_0(J) \equiv \int d^r \xi \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^r \xi_j A_{jk} \xi_k + \sum_{k=1}^r J_k \xi_k \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^r}{\det(A)}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^r J_j (A^{-1})_{jk} J_k \right) \quad (3.9.6)$$

gdje je $d^r \xi = d\xi_1 \cdots d\xi_r$, dok je $A = (A_{jk})$ regularna simetrična $r \times r$ matrica čiji inverz je A^{-1} . Pokazuje se korisnim napisati gornji rezultat na alternativni način. Ako uvedemo

$$Q(\xi) \equiv \frac{1}{2} \xi^T A \xi - J^T \xi \quad (3.9.7)$$

gdje smo uveli matričnu notaciju u kojoj $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ i $J = (J_1, \dots, J_r)$ označavaju $r \times 1$ stupčane matrice, gdje T označava transponiranje matrice i gdje se matrično množenje podrazumijeva. Ako označimo stacionarnu točku funkcije $Q(\xi)$ s $\bar{\xi}$,

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \right|_{\xi=\bar{\xi}} = 0 \quad \implies \quad \bar{\xi} = A^{-1} J \quad (3.9.8)$$

onda rezultat (3.9.6) možemo napisati i kao

$$I_0(J) \equiv \int d^r \xi \exp(-Q(\xi)) = \left(\det \frac{A}{2\pi} \right)^{-1/2} \exp(-Q(\bar{\xi})) \quad (3.9.9)$$

Ovo je važan rezultat koji ćemo naglasiti i riječima:

Gaussovski integrali se, do na faktor, mogu izračunati tako da se podintegralna funkcija izvrijedni u točki u kojoj je argument eksponencijala Q , kao funkcija varijabli integracije, stacionaran. Rezultat se može analitički proširiti i na slučaj kad je argument eksponencijala Q čisto imaginarna funkcija.

U nekim okolnostima ovaj rezultat se može koristiti za perturbativno određivanje vrijednosti integrala i u slučajevima kad argument eksponencijala Q nije kvadratična funkcija od varijabli integracije. Ta vrsta aproksimacije se naziva **metoda stacionarne faze** (u engleskoj literaturi je poznata i pod imenom **method of steepest descent**).

Gaussovski integrali višeg reda se ponovo mogu dobiti deriviranjem po J :

$$I_{j_1 \dots j_n}(J) \equiv \int d^r \xi \xi_{j_1} \dots \xi_{j_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi + J^T \xi\right) = \frac{\partial^n I_0(J)}{\partial J_{j_1} \dots \partial J_{j_n}} \quad (3.9.10)$$

U praksi nas najčešće zanimaju Gaussovski integrali s $J = 0$:

$$I_{j_1 \dots j_{2n}}(0) \equiv \int d^r \xi \xi_{j_1} \dots \xi_{j_{2n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi\right) = \frac{\partial^n I_0(J)}{\partial J_{j_1} \dots \partial J_{j_{2n}}} \Big|_{J=0} \quad (3.9.11)$$

Primjenom (3.9.6) i (3.9.10), nakon malo kombinatorike, slijedi

$$I_{j_1 \dots j_{2n}}(0) = I_0(0) \sum_{\substack{\text{sparivanja} \\ j_1 \dots j_{2n}}} \prod_{\{j_k, j_l\}} (A^{-1})_{j_k j_l} \quad (3.9.12)$$

Gornji izraz može djelovati zbunjujuće pa ćemo pojasniti riječima njegovo značenje. Skup indeksa $\{j_1, \dots, j_{2n}\}$ rasporedimo u n parova $\{\{j_{P1}, j_{P2}\}, \dots, \{j_{P(2n-1)}, j_{P(2n)}\}\}$ gdje je P permutacija skupa od $2n$ elemenata. Svaka permutacija daje doprinos

$$(A^{-1})_{j_{P1} j_{P2}} (A^{-1})_{j_{P3} j_{P4}} \dots (A^{-1})_{j_{P(2n-1)} j_{P(2n)}}$$

i to je značenje produkta u (3.9.12). Potom sumiramo po svim permutacijama koje daju *različite doprinose*²⁸, i to je značenje sume u (3.9.12).

Za vježbu, razmotrimo dva najniža integrala

$$I_{j_1 j_2}(0) = I_0(0) (A^{-1})_{j_1 j_2} \quad (3.9.13)$$

$$I_{j_1 j_2 j_3 j_4}(0) = I_0(0) [(A^{-1})_{j_1 j_2} (A^{-1})_{j_3 j_4} + (A^{-1})_{j_1 j_3} (A^{-1})_{j_2 j_4} + (A^{-1})_{j_1 j_4} (A^{-1})_{j_2 j_3}] \quad (3.9.14)$$

Za kraj, dodajmo da iz (3.9.6) slijedi da je

$$I_0(0) = \sqrt{\frac{(2\pi)^r}{\det(A)}} \quad (3.9.15)$$

²⁸Matematičkim žargonom rečeno, skupovi indeksa koje smo gore definirali *nisu uređeni*, tj. redoslijed elemenata unutar danog skupa ne čini razliku.

3.9.2 Integrali po stazama u kvantnoj mehanici

Integrali po stazama iz kanonske kvantizacije

Kako bi se pripremili za integrale po stazama u kvantnoj teoriji polja, ovdje ćemo ukratko ponoviti njihovu definiciju u slučaju kvantne mehanike.²⁹ Razmotrimo sustav opisan generaliziranim koordinatama $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ i pridruženim kanonskim impulsima $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, koji su u kvantnoj teoriji opisani operatorima $\hat{q}(t)$ i $\hat{p}(t)$. Hamiltonijan sustava $\hat{H}(t) \equiv \hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t), t)$ je hermitski operator, za kojeg pretpostavljamo da je poredak operatora u produktima takav da su svi impulsi $\hat{p}_j(t)$ na desno od svih koordinata $\hat{q}_j(t)$ (tzv. **Weylovo uređenje** operatora).³⁰ S $|q; t\rangle$ označavamo svojstveni vektor stanja svih operatora $\hat{q}(t) = (\hat{q}_1(t), \dots, \hat{q}_n(t))$ sa svojstvenim vrijednostima jednakim $q = (q_1, \dots, q_n)$ u trenutku t . Na sličan način definiramo $|p; t\rangle$ kao svojstvena stanja od $\hat{p}(t)$.

Želimo izračunati amplitudu prijelaza sustava iz stanja $|q^{(i)}\rangle$ u trenutku t_i u stanje $|q^{(f)}\rangle$ u trenutku t_f

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle$$

Ideja je da razbijemo vremenski interval $t_f - t_i$ u jednolike podintervale trajanja δt , tako da definiramo $t_l \equiv t_i + l \delta t$, $l = 0, \dots, N+1$, gdje je $t_f = t_{N+1}$ i $t_i = t_0$, i gdje ćemo pretpostaviti da $\delta t \rightarrow 0$ (što znači $N \rightarrow \infty$). Potom u svakom trenutku t_l , $l = 1, \dots, N$ ubacimo relaciju potpunosti $1 = \int d^n q_l |q_l; t_l\rangle \langle q_l; t_l| \equiv \int dq_{1,l} \dots \int dq_{n,l} |q_l; t_l\rangle \langle q_l; t_l|$. Rezultat je:

$$\begin{aligned} \langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle &= \int d^n q_{N-1} \dots \int d^n q_1 \langle q^{(f)}; t_f | q_N; t_N \rangle \langle q_N; t_N | q_{N-1}; t_{N-1} \rangle \dots \langle q_2; t_2 | q_1; t_1 \rangle \langle q_1; t_1 | q^{(i)}; t_i \rangle \\ &= \int \left(\prod_{l=1}^N d^n q_l \right) \left(\prod_{l=0}^N \langle q_{l+1}; t_{l+1} | q_l; t_l \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.9.16)$$

Sad trebamo izvrjedniti matični element koji se javlja u gornjoj formuli. Koristeći činjenicu da je razvoj svojstvenih vektora operatora $\hat{q}(t)$ u infinitezimalnom intervalu vremena generiran hamiltonijanom $\hat{H}(t)$,

$$|q'; t + \delta t\rangle = e^{i\hat{H}(t)\delta t} |q; t\rangle \quad (3.9.17)$$

možemo pisati³¹

$$\langle q_{l+1}; t_{l+1} | q_l; t_l \rangle = \langle q_{l+1}; t_l | e^{i\hat{H}(t_l)\delta t} | q_l; t_l \rangle \quad (3.9.18)$$

Sad ćemo ponoviti trik ubacivanja relacije kompletnosti, samo što ćemo ovaj put uzeti $1 = \int d^n p_l |p_l; t_l\rangle \langle p_l; t_l|$,

$$\begin{aligned} \langle q_{l+1}; t_{l+1} | q_l; t_l \rangle &= \int d^n p_l \langle q_{l+1}; t_l | e^{i\hat{H}(t_l)\delta t} | p_l; t_l \rangle \langle p_l; t_l | q_l; t_l \rangle \\ &= \int d^n p_l e^{-iH(q_{l+1}, p_l, t_l)\delta t} \langle q_{l+1}; t_l | p_l; t_l \rangle \langle p_l; t_l | q_l; t_l \rangle \\ &= \int \frac{d^n p_l}{(2\pi)^n} \exp \left(-iH(q_{l+1}, p_l, t_l)\delta t + i \sum_{a=1}^n (q_{a,l+1} - q_{a,l}) p_{a,l} \right) \end{aligned} \quad (3.9.19)$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili Weylovo uređenje operatora u $\hat{H}$, a u trećoj jednakosti dobro znanu formulu

$$\langle q; t | p; t \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp \left(i \sum_{a=1}^n q_a p_a \right) \quad (3.9.20)$$

²⁹ Ovo gradivo se obrađuje na kolegiju *Napredna kvantna mehanika*.

³⁰ Ne zaboravite da cijelo vrijeme radimo u Heisenbergovoj slici.

³¹ Važno je imati na umu da za infinitezimalan δt vrijedi $\exp(i\hat{H}\delta t) \approx 1 + i\hat{H}\delta t$, tj. da je operator $\exp(i\hat{H}\delta t)$ linearan u $\hat{H}$.

Uvrštavanje (3.9.19) u (3.9.16) daje

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle = \int \left(\prod_{l=1}^N d^n q_l \right) \int \left(\prod_{l=0}^N \frac{d^n p_l}{2\pi} \right) \exp \left[i \sum_{l=0}^N \left(\sum_{a=1}^n (q_{a,l+1} - q_{a,l}) p_{a,l} - H(q_{l+1}, p_l, t_l) \right) \delta t \right] \quad (3.9.21)$$

gdje je $q_0 = q^{(i)}$ i $q_{N+1} = q^{(f)}$. U limesu $\delta t \rightarrow 0$ izraz u eksponentu postaje

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N \left(\sum_{a=1}^n (q_{a,l+1} - q_{a,l}) p_{a,l} - H(q_{l+1}, p_l, t_l) \right) \delta t &= \sum_{l=0}^N \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_{a,l} p_{a,l} - H(q_l, p_l, t_l) \right) \delta t + O((\delta t)^2) \\ &\rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t), t) \right) \end{aligned} \quad (3.9.22)$$

Uvrštavanje (3.9.22) u (3.9.21) daje konačni rezultat za teorije s proizvoljnim hamiltonijanima

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t), t) \right) \right] \quad (3.9.23)$$

gdje se podrazumijeva da je $q(t_i) = q^{(i)}$ i $q(t_f) = q^{(f)}$ i gdje smo u limesu $\delta t \rightarrow 0$ uveli oznake

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_{l=1}^N \int d^n q_l \equiv \int \mathcal{D}q, \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \prod_{l=1}^N \int \frac{d^n p_l}{2\pi} \equiv \int \mathcal{D}p \quad (3.9.24)$$

Treba uočiti da u limesu $\delta t \rightarrow 0$ "razlomljena" suma³² iz (3.9.21) prelazi u neku vrstu kontinuirane strukture koja "izgleda" poput integracije po (beskonačno dimenzionalnom) prostoru svih skupova funkcija $q(t) = \{q_a(t)\}$ i $p(t) = \{p_a(t)\}$, $a = 1, \dots, n$ koje zadovoljavaju rubne uvjete $q(t_i) = q^{(i)}$ i $q(t_f) = q^{(f)}$, pa ćemo ju na taj način i promatrati. Ovu specifičnu vrstu funkcionalne integracije ćemo nazivati integracija po stazama. Matematički orijentirani čitatelj se možda pita da li je ovako definirana integracija matematički smislena i da li su integrali konvergentni. Pitanje je na mjestu, i u stvari postoji brojna literatura u kojoj se razmatra matematički status integrala po stazama. Mi ćemo pretpostaviti da su integrali dobro definirani i konvergentni, tako da smijemo upotrebljavati metode koje koristimo u običnim konvergentnim integralima. Tako ćemo npr. pretpostaviti da smijemo koristiti formule za Gaussovski integrale koje smo izveli za konačnodimenzionalne integrale.

U praksi se najčešće susrećemo s hamiltonijanima koji imaju oblik

$$H(q, p, t) = \sum_{a,b=1}^n A_{ab} p_a p_b + \sum_{a=1}^n B_a(q, t) p_a + C(q, t) \quad (3.9.25)$$

gdje je A neka regularna simetrična $n \times n$ matrica. U tom slučaju se u (3.9.21) može izvršiti integracija po svim p_l jer se radi o Gaussovski integralima za koje možemo primijeniti formulu (3.9.9). Rezultat je

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_a(t) \bar{p}_a(t) - H(q(t), \bar{p}(t), t) \right) \right] \quad (3.9.26)$$

gdje je konstantni faktor $\mathcal{N}$ formalno dan s:

$$\mathcal{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\det(2\pi i A))^{-\frac{N}{2}} \quad (3.9.27)$$

dok iz (3.9.8) slijedi da $\bar{p}$ zadovoljava:

$$\dot{q}_a = \left. \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_a} \right|_{p=\bar{p}} \quad (3.9.28)$$

³²Strukture poput one koja se pojavljuje u (3.9.21) s konačnim δt matematičari nazivaju *Markovljevi lanci*.

Gornja relacija nam naprosto kaže da je impuls $\bar{p}$ povezan s q i $\dot{q}$ putem standardne kanonske relacije, što pak znači da je izraz u eksponentu u (3.9.26) naprosto klasična akcija

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_a(t) \bar{p}_a(t) - H(\bar{p}(t), q(t), t) \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) = S[q(t)] \quad (3.9.29)$$

Upotrebom toga dolazimo da konačnog rezultata za teorije s kvadratičnim hamiltonijanima u impulsu

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{iS[q(t)]} \quad (3.9.30)$$

gdje je

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad , \quad q(t_i) = q^{(i)} \quad , \quad q(t_f) = q^{(f)} \quad (3.9.31)$$

a L je klasični lagranžijan teorije.

Ostaje pitanje definicije konstantnog koeficijenta $\mathcal{N}$ za koji iz (3.9.27) vidimo da je "bolesno" definiran. Taj problem se u praksi rješava na način da se konstantni koeficijent u konačnom izrazu za prijelazni element normalizira pomoću neke veličine koja ima poznatu vrijednost, npr. $\langle q'; t | q; t \rangle = \delta(q' - q)$ (u teoriji polja najčešće se za normalizaciju koristi vakuum i relacija $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$).

Zadatak 3.9.1: Razmotrite teoriju u kojoj postoji samo jedna generalizirana koordinata q i lagranžijan je dan s

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2} f(q)$$

gdje je $f(q)$ neka funkcija koja nije konstantna.

(a) Pokažite da je hamiltonijan sustava dan s

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2f(q)} \quad (3.9.32)$$

(b) Pošto hamiltonijan (3.9.32) nije oblika (3.9.25) ne može se automatski primijeniti formula (3.9.30). Pokažite da (3.9.30) ipak valja ukoliko klasičnu akciju S zamijenimo "efektivnom akcijom" S_{ef} danom s:

$$S_{\text{ef}}[q] = \int dt L_{\text{ef}}(q, \dot{q}) \quad , \quad L_{\text{ef}}(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) - \frac{i}{2} \delta(0) \ln f(q)$$

Matrični elementi vremenski uređenih produkata operatora

Pretpostavimo sada da umjesto običnih matričnih elemenata želimo izračunati

$$\langle q^{(f)}; t_f | \hat{O}_1(\hat{p}(t_1), \hat{q}(t_1)) \cdots \hat{O}_r(\hat{p}(t_r), \hat{q}(t_r)) | q^{(i)}; t_i \rangle \quad (3.9.33)$$

gdje ćemo, iz razloga koji će ubrzo postati jasni, pretpostaviti da se operatori nalaze u vremenskom uređenju $t_f > t_1 > t_2 > \dots > t_r > t_i$, i da su operatori $\hat{O}_j$ definirani tako da se u produktima svi impulsi $\hat{p}$ nalaze na lijevo od

svih koordinata $\hat{q}$ (dakle, obrnuto nego za hamiltonijan). Razlika u odnosu na prethodni račun je u tome da ćemo u r vremenskih intervala, za koje vrijedi $t_l < t_j < t_{l+1}$, morati izvršiti sljedeći matrični element

$$\begin{aligned}\langle q_{l+1}; t_{l+1} | \hat{O}_j(\hat{p}(t_j), \hat{q}(t_j)) | q_l; t_l \rangle &= \langle q_{l+1}; t_l | e^{i\hat{H}(t_l)} \hat{O}_j(\hat{p}(t_j), \hat{q}(t_j)) | q_l; t_l \rangle \\ &= \int d^n p_l \langle q_{l+1}; t_l | e^{i\hat{H}(t_l)} | p_l; t_l \rangle \langle p_l; t_l | \hat{O}_j(\hat{p}(t_j), \hat{q}(t_j)) | q_l; t_l \rangle \\ &= \int \frac{d^n p_l}{(2\pi)^n} \mathcal{O}_j(p_l, q_l) \exp[-iH(q_{l+1}, p_l, t_l) \delta t + i(q_{l+1} - q_l) p_l]\end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{O}_j(p(t), q(t))$ klasična vrijednost konfiguracije $q(t)$ i $p(t)$ u trenutku t , i gdje smo koristili istu proceduru ubacivanja relacija potpunosti po potrebi. Vidimo da je jedina razlika u odnosu na rezultat za "obični" matrični element koji ne sadrži operator $\hat{O}$ u tome što sad postoji dodatni faktor $\mathcal{O}(t_l) \equiv \mathcal{O}(p_l(t_l), q_l(t_l))$. Nije teško zaključiti da dovršavanje računa vodi na rezultat

$$\begin{aligned}\langle q^{(f)}; t_f | \hat{O}_1(\hat{q}(t_1), \hat{p}(t_1)) \cdots \hat{O}_r(\hat{q}(t_r), \hat{p}(t_r)) | q^{(i)}; t_i \rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \mathcal{O}_1(t_1) \cdots \mathcal{O}_r(t_r) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\sum_{a=1}^n \dot{q}_a(t) p_a(t) - H(q(t), p(t), t) \right) \right]\end{aligned}$$

gdje rezultat vrijedi samo ako su operatori vremenski uređeni na način da je $t_f > t_1 > t_2 > \dots > t_r > t_i$. Interesantno je uočiti da **integral po stazama automatski "vodi brigu" o vremenskom uređenju operatora**.

Za kvadratični hamiltonijan u impulsima oblika (3.9.25), istom tehnikom kao prije se dobija konačni rezultat

$$\langle q^{(f)}; t_f | T \{ \hat{O}_1(t_1) \cdots \hat{O}_r(t_r) \} | q^{(i)}; t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \mathcal{O}_1(t_1) \cdots \mathcal{O}_r(t_r) e^{iS[q(t)]} \quad (3.9.34)$$

gdje su operatori $\hat{O}_j$ lokalni funkcionali operatora $\hat{q}(t)$ (što znači da mogu uključivati i derivacije poput $\dot{q}(t)$) i gdje se podrazumijeva da se integrira samo po stazama koje zadovoljavaju rubne uvjete $q(t_i) = q^{(i)}$ i $q(t_f) = q^{(f)}$.

Interpretacija i klasični limes

Za potrebe analize u ovom odjeljku poželjno je napisati jednažbu (3.9.30) na način da Planckova konstanta bude eksplicitno vidljiva. Nije teško zaključiti da je ispravi zapis

$$\langle q^{(f)}; t_f | q^{(i)}; t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]} \quad (3.9.35)$$

Način na koji se može interpretirati gornja formula je sljedeći:

Kvantni sustav ponaša se kao da ostvaruje sve moguće klasične staze koje ispunjavaju zadane rubne uvjete, na način da je amplituda vjerojatnosti za neku klasičnu stazu $q(t)$ proporcionalna $\exp(iS[q]/\hbar)$.

Kvantizacija pomoću integrala po stazama ujedno daje i vrlo lijepo elegantno objašnjenje klasičnog limesa. U klasičnom limesu, koji je dan s $\hbar \rightarrow 0$, možemo primijeniti metodu stacionarne faze. On nam kaže da će u integraciji dominantni doprinos dolaziti od dijela funkcijskog prostora oko staza $q_c(t)$ za koje je akcija $S[q]$ stacionarna,

$$\left. \frac{\delta S}{\delta q_a(t)} \right|_{q(t)=q_c(t)} = 0 \quad (3.9.36)$$

U okolini ostalih točaka brza promjena faze čini da doprinosi integracije iščezavaju u relativnom smislu. Za ilustraciju ovih tvrdnji poslužiti će nam sljedeći primjer s jednodimenzionalnom integracijom.

Vježba 3.9.1: Aproksimacija stacionarne faze.

Razmotrite sljedeći integral

$$I = \int dx e^{\frac{i}{\lambda} f(x)} \quad (3.9.37)$$

gdje je $f(x)$ glatka funkcija, koja se naziva fazna funkcija (ili samo faza), koja posjeduje samo jedan lokalni ekstrem smješten u $x = x_c$. Zanima nas situacija u kojoj je $\lambda \ll 1$ tako da možemo razmotriti perturbativni razvoj po λ . Pretpostavimo da želimo izračunati doprinos integrala u maloj okolini neke proizvoljne točke x_0 . U tom slučaju možemo razviti $f(x)$ u Taylorov red oko x_0 . Dobijamo

$$I = \int dx \exp \left[\frac{i}{\lambda} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \right) \right] \quad (3.9.38)$$

Ukoliko je $f'(x_0) \neq 0$ možemo izraz aproksimirati s:

$$I \approx e^{\frac{i}{\lambda} f(x_0)} \int dx e^{\frac{i}{\lambda} f'(x_0)(x-x_0)} \approx e^{\frac{i}{\lambda} f(x_0)} \frac{\lambda}{f'(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy} \quad (3.9.39)$$

Integral u gornjem izrazu nije dobro definiran no očito je po apsolutnoj vrijednosti reda veličine 1. Vidimo da je doprinos potisnut s faktorom λ . No, gornji rezultat ne vrijedi u slučaju kad je $f'(x_0) = 0$, tj. kad je $x_0 = x_c$ točka u kojoj je faza $f(x)$ stacionarna. U tom slučaju vrijedi

$$I \approx e^{\frac{i}{\lambda} f(x_c)} \int dx e^{\frac{i}{2\lambda} f''(x_c)(x-x_c)^2} \approx e^{\frac{i}{\lambda} f(x_c)} \sqrt{\frac{\lambda}{|f''(x_c)|}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i}{2} y^2} \quad (3.9.40)$$

Vidimo da je sada potisnuće "samo" s faktorom $\lambda^{1/2}$, što znači da doprinos oko ekstrema dominira u limesu $\lambda \rightarrow 0$. Sve skupa možemo pisati

$$I = e^{\frac{i}{\lambda} f(x_c)} \sqrt{\frac{\pi \lambda}{|f''(x_c)|}} \left[(1 + i) + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (3.9.41)$$

Poanta ove male demonstracije je da u limesu $\lambda \rightarrow 0$ glavni doprinos integrala dolazi iz okoline točke u kojoj je faza stacionarna. Stoga se razvoj (3.9.41) naziva **aproksimacija stacionarne faze**.

Uočite da je jednažba (3.9.36) u stvari Euler-Lagrangeova jednažba, što garantira da je $q_c(t)$ klasično rješenje, odnosno rješenje u klasičnom opisu sustava, za dane rubne uvjete. Možemo zaključiti:

U svim situacijama u kojima relevantan doprinos amplitudi vjerojatnosti (3.9.35) dolazi isključivo od klasičnih staza za koje je $S[q(t)] \gg \hbar$, doprinos kvantnoj amplitudi dolazit će od dijelova funkcijskog prostora koji se nalaze neposredno uz staze $q_c(t)$ koje su klasična rješenja za dane rubne uvjete.

Za generičke rubne uvjete obično postoji samo jedno klasično rješenje, no postoje specifične situacije u kojima postoji više klasičnih trajektorija s jednakim lagranžijanskim rubnim uvjetima. U takvim situacijama sustav može pokazivati kvantno ponašanje čak i kad je ispunjen uvjet $S[q(t)] \gg \hbar$, a primjer je eksperiment s dvije pukotine.

3.9.3 Integrali po stazama u teoriji polja

U teorijama polja elementarni stupnjevi slobode su opisani (konačnim brojem) lokalnih polja $\phi(x) = \{\phi_r(x)\} = \{\phi_r(\mathbf{x}, t)\}$, $r = 1, \dots, n$. Umjesto da ispočetka izvodimo formulu za integral po stazama za polja, naprosto ćemo upotrijebiti rezultat koji smo izveli u kvantnoj mehanici i analogiju po kojoj prostorne koordinate $\mathbf{x}$ shvatimo kao

dio indeksa a u generaliziranim koordinatama. Pošto je $\mathbf{x}$ kontinuirani vektor, možemo pretpostaviti da radimo na prostornoj rešetki $\mathbf{x}_j = \Delta \mathbf{j}$, gdje su komponente od $\mathbf{j}$ cijeli brojevi a Δ je konstanta rešetke. Na kraju računa napravimo kontinuumski limes tako da pustimo $\Delta \rightarrow 0$.

Primjenom ove logike dobijamo da formula (3.9.34) u slučaju teorije polja s hamiltonijanom kvadratičnim u kanonskim impulsima prelazi u:

$$\langle \phi^{(f)}; t_f | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_M(x_M) \} | \phi^{(i)}; t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_M(x_M) e^{iS[\phi(x)]} \quad (3.9.42)$$

gdje su $\hat{\mathcal{O}}_J(x)$, $J = 1, \dots, M$, neki lokalni operatori, dok su akcija i rubni uvjeti za polja po kojima se integrira dani s:

$$S[\phi] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \quad , \quad \phi_r(\mathbf{x}, t_i) = \phi_r^{(i)}(\mathbf{x}) \quad , \quad \phi_r(\mathbf{x}, t_f) = \phi_r^{(f)}(\mathbf{x}) \quad (3.9.43)$$

Mjera integracije je sada

$$\int \mathcal{D}\phi = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int \prod_r \prod_l \prod_j \int d\phi_r(\mathbf{x}_j, t_l) \quad (3.9.44)$$

dok je konstantni koeficijent $\mathcal{N}$ singularno definirana veličina pa uopće nećemo trošiti prostor i papir za njen eksplicitni oblik. Ponovo ćemo pretpostaviti da se funkcionalnoj integraciji može pridjeliti matematički smisao, a točne normalizacijske koeficijente ćemo u praksi dobiti dijeljenjem s nekom poznatom veličinom.

U izrazu (3.9.42) stanja $|\phi; t\rangle$ su svojstvena stanja kvantnih polja

$$\hat{\phi}_r(\mathbf{x}, t) |\phi; t\rangle = \phi_r(\mathbf{x}) |\phi; t\rangle \quad (3.9.45)$$

U praktičnim računima u kvantnim teorijama polja nas vrlo rijetko zanimaju matrični elementi sa svojstvenim stanjima polja. U stvari, kao u slučaju računa S-matrice, najčešće je dovoljno znati vakuumske matrične elemente vremenski uređenih produkata polja, na način da je $t_i \rightarrow -\infty$ i $t_f \rightarrow \infty$. Ovi se mogu dobiti iz (3.9.42) tako da ubacimo relacije kompletnosti na način

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_M(x_M) \} | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\phi'} \sum_{\phi''} \langle \Omega | \phi'; \infty \rangle \langle \phi'; \infty | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_M(x_M) \} | \phi''; -\infty \rangle \langle \phi''; -\infty | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.9.46)$$

gdje oznake suma simboliziraju funkcionalne integracije po konfiguracijskom prostoru polja $\{\phi_r(\mathbf{x})\}$. Za matrični element u sredini (koji sadrži produkt operatore) se očito može koristiti (3.9.42)-(3.9.43), uz identifikaciju $\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \rightarrow \phi''(\mathbf{x})$ i $t_i \rightarrow -\infty$, te $\phi^{(f)}(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'(\mathbf{x})$ i $t_f \rightarrow \infty$. U stvari, "suma" (tj. funkcionalnih integracija) u gornjem izrazu se možemo riješiti tako da prilikom korištenja (3.9.42) pretpostavimo da polja u integraciji po stazama više ne zadovoljavaju rubne uvjete $\phi(\mathbf{x}, -\infty) = \phi''(\mathbf{x})$ i $\phi(\mathbf{x}, \infty) = \phi'(\mathbf{x})$, već su polja u $t = \pm\infty$ neodređena. Rezultat je

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_M(x_M) \} | \Omega \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_M(x_M) e^{iS[\phi(x)]} \langle \Omega | \phi; \infty \rangle \langle \phi; -\infty | \Omega \rangle \quad (3.9.47)$$

gdje sad više ne pretpostavljamo nikakve posebne rubne uvjete na $\phi(x)$ u $t = \pm\infty$. Ostaje nam izračunati dva matrična elementa između vakuuma i svojstvenih stanja od $\hat{\phi}$ u $t = \pm\infty$. Pošto je račun relativno dug, a konačni rezultat jednostavan, napisat ćemo odmah rezultat, a izvod ostaviti za sljedeću vježbu. U slučaju skalarnog polja rezultat je

$$\langle \Omega | \phi'; \infty \rangle \langle \phi''; -\infty | \Omega \rangle = |\mathcal{N}'|^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp \left(-\frac{\epsilon}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t) e^{-\epsilon|t|} \right) \quad (3.9.48)$$

gdje je

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \omega_{\mathbf{p}} \quad (3.9.49)$$

Naivno se čini da je rezultat konstantan u limesu $\epsilon \rightarrow 0^+$, što bi značilo irelevantan, jer ukupni konstantni faktor u (3.9.47) ionako u praksi ne računamo nego određujemo iz neke poznate veličine, npr. $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$. No, to nije u potpunosti tako jer infinitezimalan ϵ može biti važan u određivanju konture integracije kad ova prolazi kroz singularitet. Uvrštavanje (3.9.48) u (3.9.47) daje

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_M(x_M) \} | \Omega \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_M(x_M) e^{i(S[\phi] + \text{"i}\epsilon\text{-članovi"})} \quad (3.9.50)$$

gdje je $\mathcal{N}'' = \mathcal{N} |\mathcal{N}'|^2$. Doprinos eksponenta u (3.9.48) skraćeno smo označili "i ϵ -članovi" iz razloga što je jedini učinak ovih članova da određuju način zaobilaznje polova u nekim integracijama. kao što ćemo uskoro vidjeti, jedan primjer ovog učinka je i ϵ prijelaz u definiciji Feynmanovih propagatora. Vidjet ćemo da je, kao posljedica činjenice da je u relativističkim teorijama polja $\omega_{\mathbf{p}} > 0$, učinak "i ϵ -članova" na određeni način univerzalan.³³ Radi preglednosti formula i kratkoće zapisa, u pravilu nećemo eksplicitno pisati "i ϵ -članove" u integralima po stazama, no oni će se uvijek podrazumijevati (kao i limes $\epsilon \rightarrow 0^+$).

Normalizacijski faktor $\mathcal{N}''$ se može izraziti na sljedeći način

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \implies \mathcal{N}'' = \left(\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \right)^{-1} \quad (3.9.51)$$

što uvršteno u (3.9.50) konačno daje formulu iz uvoda (3.9.1).

Vježba 3.9.2: Izvedite formule (3.9.48)-(3.9.49).

Kao što smo argumentirali u odjeljku 3.7.1, u asimptotskim režimima $t \rightarrow \pm\infty$ matični elementi se ponašaju kao da nema međudjelovanja, što znači da se polja ponašaju kao da su slobodna. To pak znači da možemo pisati

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}}(\pm\infty) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}(\pm\infty)^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.9.52)$$

dok za pridruženi kanonski impuls polja φ dan istom formulom kao za slobodno polje

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{\pi}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial t} \quad (3.9.53)$$

gdje su $a_{\mathbf{p}}(\infty) = a_{\mathbf{p}}^{(\text{out})}$ i $a_{\mathbf{p}}(-\infty) = a_{\mathbf{p}}^{(\text{in})}$ operatori poništenja u asimptotskim prostorima ulaznih i izlaznih stanja koji zadovoljavaju standardne komutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja. Koristeći formulu (3.2.12) i

$$a_{\mathbf{p}}(\pm\infty) | \Omega \rangle = 0 \quad (3.9.54)$$

dobijamo

$$0 = \langle \varphi(\mathbf{x}); \pm\infty | \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} [i\hat{\pi}(x) + \omega_{\mathbf{p}} \hat{\varphi}(x)] | \Omega \rangle$$

³³Postoje teorije polja u kojima $\omega_{\mathbf{p}} \neq \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ i nije pozitivan za svaki $\mathbf{p}$. Jedan primjer su neke nerelativističke teorije. Drugi primjer su relativističke teorije u kojima neka od fundamentalnih polja ne stvaraju čestice u asimptotskom prostoru stanja, što se može dogoditi u teorijama u kojima postoji zatočenje (eng. *confinement*). U takvim situacijama treba biti oprezan s primjenom "i ϵ " prijelaza u propagatorima pripadnih polja.

Ako sad upotrijebimo činjenicu da kanonski impuls djeluje na valnu funkciju u koordinatnoj bazi na način $\hat{\pi}(x) \rightarrow -i\delta/\delta\varphi(x)$, gdje je varijacija definirana u fiksnom trenutku vremena t , dolazimo do formule

$$0 = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} + \omega_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{x}) \right] \langle \varphi(\mathbf{x}); \pm\infty | \Omega \rangle \quad (3.9.55)$$

Ovu formulu možemo shvatiti kako funkcionalnu diferencijalnu jednadžbu za matrični element. Iz oblika jednažbe se da naslutiti da rješenje ima Gaussovski oblik

$$\langle \varphi(\mathbf{x}); \pm\infty | \Omega \rangle = \mathcal{N}' \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) \right] \quad (3.9.56)$$

gdje funkciju $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i konstantu $\mathcal{N}'$ tek treba odrediti. Uvrštavanjem u (3.9.55) dobijamo

$$0 = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[\int d^3\mathbf{y} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) - \omega_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{x}) \right]$$

iz čega slijedi

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \quad (3.9.57)$$

Rješenje ove jednadžbe se dobije invertiranjem Fourierovog integrala. Rezultat je

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \omega_{\mathbf{p}} \quad (3.9.58)$$

što je upravo (3.9.49). Konstanta $\mathcal{N}'$ se može dobiti iz zahtjeva normalizacije matričnog elementa, no nećemo se time gnjaviti jer nas ukupna konstanta neće zanimati. Primjenom (3.9.58) dobijamo

$$\langle \Omega | \phi'; \infty \rangle \langle \phi''; -\infty | \Omega \rangle = |\mathcal{N}'|^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{y} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\phi'(\mathbf{x}) \phi'(\mathbf{y}) + \phi''(\mathbf{x}) \phi''(\mathbf{y})] \right) \quad (3.9.59)$$

Pošto su $\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\infty, \mathbf{x})$ i $\phi''(\mathbf{x}) = \phi(-\infty, \mathbf{x})$, primjenom matematičkog identiteta

$$f(\infty) + f(-\infty) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-\epsilon|t|} \quad (3.9.60)$$

(koji vrijedi za bilo koju glatku funkciju) na $f(t) = \varphi(t, \mathbf{x}) \varphi(t, \mathbf{y})$ u (3.9.59) dobijamo za konačni rezultat upravo jednažbu (3.9.48). Time smo u potpunosti riješili zadatak.

Za kraj, par komentara na rezultat (3.9.58). Za početak, za $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ integral u (3.9.58) se može izraziti pomoću Hankelove funkcije na način

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{m}{2\pi^2 r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} K_{-1}(mr) \right) \quad , \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Nadalje, Gaussovski oblik matričnog elementa u (3.9.58) nije iznenađujući. Naime, u slučaju običnog jednodimenzionalnog harmoničkog oscilatora valna funkcija osnovnog stanja je dana s

$$\langle q | 0 \rangle = \mathcal{N}_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

gdje je $\mathcal{N}_1$ konstanta. Pošto je slobodno skalarno polje (beskonačna) kolekcija harmoničkih oscilatora, mogli smo odmah pretpostaviti Gaussovski oblik valne funkcije.

3.9.4 Konvergencija i produljenje u euklidsko vrijeme

Gledajući kako su integrali po stazama definirani, čitatelj, pogotovo ako je jako matematički orijentiran, može biti skeptičan po pitanju konvergencije. U tu svrhu razmotrimo najprije slobodno skalarno polje. Nije teško pokazati da u vodećem redu u ϵ dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N}''' \int \mathcal{D}\varphi(\dots) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^3\mathbf{y} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \varphi(\mathbf{y}, x^0) (\square_x + m^2 - i\epsilon \omega_{\mathbf{p}}) \varphi(x) \right] \end{aligned}$$

gdje u vodećem redu u ϵ možemo koristiti $e^{-\epsilon|t|} \rightarrow 1$. Također, za $\epsilon \rightarrow 0^+$ možemo $\epsilon \omega_{\mathbf{p}}$ zamijeniti s ϵ (bitno je da je $\omega_{\mathbf{p}} > 0$ pa ne mijenja predznak od ϵ). U tom slučaju integracije po $\mathbf{p}$ i $\mathbf{y}$ postaju trivijalne i dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N}''' \int \mathcal{D}\varphi(\dots) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \varphi(x) (\square + m^2 - i\epsilon) \varphi(x) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N}''' \int \mathcal{D}\varphi(\dots) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \varphi(x) (\square + m^2) \varphi(x) \right] \exp \left[-\frac{\epsilon}{2} \int d^4x \varphi(x)^2 \right] \quad (3.9.61) \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti smo izvukli zasebno $i\epsilon$ -član kako bi njegov učinak bio jasnije vidljiv. Bez njega, podintegralni funkcional je oscilirajući i stoga ne djeluje konvergentno, no $i\epsilon$ -član daje eksponencijalno gušenje koje očito čini integral konvergentnijim. U stvari, pokazuje se da je integral po stazi za slobodna polja potpuno konvergentan upravo zahvaljujući $i\epsilon$ -članovima. Sad je očito zašto je limit $\epsilon \rightarrow 0^+$, a ne $\epsilon \rightarrow 0^-$ što bi vodilo na eksponencijalnu divergenciju podintegralne funkcije. Ovo opažanje se može upotrijebiti kao mnemotehnički trik za određivanje ispravnog predznaka za $i\epsilon$ član u slučaju polja višeg spina. Stoga istaknimo još jednom:

U integralu po stazama jedna uloga $i\epsilon$ -članova je da poboljšavaju konvergenciju.

Kao što ćemo uskoro vidjeti, druga ključna uloga je da **osiguravaju kauzalnost**.

Kakva je situacija u slučaju interagirajućih teorija? Na žalost, $i\epsilon$ -prijepis nije dovoljan da garantira konvergentnost integrala po stazama. U stvari, za sada je dokazano samo to da integral po stazama postoji (u matematičkom smislu) za slobodne i neke jednostavne kvantne teorije polja u dvije i tri prostorno-vremenske dimenzije. Ovo nije problem ove metode, jer bez obzira koju metodu kvantizacije koristili **mi još uvijek nismo ni za jednu interagirajuću kvantnu teoriju polja u četiri ili više prostorno-vremenskih dimenzija dokazali da postoji u matematičkom smislu**. To je razlog zašto se može reći da još uvijek ne znamo dovoljno o kvantnim teorijama polja i zašto je njihovo istraživanje i dalje u fokusu teorijske fizike.

Promatrajući gornju formulu mogla bi nam pasti na pamet sljedeća ideja. Pretpostavimo da je moguće proširiti područje definicije vremena s realnih na kompleksne brojeve i da su T -uređene točkaste funkcije (definirane pomoću integrala po stazama) analitičke funkcije kompleksnog vremena izuzev određenog broja točkastih singulariteta i rezova grananja (eng. *branch cuts*). To bi nam omogućilo da možemo deformirati i pomicati "liniju vremena" s realne osi u kompleksnu ravninu sve dok ne prelazimo preko singulariteta. Pretpostavimo da su polovi tako postavljeni da smijemo napraviti rotaciju vremenske osi za kut $\pi/2$ i tako ju pomaknemo na imaginarnu os, $t \rightarrow -it_E$, gdje je t_E realna varijabla. Ova rotacija se naziva **Wickova rotacija**, a t_E , iz razloga kojeg ćemo ubrzo objasniti, **euklidsko vrijeme**. Posljedica Wickove rotacije je da integral po stazama poprima oblik

$$\int \mathcal{D}\phi(\dots) e^{-S_E[\phi]} \quad (3.9.62)$$

gdje se S_E naziva **euklidska akcija**. Kvantna teorija polja definirana u euklidskom vremenu naziva se **euklidska kvantna teorija polja**.

Na primjer, za realno skalarno polje opisano lagranžijanom (2.2.7) dobijamo da je S_E dan s:

$$S_E[\varphi] = \int d^4x_E \mathcal{L}_E \quad , \quad \mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\varphi)$$

gdje sada derivacije i integracije uključuju euklidsko vrijeme t_E :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_E} \quad , \quad d^4 x_E = dt_E d^3 \mathbf{x}$$

Uočite da je S_E pozitivno definitan funkcional, i to u pravilu vrijedi za sve relativističke teorije. Iz toga možemo zaključiti sljedeće:

Integral po stazama u euklidskom vremenu je konvergentniji od onog u lorentzovskom vremenu.

Naše poznavanje relativističkih kvantnih teorija polja ukazuje da su gore navedene pretpostavke točne i da su analitičko produljenje i Wickova rotacija valjane procedure. Iz tog razloga se u praksi vrlo često račun i teorijske analize izvode u euklidskom vremenu, a na koncu se konačni rezultat Wick odrotira nazad u lorentzovsko vrijeme, $t_E \rightarrow it$.

Red je da objasnimo pridjev "euklidsko". Obratite pažnju da nakon Wickove rotacije skalarni produkt postaje

$$x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2 \longrightarrow -t_E^2 - \mathbf{x}^2 = -x_E^2$$

gdje je $x_E^2 = dt^2 + \mathbf{x}^2$ standardni **skalarni produkt vektora u 4-dimenzionalnom euklidskom prostoru**. Ukoliko Wickovu rotaciju konzistentno primjenimo na sve Lorentz vektore i tenzore, nakon rotacije efekt je da metrika Minkowskog prijeđe u euklidsku metriku. Sažeto rečeno:

Euklidska teorija polja je definirana na euklidskom prostor-vremenu.

Ta tvrdnja uključuje i prostorno-vremenske simetrije, što znači da euklidska relativistička kvantna teorija polja u 4-dimenzionalnom prostor-vremenu umjesto prave Lorentzove grupe simetrije $SO(1, 3)^+$ posjeduje grupu simetrija euklidskog prostora, tj. grupu rotacija $SO(4)$. Napomenimo da u euklidskom prostoru simetrije ne čuvaju vremensko uređenje T , pa ono nije relevantno za definiciju korelatora.

Jedna od ključnih posljedica Wickove rotacije, koja čini račune (posebno one s petljama) spretnijima, je da konture integracije više ne prelaze preko polova pa u euklidskoj formulaciji možemo zaboraviti na $i\epsilon$ -članove. Kao primjer, razmotrimo 2-točkasti korelator za slobodno realno skalarno polje:

$$\langle 0 | \varphi(x_E) \varphi(y_E) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_E \cdot (x_E - y_E)}}{k_E^2 + m^2}$$

gdje smo, naravno, osim vremena t Wick rotirali $k^0 \rightarrow -ik_E^0$ pa stoga $\cdot$ sada označava euklidski skalarni produkt $x_E \cdot k_E = x_E^0 k_E^0 + \sum_{j=1}^3 x_E^j k_E^j$. Vidimo dvije prednosti euklidskog računa: (1) integracija više ne ide preko pola podintegralne funkcije pa $i\epsilon$ član možemo zanemariti, (2) možemo uvesti standardne polarne (sferne) koordinate što znatno olakšava račun i analizu.

3.10 Funkcionalne metode*

Integracija po stazama je jedan primjer funkcionalne metode, koje su vrlo važne za napredno razumijevanje kvantnih teorija polja. U ovom poglavlju ćemo razmotriti neke druge koje su podjednako važne. Usput ćemo pokazati praktičnu spretnost primjene integrala po stazama.

3.10.1 Funkcional izvodnik

Pošto skup svih T -uređenih korelacijskih funkcija sadrži potpunu informaciju o danoj kvantnoj teoriji polja, pokazuje se spretnim definirati pripadni **funkcional izvodnik**

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \langle \Omega | T \left\{ \exp \left(i \sum_r \int d^4x \hat{\phi}_r(x) J_r(x) \right) \right\} | \Omega \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{r_1} \int d^4x_1 \cdots \sum_{r_n} \int d^4x_n J_{r_1}(x_1) \cdots J_{r_n}(x_n) \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_{r_1}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{r_n}(x_n) \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.10.1)$$

gdje smo s $\hat{\phi}(x) \equiv \{ \hat{\phi}_r(x) \}$ označili fundamentalna kvantna polja u teoriji, za koja smo definirali pridružene **klasične struje** (ili **izvore**, kako se katkada nazivaju) $J(x) = \{ J_r(x) \}$. Vidimo da je $Z[J]$ (nelokalni) funkcional na prostoru struja. Iz (3.10.1) slijedi da se korelacijske funkcije dobiju iz Z na sljedeći način:

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_{r_1}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{r_n}(x_n) \} | \Omega \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{r_1}(x_1) \cdots \delta J_{r_n}(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (3.10.2)$$

gdje su $\delta/\delta J_r(x)$ funkcionalne derivacije koje smo definirali u odjeljku (2.2.2). Također je očito da vrijedi

$$Z[0] = \langle \Omega | \Omega \rangle = 1$$

Nije loše ponovo istaknuti:

Poznavanje funkcionala izvodnika $Z[J]$ jednako je potpunom poznavanju, tj. rješenju, dane teorije.

Integral po stazama je vrlo spretnan za rad s funkcionalom izvodnikom. Iz (3.9.50) i (3.10.1) očito slijedi

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \left(S[\phi] + \sum_r \int d^4x J_r(x) \phi_r(x) + \text{"}i\epsilon\text{-članovi"} \right) \right] \quad (3.10.3)$$

Normalizacijska konstanta $\mathcal{N}$ je dana u (3.9.51), no u praksi ju je nepotrebno nezavisno računati. Najjednostavniji način za računanje ukupnog konstantnog faktora u konačnom rezultatu za $Z[J]$ je primjenom $Z[0] = 1$.

3.10.2 Rješenje za slobodno realno skalarno polje

Eleganciju primjene funkcionalnih metoda demonstrirat ćemo na primjeru rješavanja teorije slobodnog realnog skalarnog polja. Lagranžijan je u ovom slučaju dan s

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2] = -\frac{1}{2} \varphi(\square + m^2)\varphi + (\text{totalna derivacija})$$

gdje smo drugu jednakost dobili parcijalnom integracijom (totalnu derivaciju u lagranžijanu kao i obično možemo odbaciti jer je nebitna). Uvrštavanje akcije u (3.10.3) daje

$$Z_0[J] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \varphi(x)(\square + m^2 - i\epsilon)\varphi(x) + J(x)\varphi(x) \right] \right\}$$

gdje smo upotrijebili rezultat za oblik $i\epsilon$ -članova iz odjeljka 3.9.4. Pošto je $\square$ linearni operator na prostoru funkcija $J(x)$, očito je da smo suočeni s Gaussovskim funkcionalnim integralom za koji možemo koristiti formulu (3.9.6), uz identifikaciju $A = i(\square + m^2 - i\epsilon)$. Rezultat je:

$$Z_0[J] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N}' \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x J(x)(A^{-1}J)(x) \right] \quad (3.10.4)$$

gdje smo konstantni faktor iz (3.9.6), koji sadrži i determinantu operatora A , utrpali u konstantu $\mathcal{N}'$ koju ćemo odrediti na kraju balade. Inverz operatora A je određen s

$$i(\square_x + m^2 - i\epsilon)A^{-1}(x, y) = \delta^4(x - y)$$

Ovo je faktički (do na faktor $-i$) ista jednačba kao za Greenovu funkciju (ili propagator) skalarnog polja, pa možemo prepisati rezultat:

$$A^{-1}(x, y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = D_F(x - y) \quad (3.10.5)$$

gdje je D_F Feynmanov propagator skalarnog polja (3.7.18). Vidimo da se $i\epsilon$ -članovi iz integrala po stazama automatski brinu o načinu kako se zaobilaze polovi u integraciji. Uvrštavanje ovog rezultata u (3.10.4) i primjena $Z_0[0] = 1$ (što daje $\mathcal{N}' = 1$) vodi na konačni rezultat za funkcional izvodnik slobodnog realnog skalarnog polja:

$$Z_0[J] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(y) D_F(x - y) J(x) \right] \quad (3.10.6)$$

gdje je $A^{-1}(x, y)$ dan u (3.10.5). Time smo u potpunosti riješili kvantnu teoriju slobodnog skalarnog polja.

Za vježbu, a ujedno i provjeru, izračunat ćemo 2-točkastu korelacijsku funkciju koristeći funkcional izvodnik. Uvrštavanje (3.10.6) u (3.10.2) za slučaj $n = 2$ daje

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \} | \Omega \rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \cdots \delta J(y)} \Big|_{J=0} = D_F(x - y)$$

što je jednako izrazu (3.7.18) koji smo dobili u kanonskoj kvantizaciji.

Kako bi stekli predodžbu o spretnosti i eleganciji funkcionalnih metoda, razmotrite sljedeći zadatak.

Zadatak 3.10.1: Koristeći izraz (3.10.6) za funkcional izvodnik izračunajte T -uređenu 4-točkastu funkciju

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) \} | \Omega \rangle$$

za slobodno realno skalarno polje. Pokažite da je dobijeni rezultat jednak onom koji smo dobili koristeći kanonsku kvantizaciju, a koji je dan u (3.8.10).

Naputak: Obratite pažnju da se za ovaj račun može vrlo spretno iskoristiti formula (3.9.14) i faktički napisati rješenje gotovo bez računanja, jer je jednačba (3.10.2) slična (3.9.11). (Oprez: Budite pažljivi pri izračunavanju konstantnog faktora.)

3.10.3 Feynmanova pravila pomoću integrala po stazama

Primjena integrala po stazama u pravilu bitno pojednostavljuje izvod Feynmanovih pravila. Uočite prvo da ako akciju napišemo kao

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_{\text{int}}[\phi] = \int d^4x (\mathcal{L}_0[\phi] + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]) \quad (3.10.7)$$

gdje je S_0 akcija slobodne teorije (za koju znamo egzaktno riješiti teoriju), a S_{int} je interakcijski dio akcije, tada iz (3.10.3) slijedi

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{int}}[\phi] + i \int d^4x J(x) \phi(x)} e^{iS_0[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{int}}[\phi]} e^{iS_0[\phi]}} \quad (3.10.8)$$

Desnu stranu gornje jednakosti smo napisali u obliku iz kojeg je jasno da ga možemo shvatiti kao da se radi o vremenski uređenim produktima slobodnih polja $\phi_0(x)$ i $\exp(iS_{\text{int}}[\phi_0])$. U stvari, Taylorov razvoj po J daje

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) e^{iS_{\text{int}}[\phi_0]} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{iS_{\text{int}}[\phi_0]} \} | 0 \rangle} \quad (3.10.9)$$

što je Gell-Mann–Low formula (3.8.28), za izvod koje smo se morali bitno više namučiti u formalizmu kanonske kvantizacije.

Proceduru za dobijanje Feynmanovih pravila direktno iz integrala po stazama prikazat ćemo na našem standardnom primjeru realnog skalarnog polja s kubnim samodjelovanjem, gdje su:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{3!} \phi^3 \quad (3.10.10)$$

Uvrštavanje u (3.10.8) i razvoj po konstanti vezanja g daje

$$Z[J] = Z_0[J] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ig}{3!} \right)^n \frac{(-i)^{3n}}{n!} \prod_{j=1}^n \int d^4x_j \frac{\delta^3 Z_0[J]}{\delta J(x_j)^3} \quad (3.10.11)$$

Uvrštavanjem funkcionala izvodnika za slobodno polje (3.10.6) i uz malo kombinatoričkih vještina nije teško ustanoviti da se perturbativni razvoj vremenski uređenih korelacijskih funkcija može napisati pomoću Feynmanovih dijagrama i pripadnih pravila koje smo kompliciranijim računom (koristeći formalizam kanonske kvantizacije) dobili u odjeljku 3.8. **Ovdje još jednom vidimo superiornost integracije po stazama u odnosu na kanonsku kvantizaciju.**

3.10.4 Schwinger–Dysonova diferencijalna jednadžba

U odjeljku (3.8.1) pokazali smo da vremenski uređene korelacijske funkcije elementarnih polja zadovoljavaju Schwinger–Dysonove jednadžbe. Sad ćemo pokazati kako se ovaj rezultat može elegantno izvesti pomoću integrala po stazama i efikasno zapisati pomoću funkcionala izvodnika. Ponovo pretpostavljamo da se lagranžijan teorije može razdvojiti u slobodni i interagirajući dio

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}_0[\phi] + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi] \quad , \quad \mathcal{L}_0[\phi] = -\frac{1}{2} \phi D_x \phi$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je slobodni lagranžijan kvadratičan u poljima. D_x je diferencijalni operator (po koordinatama x) koji je u slučaju realnog skalarnog polja dan s $D_x = \square + m^2$. Sada ćemo napraviti redefiniciju polja $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \varepsilon(x)$ gdje je $\varepsilon(x)$ fiksna ali proizvoljna funkcija za koju ćemo uzeti da je infinitezimalna. Očito je da po konstrukciji $Z[J]$ ostaje nepromijenjen nakon redefinicija polja, $Z[J] \rightarrow Z[J]$, pa možemo pisati

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}(\phi + \varepsilon) D_x (\phi + \varepsilon) + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi + \varepsilon] + J(\phi + \varepsilon) \right) \right]$$

Pošto se unutar integrala po stazama radi o običnoj "translaciji" varijable integracije, slijedi $\mathcal{D}\phi \rightarrow \mathcal{D}\phi$ i to smo iskoristili u gornjoj formuli. Razvoj gornje formule po $\varepsilon(x)$ daje

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi)} \left[1 + \int d^4x \varepsilon(x) \left(-D_x \phi(x) + \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi(x)} + J(x) \right) + O(\varepsilon^2) \right]$$

Pošto je prvi član s desne strane gornje jednakosti (onaj koji dolazi od 1 u uglatoj zagradi) jednak $Z[J]$, a pored toga jednakost vrijedi za proizvoljnu konfiguraciju polja ϕ , slijedi da mora vrijediti

$$D_x \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi)} = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi(x)} e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi)} + J(x) \int \mathcal{D}\phi e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi)}$$

Primjenom definicije za $Z[J]$, gornji izraz se može napisati u kompaktnoj formi kao

$$D_x \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \left\{ \mathcal{L}'_{\text{int}} \left[-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] + J(x) \right\} Z[J] \quad (3.10.12)$$

gdje $\mathcal{L}'_{\text{int}}[-i\delta/\delta J(x)]$ znači da prvo $\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]$ funkcionalno deriviramo po ϕ , a onda potom u dobiveni rezultat napravimo supstituciju $\phi(x) \rightarrow -i\delta/\delta J(x)$. Gornja jednađžba se naziva **Schwinger–Dysonova diferencijalna jednađžba**. Nije teško provjeriti da razvoj (3.10.12) po $J(x)$ (i uvrštavanje $D_x = \square + m^2$ za realno skalarno polje) vodi na Schwinger–Dysonove jednađžbe za vremenski uređene korelacijske funkcije (3.8.8). Na taj način eksplicitno vidimo kako integral po stazama, iako sadrži samo klasična polja u svojoj definiciji, generira kontaktne članove (proporcionalne $\hbar$) koji su čisti kvantni doprinosi pa ne postoje u klasičnoj teoriji.

Uočite sljedeće:

Kada bi bili u stanju riješiti Schwinger–Dysonovu diferencijalnu jednađžbu za danu teoriju (opisanu klasičnim lagranžijanom $\mathcal{L}$) to bi značilo da smo u potpunosti riješili tu teoriju, tj. mogli bi (na stranu mogućih čisto tehničkih barijera) izračunati egzaktnu S-matricu i sva druga fizikalna svojstva i veličine dane teorije.

Iako se za netrivialne interagirajuće teorije egzaktno rješavanje Schwinger–Dysonove diferencijalne jednađžbe pokazuje kao pretežak problem, jednađžba ima važnu primjenu u nekim pristupima proučavanja kvantnih teorija polja.

3.10.5 Kvantna efektivna akcija

Vratimo se sada na samu definiciju funkcionala izvodnika $Z[J]$, danu u (3.10.1). Ona nam kaže da pored funkcionala izvodnika $Z[J]$ ima (barem) još jednu interpretaciju – ukoliko pretpostavimo da kvantna teorija polja, opisana lagranžijanom $\mathcal{L}[\phi]$, međudjeluje s (fiksni) klasičnim vanjskim izvorima $J_r(x)$ na način da je lagranžijan dan s $\mathcal{L}[\phi] + \sum_r \phi_r J_r$, možemo zaključiti da je $Z[J]$ amplituda prijelaza iz vakuuma u $t \rightarrow -\infty$ u vakuum u $t \rightarrow \infty$, tj.³⁴

$$Z[J] = {}_J \langle \Omega; t = \infty | \Omega; t = -\infty \rangle_J \equiv {}_J \langle \Omega; \text{out} | \Omega; \text{in} \rangle_J$$

Također, ukoliko funkcionalno deriviramo $Z[J]$ po J , dobijamo vremenski uređene korelacijske funkcije (ili, kraće, T -korelatore) u prisustvu vanjskih izvora $J(x)$

$$\begin{aligned} (-i)^n \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{r_1}(x_1) \cdots \delta J_{r_n}(x_n)} &= {}_J \langle \Omega; \text{out} | T \{ \hat{\phi}_{r_1}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{r_n}(x_n) \} | \Omega; \text{in} \rangle_J \\ &\equiv \langle J | T \phi_{r_1}(x_1) \cdots \phi_{r_n}(x_n) | J \rangle \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

gdje smo u drugoj jednakosti uveli skraćeni oblik zapisa za T -korelatore koji se često koristi u literaturi.³⁵ Koristeći jezik Feynmanovih dijagrama, definicija (3.10.1) i gornja interpretacija nam govore da se $Z[J]$ sastoji od svih vakuumskih dijagrama (dijagrami bez vanjskih nogu) u prisustvu izvora $J(x) = \{J_r(x)\}$. Prisustvo izvora očito dodaje još jednu klasu čvorova, koji su u x -prostoru prostoru određeni s:

$$\text{---} \underset{r}{\times} x = i J_r(x) \quad (3.10.14)$$

U jeziku Feynmanovih dijagrama vidimo da $Z[J]$ možemo napisati kao

³⁴Sjetite se da smo u odjeljku 3.5 pokazali da vakuumi u $t = \pm\infty$ nisu jednaki čak i u slučaju kad je $J(x) \neq 0$ samo u konačnom intervalu vremena.

³⁵Obično se radi ekonomičnosti čak izbacuje slovo T i vremensko uređenje produkta operatora se implicitno podrazumijeva. No, radi izbjegavanja mogućih konfuzija, mi ćemo ga ipak eksplicitno pisati.

$$\begin{aligned}
Z[J] = & 1 + \sum_r \int d^4x \text{ (diagram: } x \text{ connected to a shaded circle labeled } r \text{)} + \frac{1}{2!} \sum_{r_1, r_2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \text{ (diagram: } x_1 \text{ and } x_2 \text{ connected to a shaded circle with labels } r_1, r_2 \text{)} \\
& + \frac{1}{3!} \sum_{r_1, r_2, r_3} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \text{ (diagram: } x_1, x_2, x_3 \text{ connected to a shaded circle with labels } r_1, r_2, r_3 \text{)} + \dots
\end{aligned} \tag{3.10.15}$$

gdje iscrtani mjehuri označavaju sve Feynmanove dijagrame (u x -prostoru) s pripadnom strukturom vanjskih nogu za teoriju s $J = 0$ (što znači bez čvora (3.10.14)), odnosno označavaju

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_{r_1}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{r_n}(x_n) \} | \Omega \rangle \equiv \langle T \phi_{r_1}(x_1) \cdots \phi_{r_n}(x_n) \rangle \quad (3.10.16)$$

Pošto je u računima pomoću Feynmanovih dijagrama dovoljno izračunati samo doprinos **povezanih** dijagrama (doprinos nepovezanih dijagrami se dobije množenjem povezanih poddijagrama), pokazuje se korisnim definirati funkcional izvodnik za tzv. **povezane** T -korelatore, koji ćemo označavati $iW[J]$, a koji sadrži sve povezane vakuum-ske dijagrame u prisustvu izvora $J(x)$. Primjena kombinatorike nam kaže da se ovaj funkcional može dobiti iz $Z[J]$ na jednostavan način putem sljedeće relacije³⁶

$$Z[J] \equiv e^{iW[J]} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(iW[J])^N}{N!} \quad (3.10.17)$$

Povezani T -korelatori u prisustvu izvora $J(x)$ se dobiju iz $W[J]$ putem formule

$$\langle J|T\phi_{r_1}(x_1)\cdots\phi_{r_n}(x_n)|J\rangle_{\text{conn}} = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_{r_1}(x_1)\cdots\delta J_{r_n}(x_n)} \quad (3.10.18)$$

gdje "conn" označava da se radi o povezanom (eng. *connected*) T -korelatoru, tj. da se uzimaju u obzir samo povezani Feynmanovi dijagrami.

Za provjeru valjanosti (3.10.17)-(3.10.18), razmotrimo 2-točkasti povezani korelator:

$$\begin{aligned} \langle J | T \phi_r(x) \phi_s(y) | J \rangle_{\text{conn}} &= (-i) \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x) \cdots \delta J_s(y)} = (-i) \frac{\delta}{\delta J_r(x)} \left(\frac{(-i)}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_s(y)} \right) \\ &= \frac{(-i)^2}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_r(x) \cdots \delta J_s(y)} - \frac{(-i)}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_r(x)} \frac{(-i)}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_s(y)} \end{aligned} \quad (3.10.19)$$

Uvrštavanje (3.10.13) u drugi red gornje jednakosti daje

$$\langle J|T\phi_r(x)\phi_s(y)|J\rangle_{\text{conn}} = \langle J|T\phi_r(x)\phi_s(y)|J\rangle - \langle J|\phi_r(x)|J\rangle\langle J|\phi_s(y)|J\rangle$$

Vidimo da kad primjenimo Feynmanove dijagrame drugi član na desnoj strani jednakosti točno odbija doprinos nepovezanih dijagrama u T -korelatoru, pa desna strana jednakosti ukupno daje povezani T -korelator, kao što traži lijeva strana jednakosti.

Koristeći Feynmanove dijagrame $W[J]$ možemo napisati kao

$$\begin{aligned}
iW[J] = & 1 + \sum_r \int d^4x \text{---} \overset{x}{\times} \text{---}_r \text{---} \text{---} + \frac{1}{2!} \sum_{r_1, r_2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \text{---} \overset{x_1}{\times} \text{---}_{r_1} \text{---} \text{---}_{r_2} \overset{x_2}{\times} \text{---} \\
& + \frac{1}{3!} \sum_{r_1, r_2, r_3} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \text{---} \overset{x_1}{\times} \text{---}_{r_1} \text{---} \text{---}_{r_2} \text{---}_{r_3} \overset{x_3}{\times} \text{---} + \dots
\end{aligned} \tag{3.10.20}$$

³⁶Doprinos Feynmanovih dijagrama u $Z[J]$ koji se sastoje od N povezanih poddijagrama, a koji sadrže $(n_1, \dots, n_N)$ čvorova, je proporcionalan faktoru $1/(n_1 + \dots + n_N)!$ koji dolazi od Dysonovog razvoja, te faktoru $(n_1 + \dots + n_N)!/N!$ jednakom broju permutacija čvorova gdje ne uračunavamo permutacije koje permutiraju poddijagrame kao cjeline. Umnožak ova dva faktora daje upravo faktor $1/N!$ koji se nalazi u (3.10.17).

gdje sada unakrsno iskrižani mjehuri označavaju doprinose svih povezanih Feynmanovih dijagrama, s odgovarajućom strukturom vanjskih nogu, za teoriju s $J = 0$, koji su dani s:

$$W_{r_1 r_2 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_{r_1}(x_1) \dots \delta J_{r_n}(x_n)} \Big|_{J=0} \equiv \langle T \phi_{r_1}(x_1) \dots \phi_{r_n}(x_n) \rangle_{\text{conn}} \quad (3.10.21)$$

Drugim riječima radi se o T -korelatorima teorije bez vanjskih izvora ($J = 0$).

Razmotrimo sad vakuumsku očekivanu vrijednost elementarnog polja $\hat{\phi}_r(x)$ u prisustvu klasičnih vanjskih izvora $J(x)$, koju ćemo označiti s $\bar{\phi}_{Jr}(x)$:

$$\bar{\phi}_{Jr}(x) = \frac{J \langle \Omega; \text{out} | \hat{\phi}_r(x) | \Omega; \text{in} \rangle_J}{J \langle \Omega; \text{out} | \Omega; \text{in} \rangle_J} = - \frac{i}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_r(x)}$$

Uvrštavanje (3.10.17) daje

$$\bar{\phi}_{Jr}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \quad (3.10.22)$$

Ovu formulu možemo invertirati. Definirajmo $J_{\phi r}(x)$ kao struje koje putem (3.10.22) vode na neke unaprijed zadane očekivane vrijednosti polja $\bar{\phi}(x)$, tj.

$$\bar{\phi}_{Jr}(x) = \bar{\phi}_r(x) \quad \text{ukoliko je} \quad J_r(x) = J_{\phi r}(x)$$

Tada **kvantnu efektivnu akciju** $\Gamma[\bar{\phi}]$ definiramo putem Legendreovog transformata na način

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J_\phi] - \sum_r \int d^4x \bar{\phi}_r(x) J_{\phi r}(x) \quad , \quad \bar{\phi}_r(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \Big|_{J=J_\phi} \quad (3.10.23)$$

Sad ćemo pokazati da je **kvantna efektivna akcija kvantni analogon klasične akcije**.

U tu svrhu razmotrimo inverz relacije (3.10.22). Funkcionalna derivacija $\Gamma[\bar{\phi}]$ po $\bar{\phi}(x)$ daje

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_s(y)} = \sum_r \int d^4x \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \bar{\phi}_s(y)} \frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \Big|_{J=J_\phi} - \sum_r \int d^4x \bar{\phi}_r(x) \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \bar{\phi}_s(y)} - J_{\phi s}(y)$$

što kad iskoristimo desnu jednakost u (3.10.23) daje konačan rezultat

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_s(y)} = -J_{\phi s}(y) \quad (3.10.24)$$

To je očekivana relacija s obzirom da je veza između $W[J]$ i $\Gamma[\bar{\phi}]$ dana Legendreovim transformatom. U dijelu prostor-vremena u kojem vanjski izvori iščezavaju (3.10.24) postaje

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_s(y)} = 0 \quad \text{u području gdje je} \quad J_\phi(y) = 0 \quad (3.10.25)$$

Jednažbe (3.10.25) i (3.10.24) imaju isti oblik kao klasična Euler-Lagrangeova jednažba, osim što se umjesto klasične akcije $S[\phi]$ sada pojavljuje kvantna efektivna akcija $\Gamma[\bar{\phi}]$. Pošto su rješenja jednažbe (3.10.25) po definiciji očekivane vrijednosti kvantnog polja u vakuumu (u (3.10.24) u prisustvu klasičnog vanjskog izvora), a očekivane vrijednosti $\bar{\phi}$ su pak kvantni analogon klasičnog polja ϕ , to nam govori da je kvantna efektivna akcija kvantni analogon klasične akcije (ili "kvantno popravljena akcija").

U slučaju kad je $J_\phi(x) = 0$ u čitavom prostor-vremenu (uključujući i "beskonačnost"), $\bar{\phi}(x)$ su očekivane vrijednosti kvantnih polja u odsustvu vanjskih izvora. Pošto je u odsustvu vanjskih izvora teorija obično simetrična na translacije u prostoru i vremenu, to implicira da su očekivane vrijednosti polja konstantne, $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}_{\text{vac}} = \text{konst.}$ Prisjetimo se da smo rekli da ćemo u pravilu definirati polja tako da je klasični vakuum dan s $\phi = 0$. No, pošto kvantni efekti mogu promijeniti ovo svojstvo, dopustit ćemo mogućnost da je $\bar{\psi}_{\text{vac}} \neq 0$. No, čak i kad je $J = 0$ nećemo se ograničiti samo na "vakuumsko" rješenje $\bar{\psi}_{\text{vac}}$, već ćemo, kao i u analizama klasičnog polja, uzeti u obzir i ostala rješenja (3.10.25) koja zadovoljavaju standardne fizikalne zahtjeve. Ova rješenja možemo interpretirati kao poremećaje u poljima (poput zračenja) koja stvaraju izvori u "beskonačnosti", pa ćemo ih stoga nazivati **vanjska polja**.

Interpretacija i računanje kvantne efektivne akcije

Kvantna efektivna akcija je izuzetno važan objekt koji ne samo da sadrži gotovo potpunu informaciju o pripadnoj kvantnoj teoriji polja, već se pokazuje koristan u praktičnim računima i analizama. Pošto se definiciona jednadžba (3.10.23) u praksi ne pokazuje spretna za računanje kvantne efektivne akcije, važno je razviti tehnike neposrednog računanja. S obzirom da smo često ograničeni na perturbativni račun, bilo bi dobro imati način za računanje $\Gamma[\bar{\phi}]$ neposrednom primjenom Feynmanovih dijagrama. Kako to već biva, tokom ovog razmatranja ćemo steći dodatno razumijevanje značenja kvantne efektivne akcije.

Za početak, ako $\Gamma[\bar{\phi}]$ shvatimo kao funkcional izvodnik tako da definiramo pripadne n -točkaste funkcije na način

$$\Gamma_{r_1 r_2 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) = i \left. \frac{\delta^n \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_{r_1}(x_1) \dots \delta \bar{\phi}_{r_n}(x_n)} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}_{\text{vac}}} \quad (3.10.26)$$

pokazuje se da vrijedi:

$\Gamma_{r_1 r_2 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n)$ s $n \geq 3$ su **jednočestično ireducibilni** T -korelatori u odsustvu izvora ($J = 0$), koji su sačinjeni od povezanih Feynmanovih dijagrama u x -prostoru s n vanjskih nogu koje su **amputirane**. U slučaju $n = 2$, $\Gamma_{rs}(x, y)$ je inverz od $-W_{rs}(x, y)$ (u operatorskom smislu).

Jednočestično ireducibilni (eng. *one-particle irreducible*, pa koristimo kraticu **1PI**) T -korelatori sadrže samo povezane jednočestično ireducibilne Feynmanove dijagrame, tj. dijagrame koji se ne mogu napraviti nepovezanim odstranjivanjem samo jedne (bilo koje) linije, u kojima su vanjske noge **amputirane** (tj. dijagram je pomnožen s inverzima svih propagatora koji pripadaju vanjskim nogama). Treba imati u vidu da se Feynmanova pravila konstruiraju pomoću polja definiranih u odnosu na vakuum, $\phi'(x) = \phi(x) - \bar{\phi}_{\text{vac}}$. Skica dokaza je dana u zadatku 3.10.2.

Zbog gornjeg svojstva često se koristi notacija

$$\Gamma_{r_1 r_2 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle T \phi_{r_1}(x_1) \dots \phi_{r_n}(x_n) \rangle_{\text{1PI}} \quad (3.10.27)$$

Vježba 3.10.2: Dokažite gornju tvrdnju.

Varijacija po J se može izraziti pomoću varijacije od $\bar{\phi}$ na sljedeći način:

$$\frac{\delta}{\delta J_{\phi r}(x)} = \sum_s \int d^4 y \frac{\delta \bar{\phi}_s(y)}{\delta J_{\phi r}(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_s(y)} = \sum_s \int d^4 y \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi r}(x) \delta J_{\phi s}(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_s(y)} \quad (3.10.28)$$

Prva jednakost je matematički identitet (pravilo lanca za funkcionalne derivacije), a za dobivanje druge jednakosti smo upotrijebili (3.10.22).

Uzastopnim deriviranjem desne jednadžbe u (3.10.23) po J_ϕ i primjenom (3.10.28) može se dokazati tvrdnja za svaki n . Demonstrirat ćemo ovo na primjeru 2-točkastih i 3-točkastih korelacijskih funkcija.

Ako funkcionalno deriviramo (3.10.24) po $J_{\phi r}(x)$ i primijenimo (3.10.28) dobijamo

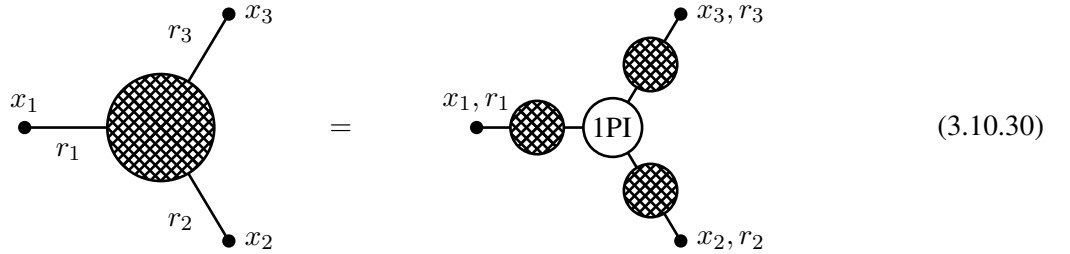
$$\sum_t \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_s(y) \delta \bar{\phi}_t(z)} \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi t}(z) \delta J_{\phi r}(x)} = -\delta_{rs} \delta^4(x - y) \quad (3.10.29)$$

Ova relacija nam govori da je $\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]/\delta \bar{\phi}_s(y) \delta \bar{\phi}_t(z)$ operatorski inverz od $-\delta^2 W[J_\phi]/\delta J_{\phi t}(z) \delta J_{\phi r}(x)$, čime smo dokazali tvrdnju za $n = 2$.

Ukoliko dvaput funkcionalno deriviramo desnu jednadžbu u (3.10.23) po J , pa upotrijebimo (3.10.24) i (3.10.28) može se dobiti sljedeća jednakost

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi r_1}(x_1) \delta J_{\phi r_2}(x_2) \delta J_{\phi r_3}(x_3)} &= \sum_{s_1 s_2 s_3} \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \int d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi r_1}(x_1) \delta J_{\phi s_1}(y_1)} \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi r_2}(x_2) \delta J_{\phi s_2}(y_2)} \\ &\times \frac{\delta^2 W[J_\phi]}{\delta J_{\phi r_3}(x_3) \delta J_{\phi s_3}(y_3)} \frac{\delta^3 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_{s_1}(y_1) \delta \bar{\phi}_{s_2}(y_2) \delta \bar{\phi}_{s_3}(y_3)} \end{aligned}$$

Ova relacija, promatranu iz perspektive Feynmanovih dijagrama, ima sljedeći grafički prikaz:



Mjehur s natpisom 1PI označava doprinos $i\delta^3 \Gamma[\bar{\phi}]/\delta \bar{\phi}_{s_1}(y_1) \delta \bar{\phi}_{s_2}(y_2) \delta \bar{\phi}_{s_3}(y_3)$. Iz ovog grafičkog prikaza treba biti jasno da je:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_{s_1}(y_1) \delta \bar{\phi}_{s_2}(y_2) \delta \bar{\phi}_{s_3}(y_3)} = -i \langle J | T \phi_{r_1}(x_1) \phi_{r_2}(x_2) \phi_{r_3}(x_3) | J \rangle_{1PI} \quad (3.10.31)$$

1PI 3-točkasti T -korelator, što je dokaz tvrdnje za slučaj $n = 3$. Koristeći matematičku indukciju i (3.10.28) može se proširiti dokaz na $n > 3$, no mi se nećemo time baviti.

Razmotrimo relaciju (3.10.29) izvrijednjenu za $J = 0$, odnosno $\bar{\phi} = \bar{\phi}_{vac}$. U tom slučaju ona glasi:

$$\sum_\ell \int d^4 z \Gamma_{r\ell}(x, z) W_{\ell s}(z, y) = -\delta_{rs} \delta^4(x - y) \quad (3.10.32)$$

gdje je $W_{\ell s}(z, y)$ 2-točkasta korelacijska funkcija (tj. propagator) definirana u (3.10.21), dok je $\Gamma_{r\ell}(x, z)$ 2-točkasta 1PI korelacijska funkcija čija definicija i značenje je dano u (3.10.26)-(3.10.27). Pokazat će se važnim napisati gornju jednadžbu u p -prostoru. Ukoliko definiramo na standardni način korelatore u p -prostoru na način

$$\Gamma_{r\ell}(x, z) = \Gamma_{r\ell}(x - z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-z)} \tilde{\Gamma}_{r\ell}(p)$$

i slično za W , i uvrstimo to u (3.10.32) nakon kraćeg računa dobijamo:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \sum_\ell \tilde{\Gamma}_{r\ell}(p) \tilde{W}_{\ell s}(p) = -\delta_{rs} \delta^4(x - y) = -\delta_{rs} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (3.10.33)$$

Iz gornje relacije slijedi

$$\sum_{\ell} \tilde{\Gamma}_{r\ell}(p) \tilde{W}_{\ell s}(p) = -\delta_{rs} \quad (3.10.34)$$

tj. da su Fourierovi transformati matrični inverzi jedan od drugog (do na minus predznak).

Obratite pažnju da dokaz skiciran u zadatku 3.10.2, u smislu interpretacije korelatora pomoću Feynmanovih dijagrama, vrijedi za generičke izvore J i pripadni $\bar{\phi}$, a ne samo za $J = 0$ i $\bar{\phi} = \bar{\phi}_{\text{vac}}$. To znači da interpretaciju danu u (3.10.26)-(3.10.27) i razvoje po korelatorima možemo proširiti na proizvoljan $\bar{\phi}(x)$. Izraženo jezikom Feynmanovih dijagrama, to se može sažeto napisati na način:

$$i\Gamma[\bar{\phi}] = \int_{\text{1PI}} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi+\bar{\phi}]} \quad (3.10.35)$$

gdje oznaka 1PI kaže da treba sumirati samo po jednočestično ireducibilnim Feynmanovim dijagramima. Vidimo da polja $\bar{\phi}(x)$ igraju ulogu "funkcija vezanja" u konstrukciji čvorova za Feynmanova pravila (slično kao što se ponašaju konstante vezanja u akciji).

Formulu (3.10.35) možemo napisati i u sljedećem obliku³⁷

$$e^{i\Gamma[\bar{\phi}]} = \int_{\text{n1PI}} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi+\bar{\phi}]}$$

gdje kratica n1PI označava sumiranje po svim Feynmanovim dijagramima, povezanim ili ne, čiji su svi povezani poddijagrami jednočestično ireducibilni. Kombiniranjem gornje formule i (3.10.20) dolazimo do sljedećeg rezultata:

$$iW[J] = \int_{\text{povezani drvasti}} \mathcal{D}\phi e^{i\Gamma[\phi]+i\int\phi J} \quad (3.10.36)$$

gdje se pretpostavlja da se sumira **samo po povezanim drvastim** Feynmanovim dijagramima dobivenima iz kvantne efektivne akcije i člana s izvorima, $\Gamma[\phi] + \int\phi J$. Doprinosi petlji su **u potpunosti sadržani u kvantnoj efektivnoj akciji** $\Gamma[\phi]$. Ova formula ima važnu interpretaciju za razumijevanje razvoja po $\hbar$ – pošto su drvasti dijagrami povezani s klasičnom fizikom, vidimo da je **sva informacija o kvantnim doprinosima sadržana u kvantnoj efektivnoj akciji**.

3.10.6 Efektivni potencijal

Razmatranja iz prošlog odjeljka nam govore da kvantna efektivna akcija ima oblik

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\bar{\phi}] + O(\hbar) \quad (3.10.37)$$

gdje doprinos dijagrama s ℓ petlji ima faktor $\hbar^\ell$. Vidimo da kvantna efektivna akcija uistinu ima oblik koji očekujemo od kvantno korigirane akcije. Doduše, kao što ćemo malo kasnije vidjeti, pokazuje se da je u nekim netrivialnim teorijama, npr. onima u kojima klasični potencijal nije svugdje konveksna funkcija, formula (3.10.37) zahtijeva određenu modifikaciju. Račun kvantne efektivne akcije za neke jednostavnije primjere ćemo napraviti nakon što savladamo osnove teorije renormalizacije, koja je nužna u računu. No, odmah ćemo napomenuti da su doprinosi petlji u svakom pojedinom redu u $\hbar$ **nelokalni**, što znači da je kvantna efektivna akcija, za razliku od klasične akcije $S[\bar{\phi}]$, nelokalni funkcional.

Pretpostavimo sada da želimo izračunati efektivnu akciju za konstantna vanjska polja $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi} = \text{konst.}$ U tom slučaju po analogiji s klasičnom akcijom definiramo **(kvantni) efektivni potencijal** putem relacije

³⁷Koristeći sličnu logiku kojom stoji iza formule (3.10.17) i veze između $Z[J]$ i $W[J]$, u smislu Feynmanovih dijagrama.

$$\Gamma[\bar{\phi}] = -V_4 \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) \quad \text{za} \quad \bar{\phi} = \text{konst.} \quad (3.10.38)$$

gdje je V_4 volumen prostor-vremena. Iz (3.10.37) očito slijedi da je

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) = \mathcal{V}(\bar{\phi}) + O(\hbar) \quad (3.10.39)$$

gdje je $\mathcal{V}(\bar{\phi})$ klasični potencijal (koji je sastavni dio klasične akcije).³⁸ Efektivni potencijal $\mathcal{V}_{\text{eff}}$, slično kao klasični potencijal u klasičnoj teoriji, **igra ključnu ulogu u određivanju svojstava vakuuma u kvantnoj teoriji polja**. Razmotrimo to sada detaljnije.

U slučaju kada ne postoje vanjski izvori ($J = 0$) i sustav je **zatvoren** (izoliran od vanjskih utjecaja) postoji simetrija na translacije u prostor-vremenu, $x^\mu \rightarrow x'^\mu + a^\mu$. Iz pravila transformacije kvantnih polja na translacije

$$\hat{\phi}_r(x) \longrightarrow \hat{\phi}'_r(x) = U(a)^\dagger \hat{\phi}_r(x) U(a) = \hat{\phi}_r(x - a) \quad (3.10.40)$$

gdje su $U(a)$ operatori translacije u prostor-vremenu čija svojstva su

$$U(a) = \exp(ia^\mu P_\mu) \quad , \quad U(a)^\dagger = U(a)^{-1} = U(-a) \quad (3.10.41)$$

te pretpostavke da ove simetrije nisu slomljene, što znači da je vakuum invarijantan na njihovo djelovanje

$$U(a)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (3.10.42)$$

dobijamo

$$\bar{\phi}_r(x) \equiv \langle \Omega | \hat{\phi}_r(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | U(x)^\dagger \hat{\phi}_r(0) U(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{\phi}_r(0) | \Omega \rangle = \bar{\phi}_r(0) \equiv \bar{\phi}_r \quad (3.10.43)$$

Pokazali smo da su očekivane vrijednosti polja konstante u prostor-vremenu.³⁹ Iz (3.10.25) i (3.10.38) slijedi da se očekivana vrijednost polja u vakuumu $\bar{\phi}$ dobije rješavajući sustav jednačbi

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}_r} \right|_{\bar{\phi} = \bar{\phi}_{\text{vac}}} = 0 \quad (3.10.44)$$

Vidimo da u ovom smislu efektivni potencijal u kvantnoj teoriji polja igra ulogu koju klasični potencijal igra u klasičnoj teoriji polja. Za upotpunjenje korespondencije ostaje za pokazati da je $\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_{\text{vac}})$ jednako energiji vakuuma, što je naš sljedeći zadatak.

Energijska interpretacija efektivnog potencijala

Pretpostavimo da želimo riješiti sljedeći problem – pronaći stanje $|\Psi_\phi\rangle$ koje minimizira očekivanu vrijednost energije $\langle \hat{H} \rangle_\Psi$

$$\langle \hat{H} \rangle_\Psi = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (3.10.45)$$

gdje je $\hat{H}$ operator hamiltonijana, podvrgnuto uvjetima da kvantna polja⁴⁰ $\hat{\phi}_r(\mathbf{x})$ imaju zadane očekivane vrijednosti jednake $\bar{\phi}_r(\mathbf{x})$, te da su normalizirana na jedinicu, tj.

$$\frac{\langle \Psi | \hat{\phi}_r(\mathbf{x}) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \bar{\phi}_r(\mathbf{x}) \quad , \quad \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (3.10.46)$$

³⁸Već smo komentirali da relacija (3.10.37), pa stoga ni (3.10.39), nije uvijek istinita. Na kraju odjeljka ćemo se vratiti na ovo pitanje.

³⁹Na isti način se pokazuje da u relativističkim teorijama polja u kojima je Poincaréove simetrija neslomljena, samo skalarna polja, tj. spin-0 polja, mogu imati neiščezavajuće vakuumske očekivane vrijednosti.

⁴⁰U ovom odjeljku iznimno koristimo Schrödingerovu sliku.

Naučili ste (npr. na kursu iz statističke mehanike) da se ovakvi problemi traženja ekstrema u prisustvu uvjeta spretno rješavaju metodom Lagrangeovih multiplikatora, tako da se minimizira veličina

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - \alpha \langle \Psi | \Psi \rangle - \sum_r \int d^3 \mathbf{x} \beta_r(\mathbf{x}) \langle \Psi | \hat{\phi}_r(\mathbf{x}) | \Psi \rangle$$

bez postavljanja uvjeta na $|\Psi\rangle$. Parametri α i $\beta_r(\mathbf{x})$ su Lagrangeovi multiplikatori. Ovo daje

$$\hat{H}|\Psi_\phi\rangle = \alpha_\phi|\Psi_\phi\rangle + \sum_r \int d^3 \mathbf{x} \beta_{\phi r}(\mathbf{x}) \hat{\phi}_r(\mathbf{x})|\Psi_\phi\rangle \quad (3.10.47)$$

Multiplikatori α_ϕ i $\beta_{\phi r}(\mathbf{x})$ se odrede iz uvjeta (3.10.46), što znači da funkcionalno ovise o $\bar{\phi}_r(\mathbf{x})$.

No, kakve ovo ima veze s efektivnim potencijalom? Da bi to shvatili, pretpostavimo da teorija međudjeluje s vanjskim izvorima $J(x)$ koji zadovoljavaju $J(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ za $t \rightarrow \pm\infty$ i koji su adijabatski dovedeni do vrijednosti $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ koja se održava konstantnom tijekom vremenskog intervala T , te potom adijabatski isključeni (na način vremenski inverzan od uključenja). Ukoliko je sustav u $t = -\infty$ bio u "in" vakuumu (vakuum teorije s $J = 0$), učinak ovakve perturbacije vanjskim izvorom je da "in" vakuum (tijekom uključenja izvora) adijabatski prevede u stanje opisano (normaliziranim) vektorom u Hilbertovom prostoru $|\Psi_{\mathcal{J}}\rangle$ u kojem provede vremenski interval T , nakon kojeg se sustav adijabatski pređe u "out" stanje (tijekom isključenja izvora). Koristeći adijabatsku aproksimaciju možemo pretpostaviti da je stanje $\Psi_{\mathcal{J}}$, u kojem sustav "boravi" tijekom intervala T , vakuum teorije u prisustvu vremenski konstantnog izvora $\mathcal{J}(\mathbf{x})$, čiju ćemo pripadnu svojstvenu vrijednost energije označiti s $E[\mathcal{J}]$ (koja je funkcional od $\mathcal{J}(\mathbf{x})$) tj.

$$\hat{H}[\mathcal{J}]|\Psi_{\mathcal{J}}\rangle = \left[\hat{H} - \sum_r \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{J}_r(\mathbf{x}) \hat{\phi}_r(\mathbf{x}) \right] |\Psi_{\mathcal{J}}\rangle = E[\mathcal{J}]|\Psi_{\mathcal{J}}\rangle \quad (3.10.48)$$

Sličnost između (3.10.47) i (3.10.48) nije samo formalno matematička. Uočite da će jednadžbe problema ekstremizacije koji smo originalno naumili riješiti, (3.10.46) i (3.10.47), biti zadovoljene ako napravimo identifikacije:

$$|\Psi_\phi\rangle = |\Psi_{\mathcal{J}_\phi}\rangle, \quad \alpha = E[\mathcal{J}_\phi], \quad \beta_r(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_{\phi r}(\mathbf{x}) \quad (3.10.49)$$

gdje je $\mathcal{J}_{\phi r}(\mathbf{x})$ izvor za koji je očekivana vrijednost operatora $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ u stanju $|\Psi_{\mathcal{J}}\rangle$ jednaka $\bar{\phi}_r(\mathbf{x})$.

Uspostavljanje veze između očekivane vrijednosti polja $\bar{\phi}$ i izvora J_ϕ je znak da je konačno došlo vrijeme da u igru uvedemo efektivni potencijal. Funkcional izvodnik $Z[J]$ za izvor J definiran u gornjem razmatranju je dan s

$$\begin{aligned} Z[J] &= {}_J\langle \Omega; t = \infty | \Omega; t = -\infty \rangle_J = \langle \Omega | S_J(\infty, -\infty) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | S_J(\infty, T/2) S_{\mathcal{J}}(T/2, -T/2) S_J(-T/2, -\infty) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Psi_{\mathcal{J}} | S_{\mathcal{J}}(T/2, -T/2) | \Psi_{\mathcal{J}} \rangle = \langle \Psi_{\mathcal{J}} | e^{-i\hat{H}[\mathcal{J}]T} | \Psi_{\mathcal{J}} \rangle \\ &= e^{-iE[\mathcal{J}]T} \end{aligned} \quad (3.10.50)$$

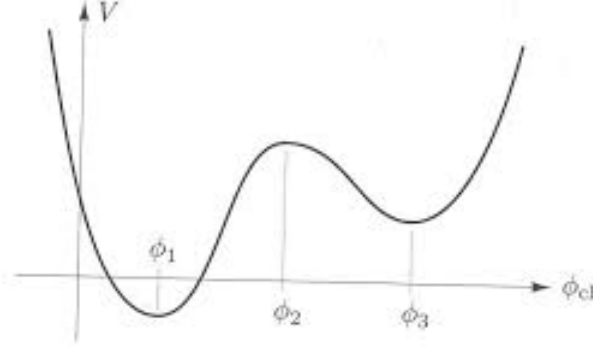
gdje je $|\Omega\rangle$ vakuum teorije za $J = 0$, a $S_J(t, t')$ operator vremenskog razvoja u prisustvu izvora $J(x)$.

Uvrštavanje (3.10.50) u (3.10.17) daje

$$W[J] = -i \ln Z[J] = -E[\mathcal{J}]T \quad \implies \quad E[\mathcal{J}] = -\frac{W[J]}{T} \quad (3.10.51)$$

Množenje (3.10.47) s lijeva bra-vektorom $\langle \Psi_\phi |$ i potom primjena (3.10.49) i (3.10.51) daju:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\Psi_\phi} &= E[\mathcal{J}_\phi] + \sum_r \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{J}_{\phi r}(\mathbf{x}) \bar{\phi}_r(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T} \left[W[J_\phi] - \sum_r \int d^4 \mathbf{x} J_{\phi r}(\mathbf{x}) \bar{\phi}_r(\mathbf{x}) \right] \\ &= -\frac{\Gamma[\bar{\phi}]}{T} \end{aligned} \quad (3.10.52)$$



Slika 3.3: Primjer klasičnog potencijala $\mathcal{V}(\phi)$ koji nije svugdje konveksan.

Ukoliko je $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}$ konstantno unutar velikog volumena prostor-vremena $V_4 = TV$, onda kvantnu efektivnu akciju možemo izraziti pomoću efektivnog potencijala putem (3.10.38), što uvršteno u gornju jednakost daje konačan rezultat za minimalnu očekivanu vrijednost volumne gustoće energije

$$\frac{\langle H \rangle_{\Omega_\phi}}{V} = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) \quad (3.10.53)$$

na podskupu stanja $|\Psi\rangle$ koja zadovoljavaju

$$\langle \hat{\phi}_r(\mathbf{x}) \rangle_\Psi = \bar{\phi}_r \quad (3.10.54)$$

Ovaj izuzetno važni rezultat ćemo istaknuti riječima:

$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})$ je minimum očekivane vrijednosti gustoće energije za stanja koja poštuju uvjet da kvantna polja $\hat{\phi}_r$ imaju svojstvene vrijednosti $\bar{\phi}$. Posljedica je da je u odsustvu vanjskih izvora vakuum teorije (njegov položaj i energija) određen globalnim minimumom od $\mathcal{V}_{\text{eff}}(\phi)$.

Konveksnost efektivnog potencijala

Ipak, postoji jedna razlika između efektivnog potencijala $\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})$ i klasičnog potencijala $\mathcal{V}(\bar{\phi})$. U slučaju relativističke teorije s jednim realnim skalarnim poljem može se pokazati da je efektivni potencijal uvijek dan **konveksnom** funkcijom, što znači da vrijedi

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}^2} > 0 \quad \text{za svaki } \bar{\phi} \quad (3.10.55)$$

Umjesto da trošimo vrijeme da dokazujemo ovu tvrdnju, u idućem odjeljku ćemo dati jednostavni argument na osnovu kojeg očekujemo da tvrdnja vrijedi i puno općenitije. No, ono što moramo odmah razjasniti je prilično očita kontradikcija između tvrdnji (3.10.39) i (3.10.55). Naime, iz (3.10.39) slijedi da bi trebalo vrijediti

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) = \mathcal{V}(\bar{\phi}) \quad (3.10.56)$$

što je u kontradikciji s (3.10.55) tamo gdje $\mathcal{V}(\bar{\phi})$ nije konveksna funkcija. Uočite da a priori ne postoji nikakav razlog zašto bi klasični potencijal bio konveksan. Sad ćemo pokazati da nema nikakvih problema s (3.10.55), no da (3.10.39) i (3.10.56) treba korigirati.

Kao primjer, razmotrimo teoriju s jednim realnim poljem s klasičnim potencijalom $\mathcal{V}(\phi)$ prikazanim na slici 3.3. Uočite da potencijal posjeduje dva lokalna minimuma, u ϕ_1 i ϕ_3 , od kojih je prvi i globalni minimum što znači da određuje klasični vakuum teorije. Također postoji i lokalni maksimum lociran u ϕ_2 . Obratite pažnju da između ϕ_1 i ϕ_3 postoji interval unutar kojeg $\mathcal{V}(\phi)$ očito nije konveksan. Ukoliko $\hbar$ možemo tretirati kao mali parametar, kvantne korekcije čine malu perurbaciju (bar u konačnom intervalu u ψ) pa bi naivna primjena (3.10.39) rekla da efektivni potencijal izgleda približno jednako klasičnom potencijalu, tj. oblik mu je kao na slici 3.3 (iako detalji, poput točnog položaja ekstrema $\bar{\phi}_{1,3}$ ili dubine jama, ovise o $\hbar$).⁴¹ Sad ćemo pokazati zašto jednadžba (3.10.39) nije točna u intervalu između $\bar{\phi}_1$ i $\bar{\phi}_3$.

U tu svrhu, označimo s $|1\rangle$ i $|3\rangle$ stanja koja imaju minimalne očekivane vrijednosti gustoće energije u skupovima stanja čije očekivane vrijednosti polja $\hat{\phi}(x)$ su $\bar{\phi}_1$, odnosno $\bar{\phi}_3$. Koristeći naučeno, možemo napisati

$$\frac{\langle 1|\hat{H}|1\rangle}{V} = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_1) \quad , \quad \langle 1|\hat{\phi}(x)|1\rangle = \bar{\phi}_1 \quad ; \quad \frac{\langle 3|\hat{H}|3\rangle}{V} = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_3) \quad , \quad \langle 3|\hat{\phi}(x)|3\rangle = \bar{\phi}_3 \quad (3.10.57)$$

Ukoliko je teorija polja definirana na beskonačnom prostoru, kao što je to obično slučaj, onda stanja $|1, 3\rangle$ imaju iščezavajuće preklapanje, uključujući usendvičenja operatora izgrađenih od produkata konačnog broja polja (i njihovih derivacija), pa vrijedi

$$\langle 1|3\rangle = 0 \quad , \quad \langle 1|\hat{H}|3\rangle = 0 \quad , \quad \langle 1|\hat{\phi}(x)|3\rangle = 0 \quad (3.10.58)$$

Dat ćemo dva argumenta zašto gornja preklapanja iščezavaju. Jedan je primjenom WKB aproksimacije koja nam kaže da amplituda vjerojatnost tuneliranja iz jame 3 u jamu 1, čije neiščezavanje je nužno da bi vrijedilo $\langle 1|3\rangle \neq 0$, posjeduje faktor

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \exp \left(-V \int_{\phi'}^{\phi_3} d\phi \sqrt{2(\mathcal{V}(\phi) - \mathcal{V}(\phi_3))} \right) = 0$$

gdje je ϕ' točka između ϕ_1 i ϕ_2 za koju vrijedi $V(\phi') = V(\phi_3)$. Vidimo da je iščezavanje direktna posljedica beskonačnosti volumena prostora V . Nevjerne Tome kojima WKB argument nije dovoljno uvjerljiv mogu pronaći drugi argument za valjanost (3.10.58) u zadatku 3.10.3 ispod.

Razmotrimo sada sljedeće superpozicije stanja $|1\rangle$ i $|3\rangle$:

$$|\lambda\rangle \equiv \lambda |3\rangle + \sqrt{1 - \lambda^2} |1\rangle \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Koristeći (3.10.57) i (3.10.58) lako je pokazati da stanja $|\lambda\rangle$ zadovoljavaju

$$\bar{\phi}_\lambda \equiv \langle \lambda|\hat{\phi}(x)|\lambda\rangle = \lambda^2 \bar{\phi}_3 + (1 - \lambda^2) \bar{\phi}_1 \quad (3.10.59)$$

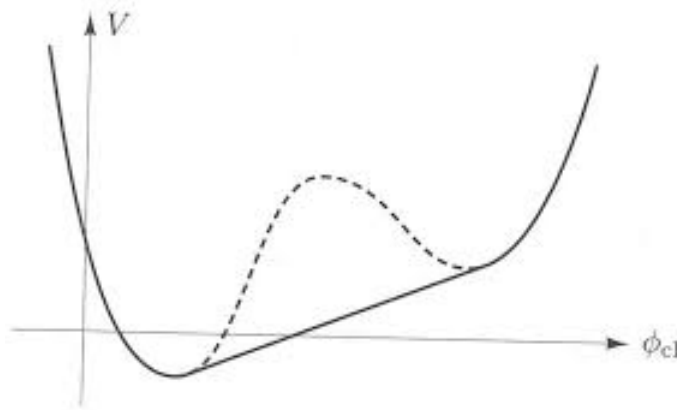
$$\bar{\mathcal{H}}_\lambda \equiv \frac{\langle \lambda|\hat{H}|\lambda\rangle}{V} = \lambda^2 \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_3) + (1 - \lambda^2) \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_1) \quad (3.10.60)$$

Jednadžba (3.10.59) nam kaže da kako λ ide od $0 \rightarrow 1$, tako ϕ_λ ide od $\bar{\phi}_1 \rightarrow \bar{\phi}_3$, dok $\bar{\mathcal{H}}_\lambda$ ide od $\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_1) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_3)$ **po pravcu**.

Sad dolazimo do poante. Pošto efektivni potencijal $\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})$ predstavlja minimum očekivane vrijednosti energije za stanja čija očekivana vrijednost polja $\hat{\phi}$ je jednaka $\bar{\phi}$, to znači da efektivni potencijal mora zadovoljavati

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_\lambda) \leq \bar{\mathcal{H}}_\lambda$$

⁴¹Obratite pažnju da kvantna korekcija, kako god malen $\hbar$ bio u odnosu na parametre teorije, može značajno promijeniti oblik efektivnog potencijala za velike iznose od $|\bar{\phi}_r|$, ukoliko je asimptotsko ponašanje korekcije (za $|\bar{\phi}_r| \rightarrow \infty$) dominantno u odnosu na klasični potencijal. To je vrlo važna stvar koja igra bitnu ulogu u analizi Higgsovog potencijala u Standardnom modelu fizike čestica. Također se može dogoditi da kvantna korekcija producira nove ekstreme (tzv. Coleman-Weinberg mehanizam). Radi jednostavnosti, ovdje ćemo pretpostaviti da su parametri teorije takvi da nijedna od ovih mogućnosti nije relevantna.



Slika 3.4: Potencijal $[\mathcal{V}(\bar{\phi})]_M$ dobijen primjenom Maxwellove konstrukcije na klasični potencijal $\mathcal{V}(\phi)$ prikazan na slici 3.3.

U slučaju u kojem je gornja nejednakost saturirana, efektivni potencijal je očito konveksan i za $\bar{\phi}_1 < \bar{\phi} < \bar{\phi}_3$. Pošto ovu konstrukciju možemo uvijek ponoviti na bilo kojem intervalu, dokazali smo da efektivni potencijal mora biti konveksan. Ova konstrukcija pravljenja funkcije konveksnom "povlačenjem pravca" je poznata iz dokaza konveksnosti termodinamičkih potencijala u statističkoj mehanici i naziva se **Maxwellova konstrukcija**.

Nije teško zaključiti da u limesu $\hbar \rightarrow 0$, efektivni potencijal teži klasičnom potencijalu na kojem je primjenjena Maxwellova konstrukcija, što znači da (3.10.56) moramo zamijeniti s

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) = [\mathcal{V}(\bar{\phi})]_M$$

gdje $[\dots]_M$ označava da je na klasičnom potencijalu primjenjena Maxwellova konstrukcija. Za slučaj klasičnog potencijala sa slike 3.3, Maxwellova konstrukcija vodi na $[\mathcal{V}(\bar{\phi})]_M$ prikazan na slici 3.4.

Sažeto rečeno, konveksnost potencijala je posljedica činjenice da je prostor stanja kvantizirane teorije puno veći od prostora stanja pripadne klasične teorije zbog postojanja linearnih superpozicija makroskopski različitih stanja koja nemaju klasični analogon. Npr. stanja $|\lambda\rangle$ su takva stanja jer su dobijena superponiranjem stanja $|\phi_{1,3}\rangle$ koja se makroskopski razlikuju. Postojanje takvih stanja, koja nemaju klasični analogon, dovodi do konveksnosti efektivne akcije čak i u limesu $\hbar \rightarrow 0$. Poanta je da se kvantni sustav suštinski razlikuje od klasičnog bez obzira kako god $\hbar$ bio malen.

Vježba 3.10.3: Neekvivalentni Hilbertovi prostori. Beskonačni spinski lanac

Jedan način za razumijevanje (3.10.58) je da su Hilbertovi prostori izgrađeni Fockovom procedurom na stanjima $|1, 3\rangle$ neekvivalentne reprezentacije operatorske algebre koje su međusobno ortogonalne. U tu svrhu razmotrimo jednostavan primjer beskonačnog jednodimenzionalnog spinskog lanca koji se sastoji od $N = \infty$ čvorova. U svakom čvoru nalazi se "spin" opisan dvodimenzionalan prostorom stanja u kojem možemo uvesti ortonormiranu bazu:

$$|+\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |-\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(+ ćemo zvati spin gore, – spin dolje stanje). Prostor stanja spinskog lanca je direktni produkt prostora pojedinih spinova, što znači da je razapet ortonormiranom bazom $|\dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots\rangle$, gdje svaki $s_n, n \in \mathbb{Z}$, može poprimiti vrijednost + ili –. Ako definiramo ultralokalne hermitske operatore $\hat{O}_n$ (kandidati za tzv. ultralokalne opservable) koji djeluju lokalno na čvoru n , iz teorije angularnog momenta znamo da se svaki ovakav operator može napisati kao linearna kombinacija četiri operatora $(1, \vec{\sigma}_n)$, gdje su $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ Paulijeve matrice. Iz definicije Paulijevih

matrica očito je da su stanja $|\pm\rangle$ svojstvena stanja σ^3 sa svojstvenim vrijednostima ± 1 . Opće opservable se dobiju linearnim kombiniranjem produkata ultralokalnih opservabli, $\hat{O} = \hat{O}_{n_1} \cdots \hat{O}_{n_r}$. **Lokalne opservable** će karakterizirati to da u svakom pojedinom produktu ultralokalnih operatora može sudjelovati samo konačan broj čvorova. Jedna posebno zanimljiva lokalna opservabla je "magnetski moment" u čvoru n definiran s $\hat{m}_n = \sigma_n^3$

Pretpostavimo da je međudjelovanje između spinova ograničeno samo na "prve susjede" u lancu i da je hamiltonijan dan s

$$\hat{H} = -h \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3 - 1)$$

gdje je h konstanta vezanja koja mjeri jakost međudjelovanja susjednih spinova. Time smo u potpunosti definirali ovaj beskonačno dimenzionalni kvantno-mehanički sustav, koji je u literaturi poznat kao jednodimenzionalni kvantni **Isingov model**.

Pronađimo sada vakuum(e) ove teorije. Pošto je međudjelovanje takvo da minimizacija energije preferira paralelnu orijentaciju susjednih spinova, očito je da postoje dva vakuuma u ovoj teoriji, $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$, definirani s

$$|\uparrow\rangle = |\cdots + + + \cdots\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |\cdots - - - \cdots\rangle$$

čija energija je nula. Oba vakuuma su ujedno i svojstvena stanja magnetizacije sa svojstvenim vrijednostima $M_{\uparrow} = 1$, $M_{\downarrow} = -1$. Vidimo da Isingov model daje vrlo jednostavan opis **feromagnetizma**.

Uočite da ne samo da stanja $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ nemaju preklapanje, $\langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$, već da to vrijedi i kad između njih "usendvičimo" proizvoljni lokalni operator jer je

$$\langle\downarrow|\hat{O}_{n_1} \cdots \hat{O}_{n_r}|\uparrow\rangle = 0 \quad \text{za konačan } r$$

Hilbertovi prostori stanja konstruirani djelovanjem svih lokalnih operatora na $|\uparrow\rangle$, odnosno $|\downarrow\rangle$, nemaju međusobno preklapanje.

Vrijeme je da pokažemo kakve sve ovo ima veze s lokalnim kvantnim teorijama polja i jednakostima (3.10.58). Kao prvo, ako na Isingov model napravimo kontinuumski limes (sličnom procedurom koju smo objasnili u odjeljku 1.1.1) dobijamo lokalnu kvantnu teoriju polja u $(1+1)$ dimenzionalnom prostor-vremenu, u kojoj magnetizacija m_n postaje lokalno polje $\hat{m}(x)$. Ovu teoriju nećemo detaljno opisati jer je fermionska (spin-1/2), a fermionske teorije još nismo razmatrali). U ovoj teoriji polja možemo uvesti efektivni potencijal koji daje minimum očekivane vrijednosti gustoće energije za stanja koja imaju konstantnu očekivanu vrijednost polja magnetizacije, $\bar{m} = \langle\hat{m}(x)\rangle$. Stanja $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ su po konstrukciji stanja koja pripadaju lokalnim (i globalnim) minimumima efektivnog potencijala, koje razlikuje vrijednost od $\bar{m}$ (ima suprotan predznak). Eksplicitno smo pokazali da vrijedi

$$\langle\downarrow|\hat{O}(x)|\uparrow\rangle = 0$$

za svaki lokalni operator $\hat{O}$ u teoriji, što je upravo (3.10.58) koju smo htjeli na ovom primjeru demonstrirati.

Uočite da je u ovoj argumentaciji ključna pretpostavka da sustav posjeduje **beskonačan broj stupnjeva slobode**, te pojam **lokalnosti**.⁴² U stvari, postoji hermitski operator koji povezuje stanja $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ i dan je s

$$U \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=-N}^N \frac{1}{2} (\sigma_n^1 - i\sigma_n^2), \quad U|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

Za N konačan ovaj operator bi bio sasvim prihvatljiv kao opservabla, no za $N = \infty$ ovaj operator ne spada u lokalne operatore jer pretpostavlja djelovanje na stanje u svim točkama beskonačnog prostora. Takvo djelovanje ne može se postići fizikalnim djelovanjem koje je lokalno (tj. ograničeno na konačan dio prostora i vremena) i stoga takve operatore ne uključujemo u operatorsku algebru pri konstrukciji Hilbertovog prostora stanja (sjetimo se da smo nešto slično pretpostavili u Fockovoj proceduri). Stoga za $N = \infty$ dobijamo da svaki vakuum $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$ kreira svoj

⁴²Postoji i pretpostavka da je kontinuumski limit smislen, no to se može dokazati.

vlastiti Hilbertov prostor stanja. Poanta je da u slučaju beskonačnog broja stupnjeva slobode mogu postojati neekvivalentne reprezentacije iste operatorske algebre (u ovom primjeru to je operatorska algebra konstruirana od Paulijevih matrica).

U stvari možemo konstruirati beskonačno mnogo neekvivalentnih reprezentacija ove algebre. Ako uvedemo klasu unitarnih operatora $U(\theta)$ i pripadnih stanja $|\theta\rangle$, definiranih s

$$U(\theta) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(-i \frac{\theta}{2} \sum_{n=-N}^N \sigma_n^2 \right), \quad , \quad |\theta\rangle \equiv U(\theta) |\uparrow\rangle$$

lako se pokaže da vrijedi (uočite da je $|0\rangle = |\uparrow\rangle$ i $|\pi\rangle = |\downarrow\rangle$)

$$\langle \uparrow | \theta \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^N = 0 \quad \text{za } \theta \neq 0$$

Ovdje eksplicitno vidimo važnost limesa $N \rightarrow \infty$, jer bi za konačan N stanja $|\uparrow\rangle$ i $|\theta\rangle$ imala konačno preklapanje što znači da bi se nalazila u istom Hilbertovom prostoru stanja. U stvari se može pokazati jača relacija

$$\langle \theta' | \hat{O}(x) | \theta \rangle = 0 \quad , \quad \theta' \neq \theta$$

koja vrijedi za svaki lokalni operator $\hat{O}(x)$, pa vidimo da postoji neprebrojivo mnogo neekvivalentnih reprezentacija ove operatorske algebre.

Za kraj napomenimo da primjenom Baker-Hausdorff leme

$$e^{i\theta\hat{G}} \hat{A} e^{-i\theta\hat{G}} = A + i\lambda[\hat{G}, \hat{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] + \dots + \frac{(i\lambda)^n}{n!} [\hat{G}, [G, [\dots, [\hat{G}, \hat{A}]] \dots]] + \dots \quad (3.10.61)$$

koja vrijedi za bilo koji hermitski operator $\hat{G}$ i bilo koji operator $\hat{A}$, te komutatora $[\sigma^2, \sigma^3] = 2i\sigma^1$ možemo pokazati da je

$$\bar{m}_\theta \equiv \langle \theta | \sigma_n^3 | \theta \rangle = \cos \theta$$

iz čega slijedi da se stanja $|\theta\rangle$ makroskopski razlikuju jer imaju različite očekivane vrijednosti parametra uređenja (magnetizacije) za koji očekujemo da je (makroskopska) opservabla.

Računanje efektivnog potencijala

Ovdje ćemo objasniti kako se efektivni potencijal može neposredno perturbativno računati u Feynmanovom razvoju. Kao prvo, iz (3.10.26) slijedi

$$\Gamma[\bar{\phi}] = -i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{n!} \sum_{r_k} \int d^4 x_k (\bar{\phi}_{r_k}(x_k) - \bar{\phi}_{r_k}^{(\text{vac})}) \right] \Gamma_{r_1 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.10.62)$$

Ukoliko su polja konstantna, $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}$, možemo ih izvući izvan integracija. To znači da ukoliko definiramo n -točkaste funkcije u p -prostor na standardni način

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \Gamma_{r_1 \dots r_n}(x_1, \dots, x_n)$$

upotrijebimo standardnu korespondenciju $(2\pi)^4 \delta^4(0) = V_4$, te na koncu definiciju efektivnog potencijala (3.10.38), za konstantna polja $\bar{\phi}$ izraz (3.10.62) postaje:

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}) = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_{\text{vac}}) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{k=1}^n \sum_{r_k} (\bar{\phi}_{r_k} - \bar{\phi}_{r_k}^{(\text{vac})}) \right] \tilde{\Gamma}_{r_1 \dots r_n}(0, \dots, 0) \quad (3.10.63)$$

Vidimo da je efektivni potencijal dan s IPI T -korelatorima sa iščezavajućim 4-impulsima na vanjskim nogama.

Gornja formula još uvijek nije najspretnija formulacija za neposredno računanje efektivnog potencijala jer uključuje $\bar{\phi}_{\text{vac}}$, za čiji račun je potrebno znati efektivni potencijal. U tom smislu puno bolje je upotrijebiti formulu (3.10.35) iz koje se ujedno mogu konstruirati Feynmanova pravila potrebna za račun $\mathcal{V}[\bar{\phi}]$. S obzirom da su u ovom slučaju polja $\bar{\phi}$ konstantna, u Feynmanova pravila ulazit će na isti način kao konstante vezanja.

3.10.7 Spontani lom simetrije u kvantnoj teoriji polja

U odjeljku 2.5 analizirali smo pojavu spontanog loma simetrije koristeći klasičnu teoriju polja i dobili vrlo zanimljive posljedice. Npr. u slučaju spontanog loma globalne kontinuirane simetrije jedna važna posljedica je pojava bezmasenih Goldstoneovih polja. Pošto a priori ništa ne garantira da kvantizacija sustava neće ubiti neko dano klasično svojstvo, ovdje ćemo pokazati da ukoliko simetrija preživi kvantizaciju, tada automatski preživljava i Goldstoneov teorem. Pošto se u analizi spontanog loma simetrije radi o analizi svojstava vakuuma i fluktuacija oko vakuuma, ne treba iznenaditi da su kvantna efektivna akcija i potencijal pravi alat za ovu analizu.

Kad govorimo o simetrijama teorije, treba imati na umu da postoji mogućnost da neće sve simetrije klasične teorije preživjeti kvantizaciju, tj. da će lokalni zakon sačuvanja nekih struja biti narušen, $\partial_\mu j_a^\mu = O(\hbar)$. Ova pojava je primjer **kvantnih anomalija**. Ukoliko se radi o globalnim simetrijama to znači da kvantna teorija ima manju grupu simetrija od klasične, sa svim posljedicama kao što je broj egzaktno sačuvanih naboja u teoriji, no sama po sebi nije dramatična u smislu da je teorija konzistentna kvantna teorija polja.⁴³ Stoga, kad govorimo o egzaktnim simetrijama, mislimo na simetrije kvantizirane teorije.

Simetrije kvantne teorije polja manifestiraju se kao simetrije kvantne efektivne akcije. Pošto u analizi vakuuma kvantne teorije efektivni potencijal preuzima ulogu klasičnog potencijala, možemo gotovo u potpunosti ponoviti analizu iz odjeljka 2.5.3 na način da u formulama klasični potencijal $\mathcal{V}$ zamijenimo efektivnim potencijalom $\mathcal{V}_{\text{eff}}$. Treba imati u vidu da kvantni doprinosi mogu promijeniti svojstva vakuuma, npr. da kvantna teorija posjeduje spontani lom simetrije iako je klasična teorija neslomljena (**Coleman–Weinberg mehanizam**), iako to najčešće nije slučaj. Ukoliko su infinitezimalne globalne kontinuirane simetrije kvantne efektivne akcije opisane s

$$\delta\bar{\phi}_r(x) = \sum_{a=1}^{d_G} \sum_s \epsilon_a t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s(x)$$

gdje $t^{(n)}$ reprezentiraju generatore grupe simetrija G , tada slijedeći proceduru dokaza Goldstoneovog teorema za klasičnu teoriju polja iz odjeljka 2.5.3 dobijamo

$$\sum_{r,s} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}_{\text{eff}}[\bar{\phi}]}{\partial \bar{\phi}_\ell \partial \bar{\phi}_r} \right|_{\bar{\phi}_{\text{vac}}} t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s = 0 \quad , \quad a = d_H + 1, \dots, d_G \quad (3.10.64)$$

gdje su $\bar{\phi}_r$ očekivane vrijednosti polja u vakuumu. U gornjoj jednadžbi pretpostavljeno je da postoji podgrupa H grupe G , čije generatore smo označili s $a = 1, \dots, d_H$, na čije djelovanje su vakuumi invarijantni, $t_{rs}^{(a)} \bar{\phi}_s = 0$ za $a = 1, \dots, d_H$. Drugim riječima, samo transformacije generirane s $a = d_H + 1, \dots, d_G$ sudjeluju u spontanom lomu simetrije. Sad ćemo pretpostaviti da je $d_H < d_G$, tj. da je spontani lom simetrije prisutan, što znači da formula (3.10.64) daje netrivialnu informaciju o efektivnom potencijalu.

Kombiniranjem (3.10.63) i (3.10.34) dobijamo da je⁴⁴

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}_{\text{eff}}[\bar{\phi}]}{\partial \bar{\phi}_\ell \partial \bar{\phi}_r} \right|_{\bar{\phi}_{\text{vac}}} = i\tilde{\Gamma}_{r\ell}(0) = -i(\tilde{G}(p)^{-1})_{r\ell}$$

Ukoliko uvrstimo gornju relaciju u (3.10.64), dobijamo da inverz propagatora u $p = 0$ posjeduje svojstvenu vrijednost jednaku nula koja je $d_G - d_H$ degenerirana. Pošto iz opće analize znamo da ove nule mogu odgovarati samo polovima

⁴³Postoje situacije, poput narušenja lokalnih simetrija, u kojima kvantne anomalije čine da kvantizacija klasične teorije polje ne vodi na konzistentnu kvantnu teoriju polja. Ovdje ćemo pretpostaviti da to nije slučaj.

⁴⁴Koristimo uobičajenu konvenciju za 2-točkaste korelatore, koja koristi zakon očuvanja 4-impulsa: $\tilde{\Gamma}_{rs}(p, -p) \equiv \tilde{\Gamma}_{rs}(p)$.

propagatora u $p^2 = 0$, a polovi propagatora određuju fizikalne mase čestica, možemo zaključiti da teorija posjeduje $d_G - d_H$ bezmasenih čestica. Time smo dokazali Goldstoneov teorem u kvantnoj teoriji polja.

Jedna posljedica Goldstoneovog teorema je da operator naboja koji pripada spontano slomljenoj simetriji ne postoji kao operator na Hilbertovom prostoru stanja. Da bi to dokazali, razmotrite djelovanje takvog operatora naboja $\hat{Q}_a$ na vakuum

$$|\alpha_a\rangle \equiv \hat{Q}_a |\Omega\rangle \neq 0$$

Norma stanja $|\alpha_a\rangle$ je dana s:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_a | \alpha_a \rangle &= \langle \Omega | Q_a Q_a | \Omega \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \langle \Omega | j_a^0(x) Q_a | \Omega \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \langle \Omega | e^{i\hat{P}\cdot x} j_a^0(0) e^{-i\hat{P}\cdot x} Q_a | \Omega \rangle \\ &= \int d^3 \mathbf{x} \langle \Omega | j_a^0(0) Q_a | \Omega \rangle = \langle \Omega | j_a^0(0) Q_a | \Omega \rangle \int d^3 \mathbf{x} \\ &= \infty \end{aligned}$$

gdje smo koristili sačuvanje naboja $[\hat{Q}_a, P_\mu] = 0$ i translacijsku invarijantnost vakuuma $P_\mu |\Omega\rangle = 0$. Vidimo da, kao posljedica beskonačnosti prostora, $|\alpha_a\rangle$ ne postoji kao stanje u Hilbertovom prostoru fizikalnih stanja. Ovo se naziva **Fabri-Picasso teorem**. S druge strane, uočite da se u komutatorima, poput

$$[Q_a, \phi(x)] = \delta\phi(x)$$

operator naboja sasvim dobro ponaša.

Uzrok ovog ponašanja je s jedne strane u postojanju kontinuuma vakuuma i s druge strane u beskonačnosti prostora koja brani postojanje preklapanja između različitih vakuuma (čak i onih koji su infinitezimalno blizu u klasičnoj teoriji). Hilbertovi prostori izgrađeni na različitim vakuumima predstavljaju neekvivalentne reprezentacije iste operatorske algebre (vidi zadatak 3.10.3 koji demonstrira Fabri–Picasso teorem).

3.10.8 Sličnost sa statističkom mehanikom

Vrijeme je da riješimo muka čitatelje koji su prateći razradu funkcionalnih metoda (uključujući integrale po stazama) bar povremeno imali *deja vu*. Nekima je spomen Maxwelllove procedure vjerojatno otvorio oči, jer sad ćemo vidjeti da **za metode koje smo koristili i veličine koje smo uveli postoje manje-više direktni analogoni u statističkoj mehanici**. Da bi to učinili što jasnijim, razmotrimo te veze na primjeru statističkog modela opisanog kontinuiranim (klasičnim) varijablama s_n ("spinovi") koji su smješteni na čvorovima D -dimenzionalne prostorne rešetke na lokacijama $\mathbf{x}_n$, $n \in \mathbf{Z}$. Pretpostavimo da je u izostanku vanjskog međudjelovanja hamiltonijan sustava dan s $H[s]$. Ukoliko sustav stavimo u kontakt s toplinskim rezervoarom temperature T i primjenimo vanjsko polje $\vec{B}(\mathbf{x})$ ("magnetsko polje"), sustav će ući u stanje termodinamičke ravnoteže. Particijska funkcija sustava je dana s

$$Z[T, B] = \prod_n \int ds_n \exp \left[-\beta \left(H[s] - \sum_n B(\mathbf{x}_n) s_n \right) \right] \quad (3.10.65)$$

gdje je $\beta = 1/kT$. Ukoliko nas zanima termodinamičko ponašanje sustava na prostornim skalama puno većim od konstanti rešetke, možemo pretpostaviti da se (bar u određenim okolnostima) može napraviti kontinuumski limes, što znači da umjesto diskretnim spinovima s_n sustav možemo aproksimativno opisati kontinuiranim poljem $s(\mathbf{x})$. Ukoliko je međudjelovanje među spinovima lokalno, u smislu da svaki spin značajnije međudjeluje samo s manjim brojem susjednih spinova, tada će hamiltonijan u kontinuumskom limesu biti lokalna,

$$H[s] = \int d^D \mathbf{x} \mathcal{H}(s(\mathbf{x}), \nabla s(\mathbf{x}), \nabla \nabla s(\mathbf{x}), \dots)$$

gdje točkice označavaju moguću ovisnost o višim derivacijama od $s(\mathbf{x})$ od prve. Na primjer, ukoliko je u kontinuumskom limesu prisutna simetrija na translacije i rotacije u prostoru, gustoća hamiltonijana će biti oblika

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = (\nabla s)^2 + \mathcal{V}(s) + \dots$$

gdje točkice označavaju članove s više od dvije derivacije.⁴⁵ No, točan oblik gustoće hamiltonijana nije važan za našu analizu koja će biti općenita i u kojoj možemo pretpostaviti da postoji više lokalnih realnih varijabli $s_r(\mathbf{x})$, koje se često nazivaju **varijable uređenja** jer u praktičnim primjenama njihovo neiščezavanje najčešće znači da u sustavu postoji (lokalno) uređenje (kao što je to slučaj kod spinova gdje varijabla $s(\mathbf{x})$ opisuje lokalnu magnetizaciju sustava).

U kontinuumskom limesu partijska funkcija (3.10.65) postaje

$$Z[T, B] = \int \mathcal{D}s \exp \left\{ -\beta \int d^D \mathbf{x} [\mathcal{H}[s(\mathbf{x})] - B(\mathbf{x}) s(\mathbf{x})] \right\} \quad (3.10.66)$$

gdje $\mathcal{D}$ označava funkcionalnu integraciju po konfiguracijama polja $s(\mathbf{x})$. U statističkoj fizici uvodimo slobodnu energiju $F[T, B]$ na način

$$F[T, B] = -kT \ln Z[T, B]$$

Magnetizacija sustava se dobije na način:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta F}{\delta B(\mathbf{x})} \Big|_T &= \frac{1}{\beta} \frac{\delta \ln Z}{\delta B(\mathbf{x})} \Big|_T = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}s s(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\beta \int d^D \mathbf{x} [\mathcal{H}[s(\mathbf{x})] - B(\mathbf{x}) s(\mathbf{x})] \right\} \\ &= \langle s(\mathbf{x}) \rangle \equiv M(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.10.67)$$

gdje $|_T$ označava da se derivira držeći temperaturu T fiksnom, $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ označava statističko usrednjenje po ansamblu, i gdje smo usrednjenje varijable uređenja označili s $M(\mathbf{x})$ (M kao "magnetizacija").

Gibbsova slobodna energija se definira kao Legendreova transformacija od F ,

$$G[T, M] = F[T, B] + \int d^D \mathbf{x} M(\mathbf{x}) B(\mathbf{x}) \quad (3.10.68)$$

što znači da zadovoljava

$$\frac{\delta G}{\delta M(\mathbf{x})} \Big|_T = B(\mathbf{x}) \quad (3.10.69)$$

Često nas zanima situacija u kojoj su vanjska polja prostorno konstantna, $B(\mathbf{x}) = B$, pa očekujemo i da su sve termodinamičke veličine kojima opisujemo sustav takve. U našem primjeru to znači $M(\mathbf{x}) = M$, što nas pak vodi na definiranje volumnih gustoća termodinamičkih potencijala:

$$f(T, B) = \frac{F(T, B)}{V} \quad , \quad g(\beta, M) = \frac{G(\beta, M)}{V} \quad (3.10.70)$$

koji su sada obične funkcije (a ne funkcionali) svojih varijabli. U tom slučaju dobijamo prepoznatljiv oblik gornjih jednažbi,

$$\frac{\partial f}{\partial B} \Big|_T = -M \quad , \quad g(T, M) = f(T, B) + MB \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial M} \Big|_T = B \quad (3.10.71)$$

Za $B = 0$ Gibbsova slobodna energija je ekstremalna za pripadnu vrijednost od M . Termodinamički najstabilnije stanje je minimum od $g(T, M)$ za dani fiksni T .

Poželjivom čitatelju bi trebalo biti očito da sve veličine koje smo uveli imaju svoje pandane u funkcionalnom formalizmu kvantne teorije polja definirane u Euklidskom vremenu. Da bi to vidjeli, napišimo funkcional izvodnik za euklidsku kvantnu teoriju polja u D -dimenzionalnom prostor-vremenu, koju smo definirali u odjeljku 3.9.4,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^D \mathbf{x} [\mathcal{L}_E[\phi(x)] - J(x) \phi(x)] \right\}$$

⁴⁵Za dovoljno niske frekvencije, odnosno dovoljno velike valne duljine članovi s višim derivacijama se mogu tretirati kao perturbacija.

Statistička mehanika (TD ravnoteža)	Euklidska kvantna teorija polja
prostor ($\mathbf{x}$)	(euklidsko) prostor-vrijeme (x_E)
lokalne varijable uređenja ($s_r(\mathbf{x})$)	(skalarna) polja ($\phi_r(x_E)$)
gustoća hamiltonijana ($\mathcal{H}(\mathbf{x})$)	gustoća lagranžijana ($\mathcal{L}_E(x_E)$)
temperatura (kT)	Planckova konstanta ($\hbar$)
vanjsko polje ($B(\mathbf{x})$)	vanjski izvor ($J(x_E)$)
particijska funkcija ($Z[T, B]$)	funkcional izvodnik ($Z[J]$)
slobodna energija ($F[T, B]$)	povezani funkcional izvodnik ($W_E[J]$)
usrednjenje po ansamblu ($\langle\langle \cdots \rangle\rangle$)	vakuumska očekivana vrijednost (${}_J\langle \cdots \rangle_J$)
usrednjeno uređenje ($M(\mathbf{x})$)	vanjsko polje ($\bar{\phi}(x_E)$)
Gibbsova slobodna energija ($G[T, M]$)	kvantna efektivna akcija ($\Gamma_E[\bar{\phi}]$)
gustoća Gibbsove sl. energije ($g(T, M)$)	efektivni potencijal ($\mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})$)

Tablica 3.1: Analogije između statističkog modela s lokalnim varijablama u termodinamičkoj ravnoteži i euklidske kvantne teorije polja.

Vidimo da particijska funkcija (3.10.66) izgleda potpuno jednako kao funkcional izvodnik za kvantnu teoriju polja $\phi(x) = s(\mathbf{x})$ u D -dimenzionalnom euklidskom prostor-vremenu $x = \mathbf{x}$, s gustoćom lagranžijana danom s $\mathcal{L}_E = \mathcal{H}$, vanjskim izvorom $J(x) = B(\mathbf{x})$, te uz identifikaciju $\hbar = kT$. Statističko usrednjenje po ansamblu $\langle\langle \cdots \rangle\rangle$ odgovara vakuumskoj očekivanoj vrijednosti $\langle \cdots \rangle$, slobodna energija $F[T, B]$ odgovara funkcionalu izvodniku za povezane korelatore $W_E[J]$, dok Gibbsova slobodna energija odgovara kvantnoj efektivnoj akciji $\Gamma_E[\bar{\phi}]$. Za konstantno vanjsko polje B , odnosno izvor J , volumna gustoća Gibbsove slobodne energije $g(T, M)$ odgovara efektivnom potencijalu $\mathcal{V}(\bar{\phi})$. Ova korespondencija između statističke mehanike klasičnog sustava u termodinamičkoj ravnoteži i kvantne teorije polja je sažeta u tablici 3.1.

Iz korespondencije statističke fizike sustava s beskonačno stupnjeva slobode i kvantne teorije polja treba izvući sljedeću općenitu poantu:

Rezultate i intuiciju koju smo stekli u jednom formalizmu, možemo iskoristiti u drugom.

Na primjer, u statističkoj mehanici je poznato da je Gibbsova energija G konveksna funkcija, pa po korespondenciji vidimo da isto treba očekivati i za efektivni potencijal.

Pri primjeni ove formalne korespondencije treba paziti da je u njoj sama kvantna teorija polja definirana na temperaturi $T = 0$. Stoga se ne smije pobrkati sa situacijom u kojoj se sustav opisan kvantnom teorijom polja nalazi u termičkoj ravnoteži na konačnoj temperaturi T . U ovom drugom slučaju T i $\hbar$ postaju nezavisni parametri.

Poglavlje 4

Simetrije i spin

Iako opće formule koje smo do sada izveli imaju prirodnu generalizaciju na opća polja, ostaje činjenica da smo se do sada bavili samo skalarnim poljima, koja, kao što ćemo uskoro vidjeti, posjeduju spin jednak nula (spin-0). U ovom poglavlju razmotrit ćemo detaljnije posljedice Poincaréove simetrije, karakteristične za specijalnu relativnost, i vidjeti da je jedna od njih postojanje **spina** i objašnjenje njegovih svojstava. Detaljno ćemo razmotriti kvantizaciju spin-1 i spin-1/2 polja. Objasniti ćemo kako je spin povezan sa čestičnom statistikom putem **spin-statistika teorema**. Razmotrit ćemo relativističke kvantne teorije polja koje posjeduju unutarnju **Abelovu baždarnu simetriju**, koje su posebno važne jer **kvantna elektrodinamika** spada u ovu klasu teorija. Također ćemo razmotriti pitanje diskretnih simetrija na primjeru P , C i T simetrije i demonstrirati da je kompozicija PCT simetrija u **svim** relativističkim kvantnim teorijama polja.

4.1 Spin – općenito

Tijekom studija sigurno ste u više navrata čuli da većina čestica koje smo eksperimentalno otkrili (od elementarnih čestica sve osim Higgsove čestice) posjeduju unutarnji stupanj slobode koji se naziva spin. Spin je unutarnji angularni moment, u smislu da je vektor ukupnog angularnog momenta čestice $\mathbf{J}$ zbroj orbitalnog $\mathbf{L}$ i spinskog $\mathbf{S}$ doprinosa,

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

Koristeći činjenicu da je spinski prostor stanja konačnodimenzijski, na kursu (nerelativističke) kvantne mehanike naučili ste da je za masivne čestice spin opisan brojem s tako da je

$$\mathbf{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) \quad , \quad s \in \mathbb{N}^0/2$$

te da mjerenje projekcija od $\mathbf{S}$ na bilo koju os za rezultat daje $\hbar\sigma$, gdje je $\sigma \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$. Također ste čuli da sve čestice cjelobrojnog spina ($s \in \mathbb{N}^0$) poštuju Bose-Einsteinovu statistiku (**bozoni**), dok sve čestice polucjelobrojnog spina ($s \in (2\mathbb{N}-1)/2$) poštuju Fermi-Diracovu statistiku (**fermioni**).

No, ostalo je puno neodgovorenih pitanja. Što je s bezmasenim česticama? Naime, bezmasene čestice koje vidamo u prirodi se mogu nalaziti samo u stanjima spina s s maksimalnom projekcijom $\sigma = \pm s$. Ili, zašto postoji veza između spina i statistike? Ili, još općenitije, zašto spin uopće postoji? Nerelativistička kvantna mehanika ne može odgovoriti niti na jedno od ovih pitanja. U nastavku ćemo pokazati da relativistička kvantna teorija polja **može**.

4.2 Simetrije u kvantnoj mehanici

4.2.1 Simetrije i njihove reprezentacije

Ovdje ćemo ukratko ponoviti neke važnije stvari vezane uz analizu simetrija u kvantnoj mehanici općenito.¹ Za početak, simetrija je transformacija na stanjima sustava koja ne mijenja ishode mjerenja, gdje transformacija također podrazumijeva i transformaciju na “mjernom uređaju”. Pošto su u kvantnoj mehanici stanja sustava opisana **zrakama** (eng. **rays**) u vektorskom prostoru stanja², a rezultati mjerenja kvadratom apsolutne vrijednosti skalarnog produkta zraka, slijedi da će transformacija $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle$ biti simetrija ako za svaki par vektora $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ vrijedi

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = |\langle\alpha'|\beta'\rangle|^2 \quad (4.2.1)$$

Postoji teorem u kvantnoj mehanici koji kaže da simetrije moraju biti reprezentirane **unitarnim** ili **antiunitarnim** operatorima. Kako je od simetrija koje će nas zanimati samo vremenska inverzija T reprezentirana antiunitarnim operatorom, fokusirat ćemo se na reprezentacije unitarnim operatorima:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{g} |\alpha'\rangle = U(g)|\alpha\rangle \quad (4.2.2)$$

gdje je $U(g)$ unitarni operator koji reprezentira transformaciju simetrije g . Općenito transformacije simetrije čine grupu, na način da je operacija množenja dana kompozicijom transformacija, $g_2 \circ g_1$. Iz (4.2.1) i (4.2.2) slijedi da reprezentacija simetrije na prostoru stanja u kvantnoj mehanici mora zadovoljavati

$$U(g_2)U(g_1) = e^{i\alpha(g_1, g_2)} U(g_2 \circ g_1) \quad , \quad \alpha(g_1, g_2) \in \mathbb{R}$$

Ovakve reprezentacije se zovu **projektivne reprezentacije** (za razliku od pravih reprezentacija u kojima je $\alpha = 0$).

Odabirom ortonormirane baze u vektorskom prostoru stanja svakom linearnom operatoru pridružujemo matricu, a za unitarne operatore matrica će biti unitarna. U linearnoj algebri postoji teorem koji kaže da svaku unitarnu matricu prikladnim odabirom ortonormirane baze možemo staviti u blok-dijagonalnu formu:³

$$U(g) = \begin{bmatrix} U_1(g) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & U_2(g) & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

gdje su $U_j(g)$ unitarne matrice. Ako se fokusiramo na neku specifičnu grupu simetrija, postojat će najmanji blokovi koje nazivamo ireducibilni blokovi. Ti ireducibilni blokovi daju **ireducibilne reprezentacije** (kraće, **IRREP**) grupe simetrija. Jednom kad znamo sve moguće IRREP neke grupe simetrija, svaku reprezentaciju možemo napisati kao direktnu sumu IRREP. Zaključak je da je za analizu reprezentacija grupe simetrija ključno poznavanje njenih IRREP i stoga je to u središtu svake analize simetrija. Ovo vrijedi kako za unitarne, tako i za neunitarne reprezentacije simetrija koje ćemo kasnije koristiti za reprezentacije simetrija na poljima.

4.2.2 Liejeve grupe i algebre

Posebno će nas zanimati kontinuirane grupe simetrija G čiji su svi elementi $g(\theta)$ povezani s jedinicom i mogu se parametrizirati skupom realnih brojeva $\theta \equiv \{\theta_a\}$, $a = 1, \dots, n$, na neprekidan način, tzv. **povezane Liejeve grupe**.⁴

¹Za sažeti ali detaljni opis, koji može poslužiti kao podsjetnik, preporučamo Weinbergov užbenik *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, odjeljci 2.1 i 2.2 te Appendix A. Naprednim i zainteresiranim studentima preporučam da pročitaju i sve ostale odjeljke iz poglavlja 2, jer se tamo nalazi lijep i detaljan, a opet dovoljno sažet i kratak, pregled Lorentzove grupe i njenih unitarnih reprezentacija.

²Ako je vektor stanja $|\alpha\rangle$ normiran na jedinicu, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, pripadna zraka se sastoji od svih vektora oblika $\exp(i\theta)|\alpha\rangle$, $\theta \in \mathbb{R}$.

³Vektorski prostor stanja u kvantnoj mehanici je beskonačnodimenzionalan, tzv. Hilbertov prostor, pa su linearnim operatorima pridružene beskonačnodimenzionalne matrice. Usprkos tome, dosta teorema koje ste dokazali na kursu iz linearne algebre za konačnodimenzionalne matrice vrijede i za beskonačnodimenzionalne.

⁴Matematičari bi rekli da je Liejeva grupa diferencijabilna mnogostrukost s grupnim zakonom množenja koji je “gladak”.

Broj parametara n se naziva dimenzija Liejeve grupe. Parametrizacija se prirodno prenosi na reprezentaciju pa možemo pisati $U(\theta) \equiv U(g(\theta))$. Grupni zakon množenja tada možemo reprezentirati skupom funkcija $\theta(\theta, \bar{\theta})$. Pokazuje se da je velika informacija o Liejevoj grupi sadržana u infinitezimalnoj okolini jediničnog elementa. Ako jediničnom elementu pridružimo $\theta_a = 0$, reprezentaciju u okolini infinitezimalnog elementa možemo, razvojem u Taylorov red, napisati na način

$$U(\theta) = 1 + i \sum_a \theta_a \mathcal{G}_a \quad , \quad |\theta_a| \ll 1$$

gdje se $\{\mathcal{G}_a\}$ nazivaju generatori pridruženi parametrizaciji $\{\theta_a\}$. Ukoliko su U unitarni operatori slijedi da su generatori $\mathcal{G}_a$ **hermitski** operatori. Očito će generatori pridruženi različitim parametrizacijama biti povezani linearnim transformacijama, pa možemo definirati vektorski prostor generatora. Iz zahtjeva zatvorenosti na grupno množenje lako se pokaže da je vektorski prostor generatora zatvoren na operaciju komutacije, tj.

$$[\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b] = i \sum_c f_{ab}^c \mathcal{G}_c$$

gdje su komponente od f_{ab}^c realne i ovise o izboru parametrizacije. Vektorski prostor generatora na kojem je definirana gornja bilinearna operacija naziva se **Liejeva algebra** grupe G i označava s $\mathfrak{g}$, a f_{ab}^c se nazivaju **strukturne konstante** Liejeve algebre.

Očito je dana Liejeva algebra u potpunosti određena svojom dimenzionalnošću i strukturnim konstantama (u jednoj proizvoljnoj parametrizaciji). Liejeva algebra u potpunosti određuje grupu, uključujući i zakon množenja, u infinitezimalnoj okolini jediničnog elementa. No, ne i globalno. Za danu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ postoji više pripadnih Liejevih grupa, no jedna i samo jedna **jednostruko povezana** Liejeva grupa $\bar{G}$ (u kojoj se svaka petlja može neprekidno stegnuti u točku) čije reprezentacije se mogu konstruirati eksponenciranjem na sljedeći način:

$$\bar{U}(\theta) = \exp \left(i \sum_a \theta_a \mathcal{G}_a \right) \quad (4.2.3)$$

gdje su sada θ_a proizvoljni (konačni) realni brojevi, a $\mathcal{G}_a$ reprezentacija neke baze Liejeve algebre. Grupa $\bar{G}$ se naziva **grupa pokrivanja** grupe G s kojom dijeli istu Liejevu algebru.⁵

Može se pokazati da se analiza projektivnih reprezentacija grupa koje će nas zanimati (npr. Poincaréove grupe) svodi na analizu reprezentacija grupe pokrivanja. To pak znači sljedeće:

Konstrukcija ireducibilnih projektivnih reprezentacija povezane Liejeve grupe G se svodi na konstrukciju ireducibilnih reprezentacija pripadne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Razlog je što jednom kad znamo reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ možemo pomoću (4.2.3) konstruirati reprezentacije od $\bar{G}$, čije reprezentacije su ujedno i projektivne reprezentacije originalne grupe simetrija G .

Napomenimo da je iz zahtjeva neprekidnosti jasno da povezane Liejeve grupe ne mogu biti reprezentirane antilinearim, pa stoga ni antiunitarnim operatorima.

4.2.3 Reprezentacije Poincaréove grupe

Struktura Poincaréove grupe

Kao što smo vidjeli, Poincaréova grupa je grupa izometrija prostora Minkowskog i njeni elementi (Λ, a) su transformacije određene s

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - a^\mu \quad , \quad \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

⁵U općenitom slučaju se ne može svaki element reprezentacije grupe pokrivanja dobiti pomoću (4.2.3), već je potrebno napraviti umnožak konačnog broja faktora oblika (4.2.3). No, ovo je finesa koja ne igra nikakvu bitnu ulogu za naše potrebe.

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ metrički tenzor prostora Minkowskog a a^μ proizvoljni konstantni 4-vektor. Vidimo da uzastopno djelovanje (kompozicija) dvije Poincaréove transformacije vodi na grupni zakon množenja dan s:

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1)$$

gdje koristimo skraćeni zapis za matrično množenje $(\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu \equiv \Lambda_2^\mu{}_\rho \Lambda_1^\rho{}_\nu$ i isto tako $(\Lambda a)^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$.

Poincaréova grupa se dobije komponiranjem podgrupe prostorno-vremenskih translacija, tj. elemenata s $\Lambda = 1$, i podgrupe u kojoj je $a^\mu = 0$, koja se naziva Lorentzova grupa i označava s $O(1, 3)$. Svaki element Lorentzove grupe se pak može dobiti komponiranjem sljedećih transformacija:

- Prostorne rotacije: Ovo je podgrupa koja se sastoji od rotacija u prostoru i koja je definirana s:

$$\Lambda^0{}_0 = 1 \quad , \quad \Lambda^0{}_j = \Lambda^j{}_0 = 0 \quad , \quad \Lambda^i{}_j = R(\boldsymbol{\theta})^i{}_j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

gdje su $R(\boldsymbol{\theta})$ standardne 3×3 matrice rotacije vektora u trodimenzionalnom prostoru koje se mogu parametrizirati vektorom $\boldsymbol{\theta} = \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$, gdje $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ određuje os, a θ kut rotacije. Ove matrice čine $SO(3)$ grupu.

- “Boostovi”: U pasivnom smislu, ovo su transformacije između dva sustava kojima se osi i ishodište prostora poklapaju u $t = t' = 0$, a koji se gibaju jednoliko po pravcu jedan u odnosu na drugi. Ove transformacije su parametrizirane vektorom brzine $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{u}}$, gdje se pokazuje praktičnijim koristiti vektor rapiditeta $\boldsymbol{\beta}$ umjesto brzine, gdje je iznos rapiditeta dan s $\beta = \text{Arth } u$. Za posebni slučaj $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ matrica boosta je dana s:

$$\Lambda(\beta \hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & \sinh \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{bmatrix}$$

- Paritet (P): Paritet je diskretna simetrija zrcaljenja u prostoru⁶ čije djelovanje je opisano Lorentzovom transformacijom $\Lambda^\mu{}_\nu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu$ danom s:

$$t' = t \quad , \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x} \quad \implies \quad \mathcal{P}^0{}_0 = 1 \quad , \quad \mathcal{P}^0{}_j = \mathcal{P}^j{}_0 = 0 \quad , \quad \mathcal{P}^i{}_j = -\delta_{ij}$$

Očito vrijedi $\mathcal{P}^2 = 1$.

- Vremenska inverzija (T): Vremenska inverzija je diskretna simetrija zrcaljenja u vremenu, tj. zamjena prošlost $\leftrightarrow$ budućnost i opisana je Lorentzovom transformacijom $\Lambda^\mu{}_\nu = \mathcal{T}^\mu{}_\nu$ danom s:

$$t' = -t \quad , \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \quad \implies \quad \mathcal{T}^0{}_0 = -1 \quad , \quad \mathcal{T}^0{}_j = \mathcal{T}^j{}_0 = 0 \quad , \quad \mathcal{T}^i{}_j = \delta_{ij}$$

Očito vrijedi $\mathcal{T}^2 = 1$, te također $\mathcal{PT} = -1$.

Posebno je zanimljiva podgrupa Lorentzovih transformacija generirana samo rotacijama i boostovima koja se naziva prava Lorentzova grupa i obično označava sa $SO(1, 3)^+$. Lorentzove matrice iz ove podgrupe su karakterizirane s:

$$\det(\Lambda) = 1 \quad , \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

Prava Lorentzova grupa povezana je s jedinicom i primjer je povezane Liejeve grupe dimenzije jednake 6 (tj. opisane s 6 parametara, za koje možemo uzeti komponente od $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\beta}$). Kad dodamo translacije u prostoru dobijamo podgrupu Poincaréove grupe koja se naziva prava Poincaréova grupa i koja je 10 dimenzionalna povezana Liejeva grupa (translacije dodaju još 4 parametra, za koje možemo prirodno uzeti komponente 4-vektora a^μ).

⁶Strogo uzevši, prilikom prostornog zrcaljenja samo jedna prostorna koordinata mijenja predznak (ona koja je okomita na ravninu zrcaljenja). No, u 3 prostorne dimenzije ako potom izvedemo rotaciju oko osi ravnine zrcaljenja za kut π (koja je simetrija) dobijamo transformaciju $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ koja je spretnija za uporabu pa se po standardnoj konvenciji ona naziva “zrcaljenje u prostoru”. No, treba imati u vidu da u prostoru s parnim brojem dimenzija ovaj trik ne funkcionira, jer je u tom slučaju transformacija $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ čista rotacija.

Svi eksperimenti do sada izvedeni su u slaganju s time da je prava Poincaréova grupa simetrija fundamentalnih zakona prirode (uz izuzetak gravitacijskog međudjelovanja u kojem ova tvrdnja ima nešto drukčije značenje).

Sve do 1950-tih smatralo se da su i preostale diskretne izometrije prostora Minkowskog (P i T) također simetrije prirodnih zakona. No, od tada je eksperimentalno pokazano da to nije točno – slaba međudjelovanja eksplicitno **na-rušavaju** P i T simetriju. Stoga ćemo se prvo fokusirati na reprezentacije prave Poincaréove grupe, a onda razmatrati posljedice uvođenja P i T simetrija.

Unitarne reprezentacije Poincaréove grupe. Čestice i spin.

Vidjeli smo da su kontinuirane simetrije koje ne uključuju vremensku inverziju opisane povezanim Liejevim grupama koje su reprezentirane projektivno na vektorskom prostoru stanja pomoću unitarnih operatora. Ovdje ćemo samo skicirati izvod i prezentirati rezultate konstrukcije ireducibilnih projektivnih unitarnih reprezentacija prave Poincaréove grupe.⁷ Kao što smo već napomenuli, jednom kad znamo sve ireducibilne unitarne reprezentacije svaka druga unitarna reprezentacija se može dobiti direktnim množenjem i direktnim zbrajanjem ireducibilnih. Unitarni operator koji reprezentira Poincaréovu transformaciju (Λ, a) označit ćemo s $U(\Lambda, a)$.

Konstrukcija započinje opažanjem da operator $P^2 = P_\mu P^\mu$ (gdje je P^μ generator translacija u prostor-vremenu, pa ujedno i 4-impuls), komutira sa svim elementima grupe $U(\Lambda, a)$ (ovo je samo matematički izričaj tvrdnje da su skalari, poput P^2 , invarijantni na Poincaréove transformacije). Operatori koji komutiraju sa cijelom grupom se nazivaju **Casimirovi operatori** i važni su jer su ireducibilni blokovi karakterizirani svojstvenom vrijednošću Casimirovog operatora. Drugim riječima, za svaku ireducibilnu reprezentaciju za sebe vrijedi $P^2 = m^2$, gdje je m^2 realni broj koji karakterizira (ali ne potpuno) ireducibilne reprezentacije. Razmotrimo sada konstrukciju ireducibilnih reprezentacija karakteriziranih danim m^2 . Pošto sve komponente impulsa međusobno komutiraju

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

(jer translacije očito komutiraju) i reprezentirane su hermitskim operatorima, možemo ih iskoristiti da definiramo bazu u prostoru stanja (na koji djeluje ireducibilna reprezentacija) pomoću njihovih zajedničkih svojstvenih vektora:

$$\{ |p, \sigma\rangle \} \quad , \quad P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle \quad (4.2.4)$$

Kvantni broj σ razlikuje vektore baze koji imaju iste svojstvene vrijednosti 4-impulsa $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$. Iz $p^\mu p_\mu = m^2$ očito slijedi da je p^0 određen s $\mathbf{p}^2$ do na predznak, tj.

$$p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Djelovanje translacija na ovu bazu je jednostavno dano promjenom faze

$$U(1, a) |p, \sigma\rangle = \exp(-iP^\mu a_\mu) |p, \sigma\rangle = \exp(-ip^\mu a_\mu) |p, \sigma\rangle$$

tako da je ključni korak pronalaženje ireducibilnih reprezentacija prave Lorentzove grupe $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$.

Drugi korak u proceduri je da se uoči da Lorentzova transformacija $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ prebacuje stanja s 4-impulsom p^μ u stanja s 4-impulsom $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$, tj.

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(\Lambda, p) |\Lambda p, \sigma'\rangle \quad (4.2.5)$$

Problem je sveden na konstrukciju matrica $D_{\sigma\sigma'}(\Lambda, p)$. Ovdje treba uočiti jedan spretan trik, da je dovoljno ograničiti se na podgrupu pravih Lorentzovih transformacija čiji elementi $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ne mijenjaju neki specificirani 4-impuls $p^\mu = \bar{p}^\mu$, tj. $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \bar{p}^\nu = \bar{p}^\mu$. Ova podgrupa se zove **mala grupa**. Tada relacija (4.2.5) postaje

$$U(\bar{\Lambda}) |\bar{p}, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(\bar{\Lambda}, \bar{p}) |\bar{p}, \sigma'\rangle \quad , \quad \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \bar{p}^\nu = \bar{p}^\mu$$

⁷Detaljni izvod se može naći npr. u udžbeniku S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, odjeljak 2.5.

Zadatak se svodi na konstruiranje unitarnih ireducibilnih reprezentacija male grupe. Svojstva male grupe ovise samo o predznaku od m^2 (da li je $m^2 > 0$, $m^2 < 0$ ili $m^2 = 0$).

Za demonstraciju procedure razmotrit ćemo samo slučaj $m^2 > 0$. Kao prvo uočite da prave Lorentzove transformacije u ovom slučaju ne mogu promijeniti predznak od p^0 , pa ireducibilne reprezentacije imaju fiksni predznak od p^0 . Odabrat ćemo $p^0 > 0$, no obratite pažnju da procedura ide na potpuno isti način za $p^0 < 0$. U ovom slučaju spretno je odabrati $\bar{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Sad treba biti jasno da je mala grupa u ovom slučaju naprosto grupa prostornih rotacija $SO(3)$. No, vi ste već na kursu iz kvantne mehanike konstruirali sve projektivne ireducibilne reprezentacije ove grupe – one su u potpunosti karakterizirane brojem $s \in \mathbb{N}^0/2$ ($s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$) koji ste zvali **spin**, a vektorski prostor stanja na koji djeluju je $(2s + 1)$ dimenzionalan. To znači da su ireducibilne reprezentacije male grupe reprezentirane na prostorima stanja razapetim vektorima ortogonalne baze

$$\{ |\bar{p}, \sigma\rangle \} \quad , \quad \sigma = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s \quad (4.2.6)$$

Fizikalno značenje σ je da su to svojstvene vrijednosti⁸ projekcije operatora angularnog momenta **J** (vektor čije komponente su generatori rotacija) u sustavu mirovanja čestice na neku proizvoljno odabranu os. Ukratko, **spin je vrsta angularnog momenta**. Ako odaberemo z -os, onda vrijedi

$$J^3 |\bar{p}, \sigma\rangle = \sigma |\bar{p}, \sigma\rangle$$

Vektore baze prostora stanja (4.2.4) možemo konstruirati iz (4.2.6) primjenom Lorentzovih transformacija:

$$|p, \sigma\rangle = U(\Lambda) |\bar{p}, \sigma\rangle \quad \text{gdje je} \quad p^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{p}^\nu$$

Može se pokazati da je ovakva definicija u skladu s normalizacijom danom s:

$$\langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle = (2\pi)^3 2|p^0| \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

U zaključku, dobili smo da su ireducibilne reprezentacije za slučaj $m^2 > 0$, $p^0 > 0$ u potpunosti karakterizirane s jednim (polu)cijelim brojem s i zovemo ih **spin- s reprezentacije**. Isto vrijedi i za slučaj $m^2 > 0$, $p^0 < 0$.

Procedura konstrukcije ireducibilnih reprezentacija pomoću malih grupa može se ponoviti za slučajeve $m^2 < 0$ i $m^2 = 0$. U slučaju $m^2 = 0$, $p^0 > 0$ spretno je odabrati $\bar{p}^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, gdje je $\omega > 0$, iz čega se može vidjeti da je mala grupa tzv. $ISO(2)^+$ koja je ekvivalentna grupi pravih izometrija Euklidske ravnine. U slučaju $m^2 < 0$ predznak od p^0 nije fiksiran i spretno je uzeti za $\bar{p}^\mu = (0, 0, 0, m)$, iz čega se vidi da je mala grupa $SO(1, 2)^+$, tj. ekvivalentna pravoj Lorentzovoj grupi u $(1 + 2)$ -dimenzionalnom prostor-vremenu. Vidimo da se pripadne male grupe razlikuju pa su stoga i svojstva reprezentacija različita. Nećemo se baviti konstrukcijom reprezentacija za ove slučajeve nego ćemo samo prezentirati potpunu klasifikaciju unitarnih ireducibilnih reprezentacija prave Poincaréove grupe. Ograničit ćemo se na IRREP s konačnodimenzionalnim reprezentacijama male grupe (tj. spinskih stupnjeva slobode).

- (a) $m^2 > 0$, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$: Unitarne IRREP karakterizirane (polu)cjelobrojnim spinom $s \in \mathbb{N}^0/2$, vektori baze prostora stanja su

$$\{ |\mathbf{p}, \sigma\rangle \} \quad , \quad \sigma = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$$

- (b) $m^2 > 0$, $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$: Isto kao (a), samo što je $p^0 < 0$.

- (c) $m^2 = 0$, $p^0 = |\mathbf{p}|$: Unitarne IRREP karakterizirane (polu)cjelobrojnim spinom $s \in \mathbb{N}^0/2$, s tim da za $s \neq 0$ postoje dvije različite IRREP za svaki s označene s $\sigma = \pm s$

$$\{ |\mathbf{p}, s\rangle \} \quad ; \quad \{ |\mathbf{p}, -s\rangle \}$$

Pošto se može pokazati da vrijedi

$$\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} |\mathbf{p}, \sigma\rangle = \sigma |\mathbf{p}, \sigma\rangle$$

gdje je **J** operator angularnog momenta, vidimo da je σ u ovom slučaju **helicitet** (projekcija angularnog momenta na smjer gibanja).

⁸U stvari svojstvene vrijednosti projekcija spina poprimaju vrijednosti $\hbar\sigma$, no mi koristimo sustav jedinica u kojem je $\hbar = 1$.

- (d) $m^2 = 0$, $p^0 = -|\mathbf{p}|$: Isto kao (c), samo što je $p^0 < 0$.
- (e) $m^2 < 0$: Samo trivijalna IRREP u kojoj je prostor stanja razapet bazom $\{|\mathbf{p}\rangle\}$.
- (f) $p^\mu = 0$: Samo trivijalna IRREP reprezentirana na $|0\rangle$, tako da vrijedi $U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle$.

Osim (f), vidimo da sve ostale unitarne IRREP imaju prilično jasnu interpretaciju – opisuju **slobodne relativističke elementarne čestice**, tj. sustave koji su u potpunosti karakterizirani kvadratom mase m^2 i spinom s , a čiji prostor stanja je razapet vektorima baze opisanima vrijednostima impulsa $\mathbf{p}$ i energije $E = p^0$, koji zadovoljavaju Einsteinovu kinematičku relaciju:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

i spinskim kvantnim brojem koji opisuje “unutrašnje” stanje čestice. Detaljnije:

- (a) Slobodna relativistička čestica mase $m = \sqrt{m^2}$ i spina s .
- (b) Isto kao (a) samo što ovakva čestica može nositi energiju u rasponu $-\infty < p^0 < m$ pa **ne očekujemo postojanje ovakvih čestica u prirodi** jer smatramo da bi uzrokovale nestabilnost vakuma.
- (c) Slobodna relativistička čestica mase $m = 0$ i spina s , koja se može pojavljivati u dva helicitetna stanja $\sigma = \pm s$.
- (d) Isto kao pod (c) samo što ovakva čestica može nositi energiju u rasponu $-\infty < p^0 < 0$ pa **ne očekujemo postojanje ovakvih čestica u prirodi** jer smatramo da bi uzrokovale nestabilnost vakuma.
- (e) Relativističke tahionske čestice mase $m = \sqrt{-m^2}$. Pošto im energija može poprimiti sve vrijednosti u rasponu $-\infty < p^0 < \infty$ također vode na narušenje stabilnosti vakuuma. Osim toga, ovakve čestice se uvijek gibaju brzinom većom od brzine svjetlosti pa vode i na problem narušenja kauzalnosti i stoga **ne očekujemo postojanje ovakvih čestica u prirodi**.
- (f) Vakuum, odnosno stanje najniže energije.

Za reprezentacije pod (b), (d) i (e) ne očekujemo da imaju fundamentalnu fizikalnu važnost jer vode na problem **nestabilnosti vakuuma**. Naime, teorija koja bi ih sadržavala ne bi imala stanje najniže energije (vakuum) i očekujemo da bi postojanje međudjelovanja u kvantnoj teoriji dovelo do stalnog stvaranja ovakvih pobuđenja “iz ničeg” (mehanizmom analognim spontanoj emisiji fotona u pobuđenom atomu). Ovakve pojave ne vidimo u prirodi i dobro je da ih ne vidimo jer bi vrlo vjerojatno onemogućile nastanak života. Pored toga, IRREP (e) opisuje **tahionsko** pobuđenje čije postojanje bi **narušavalo kauzalnost** u smislu da bi omogućilo prijenos informacije brzinama bržim od svjetlosti u vakuumu, odnosno ujedno i slanje informacije u prošlost. To ne znači da su ovakva stanja potpuno irelevantna jer mogu igrati ulogu nekim analizama, npr. pojavljuju se ako razvijamo teoriju polja oko nestabilnih ekstremalnih točaka potencijalne energije (signaliziraju da radimo razvoj oko “krivog vakuuma”).

U zaključku:

Očekujemo da će u fizikalno prihvatljivim relativističkim teorijama igrati ulogu samo ireducibilne reprezentacije tipa (a), (c) i (f), gdje (a) i (c) opisuju upravo čestice kakve i vidimo u prirodi i čiji prostor stanja je u potpunosti karakteriziran masom i (polu)cjelobrojnim spinom, a (f) je stanje koje opisuje vakuum (stanje najniže energije).

Važnije napomene:

- Vidimo da kombinacija kvantne mehanike i teorije relativnosti daje objašnjenje zašto su sve elementarne čestice koje vidimo u prirodi tipa (a) ili (c) (ako se ograničimo na reprezentacije koje imaju konačnodimenzijski spinski prostor stanja). Obratite pažnju da doslovno ništa drugo nije korišteno u konstrukciji, osim nekih temeljnih fizikalnih postulata kao što su stabilnost vakuuma i kauzalnost.

- Simetrija na pravu Poincaréovu grupu dopušta za bezmasene čestice da mogu postojati samo u jednom (od dva moguća) helicitetna stanja.
- Pokazuje se važnim razmotriti djelovanje diskretnih simetrija pariteta (P) i vremenske inverzije (T) na IRREP (a) i (c). Može se pokazati da ove simetrije djeluju na sljedeći način:

$$m > 0 : \quad P |\mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta |-\mathbf{p}, \sigma\rangle \quad , \quad |\eta| = 1 \quad (4.2.7)$$

$$T |\mathbf{p}, \sigma\rangle = \zeta (-1)^{s-\sigma} |-\mathbf{p}, -\sigma\rangle \quad , \quad |\zeta| = 1 \quad (4.2.8)$$

$$m = 0 : \quad P |\mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma} |-\mathbf{p}, -\sigma\rangle \quad , \quad |\eta_\sigma| = 1 \quad (4.2.9)$$

$$T |\mathbf{p}, \sigma\rangle = \zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma} |-\mathbf{p}, \sigma\rangle \quad , \quad |\zeta_\sigma| = 1 \quad (4.2.10)$$

gdje za masivne čestice σ označava projekciju spina na fiksnu os, dok za bezmasene čestice označava helicitet. Vidimo da postojanje simetrija na **paritet** automatski traži da se bezmasene čestice **moraju** pojavljivati u **oba helicitetna stanja**, jer je to nužno za postojanje reprezentacije ove simetrije.

- Sve fizikalno prihvatljive unitarne reprezentacije u teorijama koje poštuju principe kvantne mehanike i specijalne relativnosti su izgrađene od IRREP (a), (c) i (f) upotrebom direktnog produkta i direkne sume. Direktni produkt dvije IRREP tipa (a) i/ili (c) izgleda kao prostor stanja dvije slobodne relativističke čestice. Direktna suma dva bloka od kojih jedan opisuje n čestica, a drugi m čestica daje prostor stanja u kojem je moguće da imamo n čestica ili m čestica ili linearnu kombinaciju (superpoziciju) stanja s n i m čestica. Vidimo da u svim ovakvim teorijama prostori stanja nužno imaju strukturu prostora stanja slobodnih čestica. To je razlog zašto smo u analizi procesa uzeli zdravo za gotovo da asimptotski prostori stanja (ulazni i izlazni) uvijek izgledaju kao da se sastoje od slobodnih čestica. Vidimo da je to univerzalno svojstvo koje dolazi kombiniranjem kvantne mehanike i relativnosti. Kvantne teorije polja samo na to nadodaju svojstvo da fizikalni prostor stanja mora izgledati kao Fockov prostor, tj. da sadrži kombinacije svih mogućih brojeva elementarnih čestica koje postoje u teoriji.
- U slučajevima (c), (d) i (e) (u kojima je $m^2 \leq 0$) postoje dodatne reprezentacije parametrizirane s dodatna dva kontinuirana realna parametra a i b , tj. prostor stanja je razapet s $\{|\mathbf{p}, \sigma, a, b\rangle\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ove reprezentacije imaju neprebrojivo beskonačnodimenzionalan interni ("spinski") prostor stanja i vrlo vjerojatno su nefizikalne, između ostalog jer nije sasvim jasno kako napisati pripadne kvantne teorije polja. U slučaju (f) također postoje dodatne IRREP s neprebrojivo beskonačnim "spinskim" prostorom stanja i one igraju ulogu u teorijama u kojima je Lorentzova simetrija **spontano slomljena**. Kako zasad nema interesantnih primjena ovakvih teorija, ove reprezentacije ćemo također ignorirati.
- Pokazuje se da rotacija za 2π (rotacija za "puni krug") oko proizvoljne osi u prostoru djeluje na stanje spina s na način

$$U(R(2\pi))|s\rangle = (-1)^s |s\rangle$$

Možemo se zapitati da li rotacija za 2π uistinu ne mijenja fizikalna stanja. Uočite da ukoliko bi mogli proizvesti (ili negdje pronaći) fizikalno stanje nekog sustava koje je linearna superpozicija jednog stanja polucjelobrojnog spina $|F\rangle$ i jednog cjelobrojnog spina $|B\rangle$,

$$|\alpha\rangle = a|B\rangle + b|F\rangle, \quad , \quad a, b \in \mathbb{C}$$

onda bi rotacija oko neke proizvoljne osi za 2π dala stanje

$$|\beta\rangle = U(R(2\pi))|\alpha\rangle = a|B\rangle - b|F\rangle$$

koje nije fizikalno ekvivalentno stanju prije rotacije. No, eksperimentalna je činjenica da takva stanja nisu uočena. Matematičkim žargonom rečeno, postoji superseleksijsko pravilo s obzirom na $(-1)^s$. Iz tog razloga kažemo da su prave Lorentzove simetrije opisane grupom $SO(1, 3)^+$, a ne grupom pokrivanja od $SO(1, 3)^+$, tj. $SL(2, \mathbb{C})$ (veća grupa koja posjeduje jednaku Liejevu algebru).

Reprezentacije Poincaréove grupe na poljima

Vidjeli smo da je za konstrukciju lagranžijana u relativističkim teorijama važno raditi s poljima koja se lijepo transformiraju na Lorentzovu grupu, što znači da je na njima reprezentirana Lorenzova grupa. Pošto se operatori generalno transformiraju na simetriju reprezentiranu s unitarnim operatorom U u skladu s $U^\dagger O U$, teško je zamisliti neki zakon transformacije za kontinuirane simetrije koji nije linearan, pa pretpostavljamo da se “elementarna” lokalna polja $\phi_r(x)$ na Poincaréovu transformaciju (Λ, a) transformiraju **linearno**, tj.

$$\phi_r(x) \longrightarrow \phi_r(x') = \sum_{r'} \mathcal{D}_{rr'}(\Lambda) \phi_{r'}(x) \quad , \quad x' = \Lambda x - a \quad (4.2.11)$$

Matrice $\mathcal{D}_{rr'}(\Lambda)$ moraju činiti projekativnu reprezentaciju prave Lorentzove grupe, odnosno pravu reprezentaciju grupe pokrivanja, na matrično množenje

$$\sum_{r''} \mathcal{D}_{rr''}(\Lambda_1) \mathcal{D}_{r''r'}(\Lambda_2) = \mathcal{D}_{rr'}(\Lambda_1 \Lambda_2) \quad (4.2.12)$$

Dopuštamo projekтивne reprezentacije jer ne postoji razlog zašto bi inzistirali da su sva polja sama po sebi mjerljiva. Pošto pretpostavljamo da postoji konačan broj elementarnih polja, vidimo da nas sada zanimaju konačnodimenzionalne reprezentacije prave Lorentzove grupe (za koje, po analizi iz prethodnog odjeljka, znamo da ne mogu biti unitarne no to u ovom slučaju i nije bitno).

Detaljnu analizu konačnodimenzionalnih reprezentacija Lorentzove grupe ćemo odgoditi za odjeljak 4.10.3. Ovdje ćemo samo napomenuti da mi već znamo određeni broj tih reprezentacija:

- $\mathcal{D}(\Lambda) = 1$ (trivijalna IRREP): **skalarno polje** $\varphi(x)$. Njega smo već detaljno analizirali i vidjeli da kvantizacija slobodnog polja vodi na Fockov prostor spin-0 čestice.
- $\mathcal{D}(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ (“fundamentalna” 4-vektorska reprezentacija): **vektorsko polje** $A^\mu(x)$. Očekujemo da kvantizacija vodi na spin-1 čestice.
- $\mathcal{D}(\Lambda)^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_k} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_k}{}_{\nu_k}$ (4-tenzorska reprezentacija): **tenzorsko polje ranga k** , $\phi^{\mu_1 \dots \mu_k}(x)$. Očekujemo da kvantizacija vodi na spin- k čestice.

Pažljivi čitatelj će primjetiti da postoji neslaganje između broja spinskih stanja čestice spina- s (koji je $(2s + 1)$) i broja nezavisnih komponenti tenzora ranga s (koji je s^2), za $s \geq 1$. Razlog leži u tome da opće tenzorsko polje ranga s sadrži u sebi sve cjelobrojne spinove u intervalu $0, \dots, s$, i to možebitno višestruko.

Na primjeru vektorskog polja pojasnit ćemo ovu pojavu. Razmotrite prvo neko slobodno skalarno (spin-0) polje $\varphi(x)$ koje kvantizacijom vodi na spin-0 čestice. Ukoliko napravimo gradijent ovog polja $\partial_\mu \varphi(x)$ ovo polje i dalje opisuje samo spin-0 čestice (sjetite se da je $\varphi(x)$, pa stoga i $\partial_\mu \varphi(x)$, izgrađen od operatora stvaranja i poništenja spin-0 čestica). No, s obzirom na Lorentzove transformacije $\partial_\mu \varphi(x)$ je **vektorsko polje**. Vidimo da postoje vektorska polja koja nose spin-0, što znači da iz općeg vektorskog polja $A^\mu(x)$ moramo isprojicirati van (nametanjem posebnih uvjeta) spin-0 doprinos. Za masivna polja to odmah rješava problem jer je $4 - 1 = 3$ što je ispravan broj nezavisnih spinskih stanja spin-1 čestice. Za besmasena polja stvar je malo kompliciranija. Oba ova slučaja ćemo uskoro detaljno razmotriti.

Još jedna stvar koja nedostaje u gornjem popisu su polja polucjelobrojnog spina. Njihovu konstrukciju ćemo ostaviti za kasnije (odjeljak 4.10) i sada se privremeno posvetiti poljima cjelobrojnog spina.

4.3 Spin-0

Već smo pokazali da kvantizacija slobodnog skalarnog polja $\varphi_0(x)$ koje zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu

$$(\square + m^2)\varphi_0 = 0 \quad , \quad m^2 > 0 \quad (4.3.1)$$

vodi na prostor stanja u obliku Fockovog prostora razapetog česticama mase $m \geq 0$ (jedne ili dvije vrste, ovisno o tome da li polje realno ili kompleksno) koje su karakterizirane samo impulsom $\mathbf{p}$ dok im je energija dana s relativističkom relacijom

$$E_{\mathbf{p}} = p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (4.3.2)$$

Zaključujemo da se radi o spin-0 čestici (i antičestici za kompleksno polje), pa je **skalarno polje u stvari spin-0 polje**.

4.4 Masivno spin-1 polje

4.4.1 Proca teorija

Kao što smo vidjeli, očekujemo da će čestica spina-1 biti opisana 4-vektorskim poljem $A^\mu(x)$. Najjednostavniji Poincaré invarijantni lagranžijan za realno 4-vektorsko polje je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (4.4.1)$$

gdje pretpostavljamo da je $m \neq 0$. Euler-Lagrangeove jednačbe daju jednačbe gibanja

$$(\square + m^2)A^\mu = 0 \quad (4.4.2)$$

Vidimo da svaka komponenta zadovoljava Klein-Gordonovu jednačbu.

Sad ćemo pokazati da je ova teorija nekonzistentna. Kao prvo, uočite da Lagranžijan (4.4.1) raspisan po komponentama daje

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^0)(\partial^\mu A^0) + \frac{m^2}{2}(A^0)^2 + \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu A^j)(\partial^\mu A^j) - \frac{m^2}{2}(A^j)^2 \right]$$

Lagranžijan izgleda kao da postoje 4 nezavisna slobodna spin-0 polja, s tim da doprinos polje A^0 ima "krivi predznak". Iz ovog oblika Lagranžijana očito je da je gustoća energije dana s:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[(\dot{A}^0)^2 + (\nabla A^0)^2 + \frac{m^2}{2}(A^0)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[(\dot{A}^j)^2 + (\nabla A^j)^2 + \frac{m^2}{2}(A^j)^2 \right]$$

Vidimo da A^0 doprinosi energiji **negativno** što vodi na **problem stabilnosti vakuuma** (nepostajanje vakuuma kao stanja najniže energije). Taj doprinos moramo nekako eliminirati, ali na Lorentz kovarijantan način što znači da ne možemo samo staviti $A^0 = 0$.

Rješenje ovog problema leži u konstataciji da (4.4.1) nije najopćenitiji lagranžijan "slobodnog" tipa (tj. bilinearan u poljima), jer postoji još jedna kvadratična Lorentz invarijanta: $(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$. Najopćenitiji relativistički slobodni lagranžijan je stoga

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{b}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (4.4.3)$$

gdje je b neki zasad neodređeni realni parametar. Euler-Lagrangeove jednačbe sada daju:

$$\square A^\mu - b \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 A^\mu = 0$$

Ako djelujemo s ∂_μ na gornji izraz dobijemo

$$[(1-b)\square + m^2] \partial_\mu A^\mu = 0$$

Vidimo da za poseban slučaj kad je $b = 1$ jednačba gibanja nameće uvjet

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.4.4)$$

što nije dinamička jednačba (jer nema druge derivacije u vremenu) nego **jednačba veze** (eng. **constraint**). Uočite da u ovom slučaju polje zadovoljava jednačbu (4.4.2).

Kako smo u prijašnjem odjeljku zaključili da opće polje A^μ sadrži previše nezavisnih komponenti za opis spin-1 čestice (i to baš jednu komponentu previše) odabrat ćemo uvjet $b = 1$ i vidjeti kamo će nas to odvesti. Lagranžijan (4.4.3) tada postaje

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

gdje je $F_{\mu\nu}$ antisimetrični tenzor ranga 2 definiran s:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Lagranžijan (4.4.5) se obično naziva **Proca lagranžijan**. Euler-Lagrangeove jednačbe daju

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (\square + m^2)A^\mu = 0 \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Pošto je veza (4.4.4) Poincaré invarijantna, kao i razdvajanje spina u $0 \oplus 1$, možemo biti sigurni da smo na ovaj način eliminirali točno spin-0 komponentu pa preživjeli stupnjevi slobode opisuju samo spin-1. Sad ćemo pokazati da ova teorija ujedno nema problema sa stabilnošću vakuuma (za razliku od teorija s $b \neq 1$).

Gustoća energije za Proca teoriju je:

$$\begin{aligned}T^{00} &= -F_{0\mu}\dot{A}^\mu + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{m^2}{2}[(A_0)^2 + \mathbf{A}^2] + \underbrace{A_0\partial_0(\partial_\mu A^\mu)}_{=0} - \underbrace{A_0(\square + m^2)A_0}_{=0} - \underbrace{\partial_j(A_0 F_0^j)}_{\text{totalna derivacija}}\end{aligned}$$

U prelasku iz prve u drugu jednakost koristili smo relacije

$$-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \quad \text{gdje su} \quad E_j \equiv F_{0j}, \quad \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

gdje se, po analogiji s elektrodinamikom, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ i $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ nazivaju **električno** i **magnetsko** polje.⁹ Nakon što upotrijebimo jednačbe gibanja (4.4.6) te odbacimo irelevantni član koji je totalna derivacija dobijamo da je gustoća energije u Proca teoriji dana s

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{m^2}{2}[(A_0)^2 + \mathbf{A}^2] \quad (4.4.7)$$

Vidimo da je u klasičnoj teoriji gustoća energije pozitivno definitna pa to vrijedi i za ukupnu energiju. Stanje najniže energije (klasični vakuum) je dan s $A^\mu(x) = 0$ i ima gustoću energije koja svugdje iščezava.

Ukupna energija sustava je:

$$E = \int d^3\mathbf{x} T^{00} = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{m^2}{2}[(A_0)^2 + \mathbf{A}^2] \right\}$$

Očito je u klasičnoj teoriji $E \geq 0$ gdje je $E = 0$ samo za vakuumsku konfiguraciju $A^\mu(x) = 0$.

U prirodi postoje masivne spin-1 čestice, kako elementarne (W i Z bozoni) tako i kompozitne (ρ mezon, ...), stoga je Proca teorija važna za razmatranje.

⁹Uočite da $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ sama za sebe nisu Lorentz-kovarijantna polja, pa im shodno tome nema smisla dizati i spuštati indekse.

4.4.2 Kvantizacija Proca teorije

Kao i za slobodno skalarno polje, spretno je koristiti Fourierov transformat:

$$A_\mu(x) = \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* e^{ip \cdot x} \right) \quad (4.4.8)$$

gdje su $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})$ **polarizacijski** bazni vektori.

Upotrijebimo sad jednadžbe gibanja (4.4.6). Jednadžbe (4.4.2) i (4.4.4) daju uvjete:

$$p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad , \quad p^\mu \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p}) = 0$$

Ova jednadžba je ujedno uvjet koji smanjuje broj nezavisnih polarizacijskih stanja na 3. Uzet ćemo da su vektori $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})$ jedinični i za dani $\mathbf{p}$ međusobno okomiti, tj. da vrijedi

$$\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* \varepsilon^{(\sigma')\mu}(\mathbf{p}) = -\delta_{\sigma\sigma'}$$

Na primjer, za $p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, 0, 0, p_z)$ mogući izbor za polarizacijsku bazu je:

$$\varepsilon_\mu^{(1)}(\mathbf{p}) = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad \varepsilon_\mu^{(2)}(\mathbf{p}) = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad \varepsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{m}(p_z, 0, 0, \omega_{\mathbf{p}}) \quad (4.4.9)$$

gdje za $\sigma = 1, 2$ imamo transverzalnu polarizaciju, a za $\sigma = 3$ longitudinalnu polarizaciju. Polarizacijske bazne vektore za druge smjerove impulsa možemo dobiti rotacijom gornje baze.

U praktičnim primjenama često je potrebna suma po polarizacijama tenzorskog produkta polarizacijskih vektora, koja u ovom slučaju glasi

$$\sum_{\sigma=1}^3 \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* \varepsilon_\nu^{(\sigma)}(\mathbf{p}) = -\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \quad (4.4.10)$$

Sve relacije koje smo zasad napisali su klasične. Kvantiziranje Proca teorije primjenom kanonskih komutacijskih relacija, kao i u slučaju skalarnog polja, vodi na to da operatori $a_{\mathbf{p}\sigma}$ i $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ zadovoljavaju komutacijske relacije operatora poništenja i stvaranja:

$$[a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{q}\sigma'}] = 0 \quad (4.4.11)$$

Preskočit ćemo dokaz i zadovoljiti se time da pokažemo da (4.4.11) vodi na konzistentnu relativističku teoriju polja.

Uvrštavanjem (4.4.8) u izraz za energiju dobijamo za operator hamiltonijana:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + a_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \right) \\ &= \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + 3 E_0 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

gdje je E_0 dan u (3.2.14). Za operator impulsa bi na sličan način dobili:

$$\mathbf{P} = \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} \quad (4.4.13)$$

Relacije (4.4.11)–(4.4.13) imaju isti oblik kao u slučaju kvantizacije skalarnog polja, jedina razlika je da sad postoji spinski stupanj slobode. Stoga se konstrukcija prostora stanja i interpretacija mogu napraviti na isti način.

Za početak, definiramo vakuum $|0\rangle$ kao stanje koje poništavaju svi operatori poništenja $a_{\mathbf{p}\sigma}$:

$$a_{\mathbf{p}\sigma}|0\rangle = 0$$

Potom izgrađujemo bazu Fockovog prostora stanja tako da djelujemo konačan, ali neograničen, broj puta s operatorima stvaranja $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$:

$$|\mathbf{p}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{p}_n\sigma_n\rangle = \sqrt{2\omega_1} \cdots \sqrt{2\omega_n} a_{\mathbf{p}_1\sigma_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n\sigma_n}^\dagger |0\rangle \quad , \quad \omega_j = \omega_{\mathbf{p}_j}$$

gdje ponavljamo proceduru za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz izraza (4.4.12) i (4.4.13) slijedi da su ovako kreirana stanja svojstvena stanja energije i impulsa sa svojstvenim vrijednostima:

$$E(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \omega_j \quad , \quad \mathbf{P}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j$$

Iz ovoga zaključujemo da svaki kvant predstavlja slobodnu relativističku česticu mase m i impulsa $\mathbf{p}_j$ koja se može nalaziti u 3 različita stanja koja moraju predstavljati spin, što znači da polje opisuje spin-1 česticu jer je $2 \times 1 + 1 = 3$ (može se napraviti detaljna analiza operatora angularnog momenta koja to eksplicitno pokazuje, no nećemo gubiti vrijeme na to).

Uslijed toga što operatori stvaranja međusobno komutiraju, možemo zaključiti da čestice zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, tj. da su bozoni.

Zadatak 4.4.1: Dokažite (4.4.10).

Naputak: Jedan način na koji možete riješiti ovaj zadatak je krenuti od jednostavnog posebnog izbora za impuls, npr. $\mathbf{p} = 0$ i izrazi rezultat tenzorski pomoću $\eta_{\mu\nu}$ i p^μ . Tenzorska jednačba koja vrijedi u jednom sustavu vrijedit će i u svakom Lorentz transformiranom sustavu (a svaki impuls $\mathbf{p}$ možemo dobiti Lorentzovom transformacijom iz $\mathbf{p} = 0$).

4.4.3 Kompleksno Proca polje

Ukratko ćemo razmotriti kompleksno Proca polje. U ovom slučaju lagranžijan je dan s:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^\dagger A^\mu$$

koji vodi na iste jednačbe gibanja kao u (4.4.6). Energija je dana s:

$$E = \int d^3\mathbf{x} T^{00} = \int d^3\mathbf{x} \left[(\mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{B}) + m^2 (A_0^\dagger A_0 + \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}) \right]$$

Kompleksna Proca teorija posjeduje kontinuiranu $U(1)$ simetriju:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = e^{iq\alpha} A_\mu(x) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

koja vodi na Noetherin sačuvani naboj:

$$Q = iq \int d^3\mathbf{x} \left(F^{\mu 0\dagger} A_\mu - A_\mu^\dagger F^{\mu 0} \right) \quad (4.4.14)$$

Fourierov transformat je sada dan s:

$$A_\mu(x) = \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* e^{ip \cdot x} \right)$$

Kanonska kvantizacija daje da $b_{\mathbf{p}\sigma}$ i $b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ predstavljaju dodatni nezavisni set operatora stvaranja i poništenja pa pored (4.4.11) imamo još:

$$[b_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [b_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{q}\sigma'}] = 0 \quad , \quad [a_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{q}\sigma'}] = 0 \quad , \quad [a_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = 0$$

Operatori $b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ stvaraju kvante koji imaju ista svojstva u odnosu na masu, energiju, impuls, spin i ostale kinematičke veličine kao i oni stvoreni s $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$, no razlikuju se po doprinosu $U(1)$ naboju. Naime, lako se pokaže da se operator naboja može napisati kao:

$$Q = q \sum_{\sigma=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} - b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}) \quad (4.4.15)$$

Iz ovog izraza se vidi da svaka čestica tipa a nosi naboj q , dok svaka čestica tipa b nosi naboj $-q$, što znači da su čestice tipa b antičestice od čestica tipa a (i obratno).

4.5 Masivna slobodna bozonska polja. Generalizacija i rekapitulacija*

Generalizacija na masivno polje proizvoljnog cjelobrojnog spina $s \in \mathbb{N}$ je prilično direktna i ovdje ćemo je ukratko razmotriti. Ujedno ćemo iskoristiti ovo poglavlje da napravimo sažetak važnih univerzalnih relacija koje vrijede za svaki cjelobrojni spin.

Kao što smo već spomenuli, očekujemo da će relativističko spin- s polje biti opisano Lorentz-tenzorom ranga s , $A_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Može se pokazati da je **slobodno relativističko polje cjelobrojnog spina** s opisano sustavom jednažbi:

$$(\square + m^2) A^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0 \quad , \quad \partial_\mu A^{\mu \mu_2 \dots \mu_s} = 0 \quad (4.5.1)$$

$$A^{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_k \dots \mu_s} = A^{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_j \dots \mu_s} \quad , \quad \eta_{\mu_j \mu_k} A^{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_k \dots \mu_s} = 0 \quad (4.5.2)$$

Za spin-0 polje relevantna je samo lijeva jednažba u (4.5.1) (Klein-Gordonova jednažba), dok su u slučaju $s = 1$ relevantne samo dvije jednažbe u (4.5.1) (koje daju Proca teoriju). Za $s \geq 2$ jednažbe u (4.5.2) izražene riječima kažu da se radi o **potpuno simetričnom polju traga nula**. Uočite da je samo lijeva jednažba u (4.5.1) dinamička jednažba gibanja. Preostale tri jednažbe su jednažbe veze čija uloga je da isprojiciraju samo spin s multiplet. Napomenimo samo da je za svaki $s \in \mathbb{N}$ moguće napisati lagranžijan čije Euler-Lagrangeove jednažbe vode na (4.5.1)-(4.5.2).

Da bi se uvjerali da sustav jednažbi (4.5.1)-(4.5.2) uistinu opisuje spin s polje treba uočiti sljedeće:

- (i) Iščezavanje 4-gradijenta i kontrakcije parova indeksa su Lorentz-kovarijantna svojstva, kao i svojstva simetričnosti na zamjenu indeksa. To znači da ireducibilni spinski multiplieti ne mogu "miješati" ova svojstva već su realizirani unutar njih.
- (ii) Jednostavni kombinatorički račun pokazuje da tri jednažbe veze čine da polje koje ih zadovoljava posjeduje s nezavisnih polarizacijskih stupnjeva slobode, što se i očekuje od spin- s polja.

U slučaju kompleksnog polja jednažbe gibanja posjeduju $U(1)$ **internu simetriju**:

$$A^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) \longrightarrow e^{iq\chi} A^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) \quad , \quad \chi \in \mathbb{R}$$

koja vodi na **sačuvanu** 4-struju i pripadni naboj. Veličina q je naboj polja koji je neodređen u slobodnoj teoriji.

Iz (4.5.1) i činjenice da postoji samo s nezavisnih polarizacijskih stupnjeva slobode slijedi da rješenja jednažbi možemo napisati u obliku:

$$A_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \sum_{\sigma=1}^s \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* e^{ip \cdot x} \right)$$

$$p^0 = \omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad , \quad p^\mu \varepsilon_{\mu \mu_2 \dots \mu_s}^{(\sigma)}(\mathbf{p}) = 0 \quad , \quad \varepsilon_{\mu \mu_3 \dots \mu_s}^{(\sigma)\mu}(\mathbf{p}) = 0$$

gdje potpuno simetrični polarizacijski tenzori $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(\sigma)}(\mathbf{p})$ čine bazu u polarizacijskom prostoru stanja s valnim vektorom $\mathbf{p}$. U slučaju realnog polja vrijedi $b_{\mathbf{p}\sigma} = a_{\mathbf{p}\sigma}$.

Kvantizacija se postiže promoviranjem koeficijenata $a_{\mathbf{p}\sigma}$ i $b_{\mathbf{p}\sigma}$ u operatore koji zadovoljavaju komutacijske relacije (dva nezavisna seta za kompleksno polje) operatora stvaranja i poništenja:

$$[a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [b_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

dok su svi ostali komutatori između operatora $a_{\mathbf{p}\sigma}$, $a_{\mathbf{p}\sigma'}^\dagger$, $b_{\mathbf{p}\sigma}$ i $b_{\mathbf{p}\sigma'}^\dagger$ jednaki nula. Operatori energije, impulsa i sačuvanog naboja (u slučaju kompleksnog polja) su:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\sigma=1}^s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}) \\ \mathbf{P} &= \sum_{\sigma=1}^s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}) \\ Q &= q \sum_{\sigma=1}^s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} - b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

gdje smo odbacili konstante iz H i Q koje, ako zanemarimo gravitaciju, ne igraju nikakvu ulogu. U slučaju realnog polja članovi s operatorima $b_{\mathbf{p}\sigma}$ ne postoje, kao ni naboj Q .

Fizikalni prostor stanja se konstruira sada već standardnom procedurom tako da se krene od vakuumske stanja koje poništavaju svi operatori poništenja:

$$|0\rangle : \quad a_{\mathbf{p}\sigma}|0\rangle = 0 \quad , \quad b_{\mathbf{p}\sigma}|0\rangle = 0 \quad (\text{vakuum}) \quad (4.5.4)$$

a čija energija i impuls očito iščezavaju. Preostali elementi baze prostora stanja se konstruiraju djelovanjem s konačnim ali neograničenim brojem operatora stvaranja $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ i $b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$

$$|\mathbf{p}_1\sigma_1, \dots, \mathbf{p}_n\sigma_n; \bar{\mathbf{p}}_1\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\mathbf{p}}_k\bar{\sigma}_k\rangle = \sqrt{2\omega_1} \dots \sqrt{2\omega_n} \sqrt{2\bar{\omega}_1} \dots \sqrt{2\bar{\omega}_k} a_{\mathbf{p}_1\sigma_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n\sigma_n}^\dagger b_{\mathbf{p}_1\bar{\sigma}_1}^\dagger \dots b_{\mathbf{p}_k\bar{\sigma}_k}^\dagger |0\rangle$$

i svojstveni su vektori operatora energije, impulsa i naboja sa svojstvenim vrijednostima danim s

$$E(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \omega_j + \sum_{j=1}^k \bar{\omega}_j \quad , \quad \mathbf{P}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j + \sum_{j=1}^k \bar{\mathbf{p}}_j \quad , \quad Q = (n - k)q$$

Očito je da svaki pojedini kvant koji stvore operatori stvaranja nezavisno nosi energiju, impuls i naboj dan s:

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad , \quad \mathbf{P}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad , \quad Q = \pm q$$

gdje se predznak $+$ u naboju odnosi na kvante tipa a , a predznak $-$ na kvante tipa b . Iz toga možemo zaključiti:

Svaki kvant kreiran operatorima stvaranja ima svojstva **slobodne relativističke čestice** mase m i spina s i koja nosi impuls $\mathbf{p}$ i projekciju spina određenu s σ . Pošto čestice tipa b nose suprotan naboj od čestica tipa a kažemo da je b **antičestica** čestice a . U slučaju realnog polja postoji samo jedna vrsta čestica koja ne nosi naboj i za koju kažemo da je sama sebi antičestica. Čestice su međusobno neraspoznatljive i zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, tj. radi se o **bozonima**.

Normalizacija stanja je takva da za vakuum uzimamo $\langle 0|0\rangle = 1$, iz čega slijedi da su jednočestična stanja normalizirana tako da vrijedi

$$\langle \mathbf{p}\sigma | \mathbf{p}'\sigma' \rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

4.6 Bezmaseno spin-1 polje. Maxwellova teorija

Sada ćemo preći na razmatranje bezmasenih polja. Vidjet ćemo da za neišezavajući spin bezmasenost dovodi do pojave nove vrste simetrija, tzv. **lokalne interne simetrije** ili **baždarne simetrije**. Fokusirat ćemo se na najvažniji slučaj spin-1 polja, a više spinove ćemo samo kratko komentirati. Kao primjer interagirajuće teorije koja uključuje bezmaseno spin-1 polje razmotrit ćemo **Maxwellovu teoriju** (ili **elektrodinamiku**) koja opisuje **elektromagnetska međudjelovanja**.

4.6.1 Slobodno bezmaseno spin-1 polje

Ako u lagranžijan za realno Proca polje (4.4.5) stavimo $m = 0$ lagranžijan postaje:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \quad (4.6.1)$$

a pripadna Euler-Lagrangeova jednadžba daje

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} \equiv \square A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu}) = 0 \quad (4.6.2)$$

što su **Maxwellove jednadžbe u vakuumu**. Dakle, teorija kojom ćemo se baviti u ovom odjeljku je formalno ekvivalentna elektrodinamici pa ćemo se referirati na nju kao na Maxwellovu teoriju, a čestice kvantiziranog polja A_{μ} ćemo zvati **fotoni**.

Ako bi probali dobiti sve rezultate naivnim limesom $m \rightarrow 0$ u formulama Proca teorije, naišli bi na probleme. Na primjer, postoji problem s longitudinalnom polarizacijom jer iz (4.4.9)

$$\varepsilon_{\mu}^{(3)}(\mathbf{p}) \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{p}|}{m} (1, 0, 0, 1) \xrightarrow{m \rightarrow 0} \infty (1, 0, 0, 1)$$

vidimo da nije dobro definirana u limesu. No, to da bi moglo biti problema s jednom polarizacijom i nije neočekivano jer smo vidjeli da bezmasene čestice posjeduju samo 1 ili 2 polarizacijska stanja pa možemo očekivati da je limit singularan jer vodi na diskontinuirani prijelaz $3 \rightarrow 2$ u dimenziji spinskog prostora stanja. Stoga, umjesto da pokušavamo raditi limes $m \rightarrow 0$ krenut ćemo s analizom otpočetak i samo koristiti one formule iz Proca teorije koje su očito regularne u limesu.

Jednadžba gibanja (4.6.2) raspisana po komponentama glasi

$$\nabla^2 A_0 + \partial_0(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (4.6.3)$$

$$\square \mathbf{A} + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla A_0) = 0 \quad (4.6.4)$$

Posebnost teorije s $m = 0$ je da posjeduje **baždarnu simetriju** (eng. **gauge symmetry**):

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\chi(x) \quad (\text{baždarna transformacija})$$

gdje je $\chi(x)$ proizvoljna realna funkcija.

Baždarna simetrija je **lokalna** simetrija jer se polje u različitim točkama prostor-vremena različito transformira (parametar transformacije je funkcija na prostor-vremenu). Posebnost ovih transformacija je da **ne mijenjaju fizikalno stanje**, tj. konfiguracije polja povezane baždarnom transformacijom opisuju isto fizikalno stanje. Stoga, da bi

prebrojali stvarne fizikalne stupnjeve slobode moramo se “riješiti” onih nefizikalnih, što se može napraviti **odabirom baždarenja** (eng. **gauge fixing**).

Na kursu iz elektrodinamike smo koristili **Lorenzovo baždarenje** koje glasi:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Lorenzovo baždarenje je spretno u klasičnoj elektrodinamici jer bitno pojednostavljuje jednačbe gibanja i čini ih lakšim za rješavanje i manipuliranje, a k tome je i **Lorentz kovarijantno**. No, za naše potrebe ovdje nije dovoljno dobro jer se njime ne rješavamo svih nefizikalnih stupnjeva slobode. Razlog je što ono dozvoljava klasu baždarnih transformacija u kojima $\chi(x)$ zadovoljava

$$\square \chi(x) = 0 \quad (4.6.5)$$

što znači da **baždarenje nije u potpunosti fiksirano**.

Za ove potrebe bolji odabir je tzv. **Coulombovo baždarenje** definirano s:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.6.6)$$

Uvrštavanje Coulombovog baždarenja u (4.6.3) daje jednačbu za $A_0(x)$:

$$\nabla^2 A_0 = 0$$

koja, nakon što upotrijebimo sada već standardnu pretpostavku o iščezavanju polja u prostornoj beskonačnosti, $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_\mu(t, \mathbf{x}) = 0$, ima samo trivijalno rješenje:¹⁰

$$A_0(x) = 0 \quad (4.6.7)$$

Uvrštavanje (4.6.6) i (4.6.7) u (4.6.4) daje:

$$\square \mathbf{A} = 0 \quad (4.6.8)$$

Sustav jednačbi (4.6.6)–(4.6.8) čini Maxwellove jednačbe za slobodno polje u Coulombovom baždarenju. Vidimo da su jednačbe u Coulombovom baždarenju još jednostavnije nego u Lorenzovom baždarenju, no cijena koju plaćamo je **gubitak manifestne Lorentz kovarijantnosti** (jer (4.6.7) nije Lorentz kovarijantna jednakost). To je naravno posljedica činjenice da Coulombov baždarni uvjet nije Lorentz kovarijantan. Naravno, mi očekujemo da je teorija i dalje Lorentz kovarijantna (klasična svakako je, za kvantnu tek treba pokazati), samo smo odabirom baždarenja odlučili koristiti “Lorentz nekovarijantan formalizam”.

Razmotrimo sada rješenja Maxwellovih jednačbi (4.6.7)–(4.6.8) u obliku Fourierovog transformata:

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma} \boldsymbol{\epsilon}^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* e^{ip \cdot x} \right) \quad (4.6.9)$$

U izrazu smo odmah anticipirali da postoje samo dva nezavisna polarizacijska stanja (od moguća 3) zbog baždarnog uvjeta (4.6.6). Uvrštavanje u (4.6.8) i Coulombov baždarni uvjet (4.6.6) daje:

$$p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|, \quad \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\sigma)}(\mathbf{p}) = 0$$

¹⁰Za razliku od jednačbe (4.6.5) koja posjeduje netrivialna rješenja s propagirajućim valnim paketima.

Desna jednakost je **uvjet transversalnosti** na polarizaciju. Ponovo ćemo pretpostaviti da su bazni vektori polarizacije ortonormirani:

$$\epsilon^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* \cdot \epsilon^{(\sigma')}(\mathbf{p}) = \delta_{\sigma\sigma'}$$

Za poseban slučaj $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ možemo odabrati za polarizacijsku bazu:

$$\epsilon^{(1)}(\mathbf{p}) = (1, 0, 0) \quad , \quad \epsilon^{(2)}(\mathbf{p}) = (0, 1, 0)$$

Ovakvi vektori polarizacije opisuju **linearnu polarizaciju**. Drugi u praksi važan odabir baze je

$$\epsilon^{(R)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0) \quad , \quad \epsilon^{(L)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0)$$

Ovi vektori baze pak opisuju **cirkularne polarizacije**, i svojstvena su stanja **heliciteta** (projekcije angularnog momenta na smjer impulsa, što je z -os u ovom primjeru).

4.6.2 Kvantizacija slobodnog bezmasenog spin-1 polja

Nakon kvantizacije, veličine $a_{\mathbf{p}\sigma}$ iz (4.6.9) postaju operatori. Cilj je konstruirati prostor stanja i doznati kako ovi operatori djeluju na njemu. U tu svrhu mogli bismo primijeniti formalizam kanonske kvantizacije. No, u ovom slučaju procedura nije toliko jednostavna jer u sustavu postoje **veze** i prvo bismo morali shvatiti kako se kanonska procedura modificira kad postoje veze. Ovu proceduru ćemo odložiti za narednu vježbu i umjesto toga poslužiti se analogijom s kvantizacijom spin-0 polja.

Da bi vidjeli da postoji potpuna analogija, napisat ćemo operatore energije i impulsa pomoću operatora $a_{\mathbf{p}\sigma}$ i $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$. Uvrštavanje (4.6.9) u Noetherine izraze za energiju i impuls daje:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{\mathbf{A}}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + a_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \right)$$

$$P^j = - \int d^3\mathbf{x} \dot{\mathbf{A}} \cdot \partial_j \mathbf{A} = \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} p^j \left(a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + a_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \right)$$

Iz uloge koju operatori $a_{\mathbf{p}\sigma}$ i $a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ imaju u Fourierovom transformatu polja, te načina kako ulaze u izraze za energiju i impuls, prirodno je pretpostaviti da igraju ulogu operatora stvaranja i poništenja za ovu teoriju, tj. da zadovoljavaju komutacijske relacije:

$$[a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{q}\sigma'}] = 0 \quad (4.6.10)$$

Prostor stanja se konstruira na isti način kao za realno spin-0 ili masivno realno spin-1 polje. Dobijamo Fockov prostor stanja slobodnih relativističkih bezmasenih spin-1 čestica, gdje se čestice kreiraju djelovanjem operatora stvaranja $a_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger$ i karakterizirane su impulsom $\mathbf{p}$ i helicitetom σ , s tim da postoje oba helicitetna stanja jer je u Maxwelllovoj teoriji realizirana simetrija **pariteta** (koju ćemo analizirati malo kasnije). Čestice su međusobno neraspoznatljive i zadovoljavaju **Bose-Einsteinovu statistiku**. Zbog formalne identičnosti ove teorije s teorijom kvantiziranog slobodnog elektromagnetskog polja ove bozonske čestice se kolokvijalno obično nazivaju **fotoni** i mi ćemo od sada nadalje koristiti ovaj naziv.

Vježba 4.6.1: Pokažite da se (4.6.10) može dobiti metodom kanonske kvantizacije sustava s vezama.

Dokaz: Iz lagranžijana (4.6.1) slijedi da su kanonski impulsi $\pi^\mu(x)$ pridruženi komponentama polja $A_\mu(x)$ dani s:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0 \quad (4.6.11)$$

$$\pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} = -\dot{A}^j - \partial_j A^0 = E_j$$

gdje je $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ električno polje. Relacija za π^0 je primjer veze, jer nam očito govori da nisu sve kanonske varijable nezavisne dinamične varijable. Ova teorija ima još jednu vezu danu Maxwelllovom jednadžbom

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \implies \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = 0 \quad (4.6.12)$$

Odabir Coulombovog baždarenja daje još dvije veze:

$$A_0 = 0 \quad (4.6.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.6.14)$$

Maxwellova teorija ima ukupno 4 veze, od kojih su dvije u konfiguracionom prostoru (razapet s $A_\mu(x)$), pa možemo očekivati da će postojati samo 2 nezavisna polarizacijska stupnja slobode, što upravo odgovara onom što očekujemo od bezmasene spin-1 čestice u prisustvu paritetne simetrije.

Poissonove zagrade za kanonske varijable su po definiciji uvijek iste, bez obzira ima li veza ili ne, i u ovom slučaju glase:

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \{A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad , \quad \{\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} = 0$$

Primjenom standardne "naivne" procedure kanonske kvantizacije prostom zamjenom Poissonovih zagrada s komutatorima polja (koja postaju operatori) pomnoženim s $1/i\hbar$ dobili bi

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = i\eta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad , \quad [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (4.6.15)$$

no, očito je da to ne može biti jer ovi komutatori nisu konzistentni s vezama (4.6.11) i (4.6.13). Ako u prvoj jednakosti u (4.6.15) odaberemo $\mu = \nu = 0$ dobijamo:

$$[A_0(\mathbf{x}, t), \pi^0(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0 \quad (4.6.16)$$

što je u očitoj kontradikciji s (4.6.11) i (4.6.13). Ako pak u istoj jednakosti odaberemo $\mu = j, \nu = k$ i djelujemo s $\partial/\partial y^k$ i sumiramo po $k = 1, 2, 3$, odnosno deriviramo po $\partial/\partial x^j$ i sumiramo po $j = 1, 2, 3$ dobijamo:

$$[A_j(\mathbf{x}, t), \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}, t)] = i \frac{\partial}{\partial y^j} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), E_k(\mathbf{y}, t)] = i \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0$$

što je u suprotnosti s (4.6.12), odnosno (4.6.14). Kvantizaciju sustava s vezama razvio je Dirac i pokazao da ono što korespondira komutatoru (antikomutatoru u slučaju fermionskih polja) nije Poissonova zagrada već jedna druga vrsta zagrada koju nazivamo Diracova zagrada a koja se konstruira iz Poissonove zagrada i jednadžbi veza (i jednaka je Poissonovoj zagradi za sustave u kojima nema veza). Mi nećemo razvijati Diracov pristup (koji je objašnjen u npr. Weinbergovom udžbeniku, Vol. 1, poglavlje 7) već ćemo "pješački" pronaći ispravne komutatore polja.

Relacije (4.6.11) i (4.6.13) su jasne, one nam kažu da par kanonskih varijabli A_0 i π^0 naprosto ne postoji (operatori su identično jednaki nula). Što se (4.6.12) i (4.6.14) tiče, očito je da moramo zahtijevati da sva polja komutiraju s operatorima $\nabla \cdot \mathbf{E}$ i $\nabla \cdot \mathbf{A}$ pa stoga i polje $A_j(x)$. Ideja je da "malo deformiramo" izraz na desnoj strani u (4.6.16) tako da su uvjeti veza zadovoljeni, što znači da funkciji $\delta_{jk} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ trebamo dodati nešto tako da je zbroj bezdivergentan u oba indeksa:

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \delta_{jk}^{(\text{tr})}(\mathbf{x}) = 0 = \sum_{k=1}^3 \partial_k \delta_{jk}^{(\text{tr})}(\mathbf{x})$$

Konstrukcija je najlakša ako koristimo Fourierov transformat. U tom slučaju nije teško zaključiti da je

$$\delta_{jk}^{(\text{tr})}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left(\delta_{jk} - \frac{p_j p_k}{\mathbf{p}^2} \right)$$

unikatno rješene koje zadovoljava uvjete iščezavanja divergencija a dobije se tako što se $\delta_{jk} \delta^3(\mathbf{x})$ funkciji doda nešto.

Dobili smo da su kanonski komutatori u ovoj teoriji dani s:

$$[A_j(\mathbf{x}, t), \pi_k(\mathbf{y}, t)] = -i \delta_{jk}^{(\text{tr})}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [A_j(\mathbf{x}, t), A_k(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad , \quad [\pi_j(\mathbf{x}, t), \pi_k(\mathbf{y}, t)] = 0$$

Za vježbu možete pokazati da je ovaj set komutacijskih relacija u potpunosti ekvivalentan setu relacija (4.6.10).

4.6.3 Kovarijantna derivacija i minimalno vezanje

Vidjeli smo da teorija slobodnog bezmasenog spin-1 polja posjeduje baždarnu invarijantnost. Nakon uključivanja međudjelovanja, **baždarna invarijantnost mora i dalje vrijediti** jer bi inače nefizikalni stupnjevi slobode mogli "uskrnuti" i dovesti do problema poput **neunitarnosti** ili različitih **narušenja Lorentzove simetrije** s popratnim pojavama kao što su **narušenje kauzalnosti**.

Kao primjer, razmotrimo vezanje fotona na skalarno polje $\varphi(x)$. Najjednostavnije Poincaré invarijantno vezanje ova dva polja je dano s

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q A^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \quad (4.6.17)$$

Vidjeli smo da se na baždarnu transformaciju A^μ transformira kao

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (4.6.18)$$

gdje je $\chi(x)$ proizvoljno realno skalarno polje, što daje

$$\mathcal{L}'_{\text{int}} = q (A^\mu + \partial^\mu \chi) \varphi \partial_\mu \varphi = \mathcal{L}_{\text{int}} + q (\partial^\mu \chi) \varphi \partial_\mu \varphi$$

Da bi akcija bila invarijantna, zakon transformacije skalarnog polja $\varphi \rightarrow \varphi'$ bi morao biti takav da je ukupni lagranžijan $\mathcal{L}$ invarijantan (do na totalne derivacije) na ukupnu transformaciju. U teoriji sa samo jednim realnim skalarnim poljem, lako se može vidjeti da takva simetrija ne postoji. Pošto se iz uvjeta realnosti skalarno polje može transformirati samo na način $\varphi' = \pm \varphi$, jedini način za vezati fotonsko polje i realno skalarno polje na baždarno invarijantan način je korištenjem baždarno invarijantne jakosti fotonskog polja $F_{\mu\nu}$. Najjednostavniji interakcijski lagranžijani bi bili oblika

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = (F_{\mu\nu})^2 f(\varphi)$$

gdje je f neka funkcija (koja u slučaju minusa u zakonu transformacije φ mora biti parna). No, kao što ćemo vidjeti, ovakvo vezanje ima potpuno drukčija svojstva od vezanja u (4.6.17) i sila između točkastih naboja **nije Coulombovog tipa**. Pored toga, ovakva interakcija vodi na **nerenormalizabilne teorije** (ovaj pojam ćemo objasniti kasnije).

No, za kompleksno skalarno polje postoji baždarno invarijantan $\mathcal{L}_{\text{int}}$ sličan onom u (4.6.17) koji možemo konstruirati ako uzmemo da se skalarno polje transformira na baždarnu transformaciju na sljedeći način

$$\varphi'(x) = e^{iq\chi(x)} \varphi(x) \quad (4.6.19)$$

Ovo je grupa **lokalnih** $U(1)$ transformacija. Razmotrimo kako se transformira lagranžijan slobodnog skalarnog polja. Kao prvo, očito da je maseni član invarijantan

$$\varphi'^\dagger \varphi' = \varphi^\dagger \varphi$$

No, zbog postojanja derivacija kinetički član nije invarijantan jer se derivacija ne transformira kao skalarno polje u (4.6.19) već kao

$$\partial_\mu \varphi' = e^{iq\chi} \partial_\mu \varphi + iq(\partial_\mu \chi) e^{iq\chi} \varphi = e^{iq\chi} (\partial_\mu + iq \partial_\mu \chi) \varphi \quad (4.6.20)$$

Pravila transformacije (4.6.18) i (4.6.20) vode na ideju – ako kombiniramo derivaciju i A_μ u **kovarijantnu derivaciju** definiranu s:

$$D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi - iq A_\mu \varphi \quad (\text{kovarijantna derivacija}) \quad (4.6.21)$$

vidimo da se ova transformira na lijepi način na $U(1)$ baždarnu grupu

$$(D_\mu \varphi)' = D'_\mu \varphi' = e^{iq\chi} (\partial_\mu + iq A_\mu) \varphi = e^{iq\chi} D_\mu \varphi$$

od čega i dolazi pridjev "kovarijantna". Iz ovog zakona transformacije vidimo da imamo 3 "lijepe Lego kockice" koje se **kovarijantno** transformiraju i na Lorentzove i na baždarne transformacije,

$$\varphi \quad , \quad D_\mu \varphi \quad , \quad F_{\mu\nu}$$

i koje (skupa s njihovim hermitski konjugiranim partnerima) onda možemo jednostavno kombinirati za dobijanje prihvatljivih članova u lagranžijanu (koji su skalari i na Lorentzove i na baždarne transformacije). Na primjer, vidimo da je

$$(D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) \quad \text{invarijantno na baždarne transformacije}$$

pa taj operator možemo koristiti u lagranžijanu **umjesto kinetičkog člana** $|\partial_\mu \varphi|^2$.

Najjednostavniji lagranžijan koji sadrži kompleksno skalarno (spin-0) polje i bezmaseno spin-1 polje u međudjelovanju je

$$\mathcal{L}_{\text{SED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (4.6.22)$$

Ova teorija se obično naziva **skalarna elektrodinamika**.

Važno je uočiti generalni princip kojim se može vezati bezmaseno spin-1 polje $A_\mu(x)$ ("**baždarno polje**") na bilo koji skup polja $\phi_r(x)$, $r = 1, \dots, n$ ("**materija**") s lagranžijanom (prije vezanja na A_μ) $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ koji posjeduje **globalnu** $U(1)$ internu simetriju na transformacije:

$$\phi'_r(x) = e^{iq_r \chi} \phi_r(x) \quad , \quad \mathcal{L}'_{\text{mat}} = \mathcal{L}_{\text{mat}} \quad (4.6.23)$$

gdje je χ proizvoljan **konstantni** realni parametar. U tom slučaju se procedura za konstrukciju baždarno invarijantnog lagranžijana u kojem polja ϕ_r međudjeluju s A_μ sastoji od dva koraka:

1. U lagranžijanu materije $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ zamijenite derivacije po prostor-vremenu s kovarijantnim derivacijama, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$.
2. Dodajte lagranžijanu član koji opisuje slobodno elektromagneto polje, $\mathcal{L}_A(F) = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4$.

Ovaj prijepis, koji se naziva **minimalno vezanje**, a koji prevodi teoriju s globalnom internom $U(1)$ simetrijom u teoriju s lokalnom (baždarnom) simetrijom se može matematički sažeti na sljedeći način:

$$\mathcal{L}_{\text{mat}}(\phi, \partial\phi) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{mat}}(\phi, D\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.6.24)$$

gdje je D kovarijantna derivacija definirana u (4.6.21).

Komentari vezani uz minimalno vezanje:

- Uočite da minimalno vezanje ne daje najopćenitiji baždarno invarijantni lagranžijan, jer je uvijek moguće dodati članove koji sadrže dvije ili više derivacija polja, poput $F^2 |\phi|^2$, $|D\phi|^2 |\phi|^2$, $|D\phi|^4$ i dr. Kao što ćemo vidjeti, bitna razlika je u tome da su članovi koje generira minimalno vezanje **renormalizabilni**, dok su svi ekstra članovi **nerenormalizabilni**.
- Princip minimalnog vezanja može se proširiti na općenitije baždarne grupe, uz razliku što u tom slučaju: (i) nemamo samo jedno baždarno polje već ih ima onoliko kolika je dimenzija Liejeve algebre baždarne grupe, $A_a^\mu(x)$ (ii) tenzor jakosti baždarnog polja $F_a^{\mu\nu}(x)$ posjeduje i nelinearne članove.

Vježba 4.6.2: Pronađite jednačbe gibanja za skalarnu elektrodinamiku.

Rješenje: Najbolje je prvo raspisati lagranžijan (4.6.22):

$$\mathcal{L}_{\text{sED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\varphi^\dagger)(\partial^\mu\varphi) - iqA^\mu(\varphi\partial_\mu\varphi^\dagger - \partial_\mu\varphi\varphi^\dagger) + q^2A_\mu A^\mu\varphi^\dagger\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi \quad (4.6.25)$$

Primjena Euler-Lagrangeove jednačbe za $\varphi^\dagger$ daje

$$(\square + m^2)\varphi = i2qA^\mu\partial_\mu\varphi + iq(\partial_\mu A^\mu)\varphi + q^2A_\mu A^\mu\varphi$$

dok Euler-Lagrangeova jednačba za A_μ daje:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = iq(\varphi\partial_\mu\varphi^\dagger - \partial_\mu\varphi\varphi^\dagger) - 2q^2A_\mu\varphi^\dagger\varphi$$

Iz jednačbi je vidljivo da q , osim što je naboj koji nosi polje φ (odnosno, naboj čestice koju poništava polje φ) istovremeno igra ulogu **konstante vezanja**.

4.6.4 Baždarna simetrija i sačuvane struje

Razmotrimo поближе vezu između baždarnih simetrija i sačuvanih struja. U definiciji minimalnog vezanja krenuli smo od polja materije ϕ_r i pripadnog lagranžijana $\mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi]$ koji posjeduje globalnu internu simetriju s jednoparametarskom $U(1)$ grupom čije djelovanje je dano u (4.6.23). Iz Noetherinog teorema znamo da onda mora postojati pripadna sačuvana struja dana s

$$j_{(0)}^\mu = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} iq_r\phi_r \quad (4.6.26)$$

Nakon uvođenja minimalnog vezanja dobijamo novu teoriju s “proširenim” lagranžijanom $\mathcal{L}[\phi, A]$, danim u (4.6.24), koji je sada invarijantan na veću, lokalnu, $U(1)$ simetriju čije djelovanje je dano u (4.6.19) i (4.6.18). Pošto je teorija i dalje simetrična na globalne $U(1)$ transformacije, za koje je $\chi(x) = \chi = \text{konst}$, u “proširenoj” teoriji i dalje postoji Noetherina sačuvana struja j^μ dana s

$$j^\mu = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} iq_r\phi_r$$

Zbog dodatnih članova u lagranžijanu izraz za struju će se promijeniti, no očito je da će vrijediti

$$j_{(0)}^\mu = \lim_{A \rightarrow 0} j^\mu \quad (4.6.27)$$

U nekim teorijama, poput **spinorne elektrodinamike**, $j_{(0)}^\mu$ i j^μ su jednaki, tj. sačuvana struja ne ovisi o baždarnom polju A_μ .

Postoji opći teorem koji povezuje sačuvanu struju i vezanja polja materije i baždarnog polja u lagranžijanu:

Vezanje na bezmasenu spin-1 česticu mora biti takvo da je dio lagranžijana linearan u A_μ jednak linearnom dijelu od $A_\mu j^\mu$, gdje je j^μ sačuvana struja ($\partial_\mu j^\mu = 0$).

Dokaz: Znamo da u teoriji prije minimalnog vezanja vrijedi

$$\delta_\chi \mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi] = (\partial_\mu \chi) j_{(0)}^\mu + O(\chi^2)$$

Primjenom minimalnog vezanja $\mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi] \rightarrow \mathcal{L}[\phi, A]$ i zakona transformacije baždarnog polja $\delta_\chi A_\mu = -\partial_\mu \chi$ iz gornjeg izraza i invarijantnosti lagranžijana $\delta_\chi \mathcal{L}[\phi, A] = 0$ možemo zaključiti da mora vrijediti

$$\mathcal{L}[\phi, A] = \mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi] + A_\mu j_{(0)}^\mu + O(A^2) = \mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi] + A_\mu j^\mu + O(A^2)$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili (4.6.27). Time smo dokazali teorem.

Vježba 4.6.3: Pokažite eksplicitnom konstrukcijom valjanost gornjeg teorema u skalarnoj elektrodinamici.

Rješenje: U ovom slučaju $\mathcal{L}_{\text{mat}}[\phi]$ je dan s:

$$\mathcal{L}_{\text{mat}}[\varphi] = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (4.6.28)$$

pa su baždarna transformacija i pripadna struja $j_{(0)}^\mu$ dane s:¹¹

$$\varphi' = e^{iq\chi} \varphi, \quad \varphi'^\dagger = e^{-iq\chi} \varphi^\dagger \quad \implies \quad j_{(0)}^\mu = iq(\varphi \partial^\mu \varphi^\dagger - (\partial^\mu \varphi) \varphi^\dagger) \quad (4.6.29)$$

Nakon minimalnog vezanja dobijamo lagranžijan skalarne elektrodinamike, eksplicitno napisan u (4.6.25), iz kojeg se može dobiti sačuvana struja:

$$j^\mu = iq(\varphi \partial^\mu \varphi^\dagger - (\partial^\mu \varphi) \varphi^\dagger) + 2q^2 A^\mu \varphi^\dagger \varphi = j_{(0)}^\mu + 2q^2 A^\mu \varphi^\dagger \varphi \quad (4.6.30)$$

Iz ovog izraza vidimo dvije stvari. Jedna je da je (4.6.27) očito zadovoljeno, a druga je da je dio lagranžijana (4.6.25) linearan u A_μ jednak $A_\mu j_{(0)}^\mu$.

4.6.5 Wardovi identiteti

Razmotrimo proces u kojem imamo određeni broj fotona u ulaznom i izlaznom stanju. Razmotrimo za početak jedan foton iz npr. ulaznog stanja koji nosi 4-impuls p i nalazi se u polarizacijskom stanju kojem je pridružen vektor polarizacije $\varepsilon^\mu(p)$. Iako još nismo razmotrili Feynmanova pravila za bezmasene spin-1 čestice možemo po analogiji sa skalarnim poljem pretpostaviti da je vanjskoj liniji pridružen polarizacijski vektor koji stoji uz pripadni operator poništenja (za ulazne čestice) odnosno operator stvaranja (za izlazne čestice). To znači da će ulazni foton doprinositi S-matrici u Feynmanovom dijagramima s faktorom $\varepsilon_\mu(p)$, što pak znači da invarijantna amplituda raspršenja $\mathcal{M}$ za razmatrani proces mora biti oblika¹²

$$\mathcal{M} = \varepsilon^\mu(\mathbf{p}) \mathcal{M}_\mu \quad (4.6.31)$$

Radi jednostavnosti razmotrimo prvo poseban slučaj u kojem se $\mathbf{p}$ nalazi na z -osi. Pošto je $\varepsilon^\mu(\hat{\mathbf{z}})$ jedna od fizikalnih polarizacija, može se napisati kao linearna kombinacija baznih vektora

$$\varepsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad \varepsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

¹¹Sjetimo se da u Noetherinom izrazu za struju (4.6.26) polja φ i $\varphi^\dagger$ tretiramo kao nezavisna.

¹²Radi preglednosti izraza ne pišemo eksplicitno varijable o kojima ovisi $\mathcal{M}$, a to su impulsi i polarizacije svih čestica koje sudjeluju u procesu, bilo u izlaznom ili u ulaznom stanju. Primjena Lorentzove transformacije implicira transformaciju ovih varijabli. Npr. tvrdnju da je $\mathcal{M}$ Lorentz skalar u stvari treba čitati kao

$$\mathcal{M}'(p'_1, \sigma'_1; \dots; p'_n, \sigma'_n) = \mathcal{M}(p_1, \sigma_1; \dots; p_n, \sigma_n)$$

gdje su $p'_j = \Lambda p_j$, a σ'_j Lorentz transformirane fizikalne polarizacije.

Razmotrimo sada kako se fizikalne polarizacije transformiraju na Lorentzove transformacije koje pripadaju maloj grupi od p , koje zadovoljavaju

$$\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu$$

U posebnom slučaju koji smo odabrali imamo $p^\mu = \bar{p}^\mu \equiv (|k|, 0, 0, k)$. Za razumijevanje što se događa djelovanjem male grupe u ovom posebnom slučaju dovoljno je razmotriti specifičnu transformaciju danu s:

$$\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lako se pokaže da $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$ spada u pravu Lorentzovu grupu i štoviše malu grupu od $\bar{p}^\mu$. Eksplicitni račun daje:

$$\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon^\mu_{(1)} + \frac{\bar{p}^\mu}{|k|}$$

Vidimo da Lorentzove transformacije produciraju nefizikalnu longitudinalnu polarizaciju. Ovaj rezultat je sasvim općenit – ako je $\varepsilon^\mu(p)$ proizvoljna fizikalna polarizacija za foton impulsa p^μ , Lorentzove transformacije će općenito djelovati na način:

$$\varepsilon'^\mu(p') = \Lambda^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(p) = \varepsilon^\mu(p') + c p'^\mu, \quad p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \quad (4.6.32)$$

gdje je c neki broj koji ovisi o Λ i p , a $\varepsilon^\mu(p')$ neka fizikalna polarizacija za 4-impuls p' . Zadnji član je očito nefizikalna longitudinalna polarizacija za koju znamo da se, iz analize unitarnosti u odjeljku 4.2.3, ne smije pojavljivati što znači da ovaj doprinos mora nekako iščezavati u mjerljivim veličinama ako je teorija unitarna. Gornju relaciju stoga treba čitati da Lorentzova transformacija Λ prevodi fizikalnu polarizaciju $\varepsilon^\mu(p)$ u fizikalnu polarizaciju $\varepsilon^\mu(p')$.

Vratimo se sada na izraz (4.6.31). Pošto Lorentz kovarijantnost teorije zahtijeva da je $\mathcal{M}$ Lorentz skalar, $\mathcal{M}_\mu$ se mora transformirati kao 4-vektor:

$$\mathcal{M}'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \mathcal{M}_\nu$$

To znači da se $\mathcal{M}$ transformira na Lorentzove transformacije u skladu s

$$\mathcal{M}' = \varepsilon'^\mu(p') \mathcal{M}'_\mu = \varepsilon^\mu(p') \mathcal{M}'_\mu + c p'^\mu \mathcal{M}'_\mu$$

No, račun napravljen direktno za proces s “crtkanim” varijablama (p' , $\varepsilon'(p')$ i dr.), napravljen na isti način kao s necrtkanim (p , $\varepsilon(p)$ i dr.) koji daje $\mathcal{M} = \varepsilon^\mu(p) \mathcal{M}_\mu$, bi dao kao rezultat

$$\mathcal{M}' = \varepsilon^\mu(p') \mathcal{M}'_\mu$$

što znači da **Lorentz kovarijantnost zahtijeva** da vrijedi (nakon što maknemo nepotrebne crtice):

$$p^\mu \mathcal{M}_\mu = 0 \quad \text{za svaki foton (4-impulsa } p) \text{ u ulaznom ili izlaznom stanju}$$

Ova relacija se zove **Wardov identitet** i može se dokazati da je zadovoljena za sve procese u kvantnoj elektrodinamici. Narušenje Wardovog identiteta bi povuklo za sobom ili narušenje Lorentz kovarijantnosti ili unitarnosti (ili oboje).

Wardov identitet je **blisko povezan s baždarnom invarijantnošću**. To se najlakše vidi ako se uoči da relacija (4.6.32) inducira transformaciju baždarnog polja oblika:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi, \quad \chi(x) = -i \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}\sigma} c^{(\sigma)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger c^{(\sigma)}(\mathbf{p})^* e^{ip \cdot x} \right)$$

što je upravo baždarna transformacija.

4.6.6 Wardovi identiteti i polarizacijske sume

U praktičnim računima u procesima često nam trebaju udarni presjeci **sumirani po polarizacijama** (tzv. **nepolarizirani procesi**). U tim situacijama pojavljuje se polarizacijska suma

$$\sum_{\sigma=1}^2 \varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p)^* \varepsilon_{\sigma}^{\nu}(p)$$

U slučaju masivnog spin-1 polja rezultat je dan u (4.4.10). Očito je da je limes $m \rightarrow 0$ singularan pa moramo rezultat naći na neki drugi način. U stvari ovo nam sugerira da polarizacijska suma za bezmaseno polje i nije Lorentz kovarijantna. To nam potvrđuje i eksplicitni račun koji daje:

$$\sum_{\sigma=1}^2 \varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p)^* \varepsilon_{\sigma}^{\nu}(p) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2|\mathbf{p}|} (p^{\mu} \bar{p}^{\nu} + \bar{p}^{\mu} p^{\nu}) \quad (4.6.33)$$

gdje je $\bar{p}^{\mu} \equiv (\omega_p, -\mathbf{p})$. Ako upotrijebimo ovaj izraz u izrazu za udarni presjek, koji je proporcionalan $|\mathcal{M}|^2$, koristeći logiku iz prethodnog odjeljka imamo

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{\sigma} |\varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p) \mathcal{M}_{\mu}(p)|^2 = \mathcal{M}_{\mu}(p) \mathcal{M}_{\nu}(p) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p)^* \varepsilon_{\sigma}^{\nu}(p) \\ &= -\eta^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu}(p) \mathcal{M}_{\nu}(p) + \frac{1}{2|\mathbf{p}|} (p^{\mu} \bar{p}^{\nu} + \bar{p}^{\mu} p^{\nu}) \mathcal{M}_{\mu}(p) \mathcal{M}_{\nu}(p) \end{aligned}$$

Pošto je po Wardovom identitetu $p^{\mu} \mathcal{M}_{\mu}(p) = 0$, vidimo da drugi član iščezava. Kao posljedica u praktičnim računima kad $|\mathcal{M}|^2$ sumiramo po polarizacijama ulaznih i/ili izlaznih fotona Wardov identitet nam kaže da možemo koristiti:

$$\sum_{\sigma=1}^2 \varepsilon_{\sigma}^{\mu}(p)^* \varepsilon_{\sigma}^{\nu}(p) \longrightarrow -\eta^{\mu\nu} \quad (\text{uz primjenu Wardovog identiteta}) \quad (4.6.34)$$

Zadatak 4.6.4: Dokažite (4.6.33).

Naputak: Možete primijeniti isti trik kao što smo napravili u slučaju masivnog polja, a to je prvo napraviti račun za odabir $p^{\mu} = (|p|, 0, 0, p)$, a onda primjenom rotacija dobiti izraz za generalni impuls.

4.6.7 Fotonski propagator

Vidjeli smo da nam za Feynmanov perturbativni račun trebaju vremenski uređene 2-točkaste korelacijske funkcije slobodnih polja jer one daju propagator, pa ćemo sad konstruirati pripadni propagator za $U(1)$ baždarno polje. U tu svrhu trebamo:

$$\langle 0 | T \{ A^{\mu}(x) A^{\nu}(y) \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) \quad (4.6.35)$$

što je u stvari definiciona relacija za funkciju $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p)$.

Direktni račun bi išao korištenjem raspisa kvantiziranog polja putem operatora stvaranja i poništenja i korištenjem njihovih komutacijskih relacija i svojstava polarizacijskih vektora u Coulombovom (ili nekom drugom) baždarenju. No, takav račun, osim što je dugačak, bi nam nužno dao izraz koji nije manifestno Lorentz kovarijantan. Umjesto toga, iskoristit ćemo baždarnu invarijantnost i pretpostaviti valjanosti Wardovog identiteta i konstruirati propagator metodom Greenovih funkcija (sjetite se da je propagator ujedno i Greenova funkcija pomnožena s i). Ova procedura je spretna i elegantna i koristi samo klasičnu fiziku.

Krećemo od jednađžbi gibanja za $U(1)$ baždarno polje vezano na vanjsku struju $j^\mu(x)$:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = j_\mu \quad (4.6.36)$$

koju želimo riješiti metodom Fourierovog transformata. Prelazak u p -prostor

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{A}^\mu(p) \quad , \quad j^\mu(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{j}^\mu(p)$$

vodi na korespondenciju $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$, pa jednađža gibanja (4.6.36) u p -prostoru glasi:

$$(-p^2 \eta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \tilde{A}^\nu(p) = \tilde{j}^\mu(p) \quad (4.6.37)$$

Po definiciji, Greenova funkcija $\Pi_{\mu\nu}(x, y)$ je inverz diferencijalnog operatora u jednađžbi gibanja, što znači da je u p prostoru definirana putem

$$\tilde{A}^\mu(p) = \tilde{\Pi}^\mu{}_\nu(p) \tilde{j}^\nu(p)$$

odnosno, uvrštavanjem u (4.6.37) dobijamo uvjet na Fourierov transformat Greenove funkcije:

$$(-p^2 \eta^\mu{}_\rho + p^\mu p_\rho) \tilde{\Pi}^\rho{}_\nu(p) = \eta^\mu{}_\nu$$

Ovu relaciju možemo shvatiti kao matričnu jednađžbu:

$$\tilde{M}(p) \tilde{\Pi}(p) = 1 \quad , \quad \tilde{M}^\mu{}_\nu(p) = (-p^2 \eta^\mu{}_\nu + p^\mu p_\nu)$$

Rješenje jednađžbe je očito $\tilde{\Pi} = \tilde{M}^{-1}$. No, postoji problem: matrica $\tilde{M}$ **nije invertibilna** jer je

$$\det(\tilde{M})(p) = 0$$

Ovo je najlakše dokazati tako da se uoči da $\tilde{M}(p)$ posjeduje barem jednu svojstvenu vrijednost jednaku 0. U stvari, nije teško vidjeti da je pridruženi svojstveni vektor jednak p^μ :

$$\tilde{M}(p) p \equiv \tilde{M}^\mu{}_\nu(p) p^\nu = -p^2 p^\mu + p^\mu p^2 = 0$$

Pošto je $\tilde{M}(p)$ realna i simetrična matrica, postojanje svojstvene vrijednosti jednake nula implicira da je i determinanta jednaka nula, što pak znači da matrica nema inverz.

Kako postupiti dalje? Ideja: sjetimo se da je teorija baždarno invarijantna, a mi još uvijek nismo odabrali baždarenje, pa i ne treba očekivati invertibilnost jer imamo **preveliki prostor stanja** (svako fizikalno stanje je reprezentirano s puno A_μ povezanih baždarnim transformacijama). Ako želimo održati manifestnu Lorentz kovarijantnost, jedan zgodan izbor bi bio nametnuti Lorenzov baždarni uvjet $\partial_\mu A^\mu = 0$, što, ako bi se primijenilo direktno u jednađžbi gibanja (4.6.36), bi očito vodilo na

$$M = -p^2 \quad \implies \quad \tilde{\Pi}(p) = -\frac{1}{p^2}$$

Iz praktičnih razloga pokazuje se da je spretno definirati nešto širu klasu baždarenja, zvanu **R_ξ baždarenja**, pridruženu Lorenzovom baždarnom uvjetu. Ova klasa se dobije tako što se Lorenzov baždarni uvjet nametne metodom Lagrangeovih multiplikatora, koji, primijenjeni na razini akcije, vode na promjenu akcije za baždarno polje na način

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_{A,\xi} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

Ovdje je ξ novo **pomoćno polje** (eng. *auxiliary field*) koje nije dinamičko već samo ima funkciju nametanja Lorenzovog uvjeta. To se vidi iz toga što dodatna Euler-Lagrangeova jednađžba koju generira ξ daje $\partial_\mu A^\mu = 0$, a dodatni

član u lagranžijanu daje doprinos u jednadžbi gibanja za A_μ proporcionalan $(\partial_\mu A^\mu)$ pa očito ne doprinosi u klasičnoj fizici. Usprkos tome, ξ utječe na izraz za Greenovu funkciju. Pošto jednažbe gibanja ostavljaju ξ slobodnim, odabrat ćemo konstantno rješenje, $\xi(x) = \xi = \text{konst.}$

Euler-Lagrangeova jednadžba koja slijedi iz $\mathcal{L}_{A,\xi}$ je:

$$\square A_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = j_\mu$$

U ovom trenutku nećemo još primijeniti uvjet koji daje jednadžba za ξ (Lorenzov uvjet $\partial_\nu A^\nu = 0$), već ćemo prije toga konstruirati Greenovu funkciju za konstantan ξ . U p -prostoru gornja jednažba glasi:

$$\left[-p^2 \eta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu \right] \tilde{A}^\nu(p) = \tilde{j}_\mu(p) \quad (4.6.38)$$

Odnosno jednažba za Greenovu funkciju sada postaje

$$\tilde{M}_\xi(p) \tilde{\Pi}(p) = 1 \quad , \quad \tilde{M}_{\xi\nu}^\mu(p) = \left[-p^2 \eta_\nu^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p_\nu \right] \quad (4.6.39)$$

Za svaki konačni ξ matrica $\tilde{M}_\xi(p)$ je invertibilna i lako se pokaže da je inverz, koji ujedno daje Greenovu funkciju u p -prostoru, dan s

$$\tilde{\Pi}_\nu^\mu(p) = -\frac{1}{p^2} \left[\eta_\nu^\mu - (1 - \xi) \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (4.6.40)$$

Ono što u ovoj proceduri ostaje neodređeno je prijepis kako tretirati pol u $p^2 = 0$. No, već smo vidjeli na primjeru skalarnog polja da je “ispravan” prijepis koji odgovara T -uređenju dan $i\epsilon$ receptom. Nakon što uključimo faktor i prisutan u (4.6.35), dobijamo konačni rezultat za Feynmanov propagator u p -prostoru za $U(1)$ baždarno polje u R_ξ baždarenju:

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(p) = i \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \quad (4.6.41)$$

Vježba 4.6.5: Dokažite (4.6.40).

Rješenje: Najjednostavnije bi bilo naprosto provjeriti da li (4.6.40) zadovoljava (4.6.39), no mi ovdje želimo konstruirati rješenje za (4.6.39). U tu svrhu uočite da, s obzirom da ne postoji ništa osim p^μ o čemu bi mogla ovisiti Greenova funkcija, Lorentz kovarijantnost diktira oblik

$$\tilde{\Pi}_\nu^\mu(p) = A(p^2) \eta_\nu^\mu + B(p^2) p^\mu p_\nu \quad (4.6.42)$$

gdje su A i B neke funkcije koje treba odrediti iz uvjeta (4.6.39). Uvrštavanje u (4.6.39) daje

$$\begin{aligned} \eta_\nu^\mu &= \left[-p^2 \eta_\rho^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p_\rho \right] (A(p^2) \eta_\nu^\rho + B(p^2) p^\rho p_\nu) \\ &= -p^2 A(p^2) \eta_\nu^\mu + \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) A(p^2) - \frac{1}{\xi} p^2 B(p^2) \right] p^\mu p_\nu \end{aligned}$$

S obzirom da gornja jednadžba mora vrijediti za svaki p^μ , rješenje je:

$$A(p^2) = -\frac{1}{p^2} \quad , \quad B(p^2) = (\xi - 1) \frac{A(p^2)}{p^2} = \frac{1 - \xi}{p^4}$$

što uvršteno u (4.6.42) daje upravo (4.6.40).

4.6.8 Kovarijantna baždarenja

Iz izraza (4.6.41) vidimo da za svaki izbor od ξ dobijemo jedno kovarijantno baždarenje. U praksi se najčešće koriste sljedeći izbori:

- $\xi = 1$ (**Feynmanovo baždarenje**): Ovo baždarenje daje najjednostavniji mogući propagator:

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(p) = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{Feynmanovo baždarenje}) \quad (4.6.43)$$

U predavanjima ćemo **isključivo** koristiti Feynmanovo baždarenje.

- $\xi = 0$ (**Lorenzovo baždarenje**):

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(p) = -i\frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{Lorenzovo baždarenje}) \quad (4.6.44)$$

Ovaj izbor “jako” nameće Lorenzov uvjet $\partial_\nu A^\nu = 0$ u kvantiziranoj teoriji.

- $\xi \rightarrow \infty$ (**unitarno baždarenje**): Uglavnom beskorisno u kvantnoj elektrodinamici, no pokazuje se ekstremno korisno u **neabelovim baždarnim teorijama** (zasnovanim na složenijim baždarnim grupama od produkata $U(1)$ grupa) u kojima postoji **spontani lom simetrije** (poput teorije slabih međudjelovanja Standardnog modela fizike čestica).

Vidimo da se propagatori za različit ξ razlikuju za član proporcionalan $p_\mu p_\nu$. **Za baždarnu invarijantnost fizikalno mjerljivih veličina važno je da taj doprinos iščezava.** Primjenjeno na Feynmanova pravila lako se vidi da ovi članovi čine da vanjske fotonske linije dobijaju dodatni član proporcionalan p_μ , što znači

$$\varepsilon^\mu(p) \longrightarrow \varepsilon^\mu(p) + c p^\mu$$

no Wardov identitet kaže da ova promjena ne utječe na $\mathcal{M} = \varepsilon^\mu(p)\mathcal{M}_\mu$ pa je **baždarna invarijantnost osigurana**. Naravno, ovo samo po sebi nije dovoljno za ustanovljavanje potpune baždarne invarijantnosti za $\mathcal{M}$ jer se za to još mora pokazati da promjena baždarenja na unutarnjim linijama također ne dovodi do pojave novih neiščezavajućih članova.

4.6.9 Što je ustvari baždarna simetrija?

Baždarna simetrija nije simetrija u uobičajenom smislu riječi, jer transformacije ne povezuju različita fizikalna stanja pa **nema pridruženih unitarnih operatora na fizikalnom prostoru stanja**. Stoga ne daje nikakve nove sačuvane struje pored one koja dolazi od postojanja globalne simetrije. Razlog zašto se baždarna invarijantnost pojavljuje je činjenica da bezmasene čestice imaju manji broj polarizacijskih stanja od masivnih čestica istog spina pa kad koristimo opis putem teorije polja dobijamo suvišne nefizikalne stupnjeve slobode kad radimo limes $m \rightarrow 0$. Da bi teorija bila konzistentna, ovi stupnjevi slobode ne smiju igrati ulogu u mjerljivim fizikalnim veličinama i za to se “brine” baždarna simetrija.

Prirodno je zapitati se zašto baždarnu simetriju ne eliminiramo od početka tako da odmah radimo samo s fizikalnim stupnjevima slobode (kao što smo klasičnu elektrodinamiku mogli opisati u potpunosti pomoću električnog i magnetskog polja, odnosno tenzora jakosti polja $F_{\mu\nu}$, koji su invarijantni na baždarnu simetriju). Dio odgovora leži u primjeni principa najmanje akcije – vidjeli smo da se za vezanje na materiju u akciji mora koristiti potencijal A_μ , koji nije baždarno invarijantan, ako želimo da je sila između točkastih naboja Coulombovog tipa.

No, mogli bismo invertirati vezu između potencijala i jakosti polja, koja se u Lorenzovom baždarenju može napisati kao

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu \quad \Longrightarrow \quad A^\nu = \square^{-1} \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

i onda tu relaciju iskoristiti u interakcijskom lagranžijanu. Time bi dobili lagranžijan u potpunosti izražen pomoću baždarnе invarijante $F_{\mu\nu}$ i tako bi se od početka riješili baždarnе simetrije.

No, pošto operator $\square^{-1}$ nije lokalni operator (vidjeli smo da je dan integralom po cijelom prostor-vremenu) ovako napisana akcija **više ne bi bila lokalna**. Vrlo je komplicirano raditi s nelokalnim akcijama, čak i s onima za koje postoji alternativni lokalni zapis kao u ovom slučaju. Na primjer, vrlo bi teško bilo dokazati kauzalnost elektrodinamike u ovakvom nelokalnom zapisu.

No, važno je napomenuti da **nelokalnost nije u potpunosti prividna**, jer postoje stvarne i mjerljive posljedice poput Aharonov-Bohm efekta i drugih učinaka koji postoje u prisustvu netrivialne topologije. U neabelovim teorijama polja važnost potencijala je još veća jer postoje još neki objekti koji se ne mogu u potpunosti opisati lokalnim baždarno-invarijantnim veličinama poput **instantona**, **sferona** ili **Wilsonovih linija**.

Nije na odmet napomenuti da čak ni globalne $U(1)$ transformacije povezane s baždarnom simetrijom ne djeluju tako da povezuju različita fizikalno ostvariva stanja, bar ne ona pridružena elektromagnetskom djelovanju. Naime, eksperimentalna je činjenica da u prirodi još nije uočeno stanje koje je kvantna superpozicija stanja koja nose različit električni naboj. Matematičkim žargonom rečeno, izgleda da postoji **superseleksijsko pravilo** s obzirom na električni naboj. Ako je to uistinu točno, to znači da globalna $U(1)$ simetrija povezana s električnim nabojem djeluje tako da samo mijenja fazu fizikalnim stanjima,

$$U_\chi|\alpha_q\rangle = e^{iQ\chi}|\alpha_q\rangle = e^{iq\chi}|\alpha_q\rangle$$

gdje je q naboj koji posjeduje (fizikalno ostvarivo) stanje $|\alpha_q\rangle$, što daje isto fizikalno stanje.

4.7 Skalarna kvantna elektrodinamika

Naziv **elektrodinamika** podrazumijeva **minimalno vezanje** polja materije na bezmaseno spin-1 polje (fotonsko polje). Najjednostavniji primjer ovakve teorije je **skalarna elektrodinamika** u kojoj se materija sastoji od samo jednog kompleksnog skalarnog polja i akcija je dana s

$$\mathcal{L}_{\text{SED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) - m^2\varphi^\dagger\varphi \quad (4.7.1)$$

gdje su

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

a q je naboj polja φ (odnosno čestice koju poništava)

Naboj q ujedno igra ulogu i konstante vezanja (vidi jednadžbe gibanja dobijene u Zadatku 4.1.)

4.7.1 Feynmanova pravila za skalarnu kvantnu elektrodinamiku

Kvantizacijom gornje teorije dobijamo **skalarnu kvantnu elektrodinamiku**. Ako raspišemo akciju (4.7.1) dobijamo

$$\mathcal{L}_{\text{SED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\varphi)^\dagger(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^\dagger\varphi + iqA^\mu[\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\varphi)^\dagger\varphi] + q^2A_\mu A^\mu\varphi^\dagger\varphi$$

Vidimo da je interakcijski dio lagranžijana dan s:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = iqA^\mu[\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - (\partial_\mu\varphi)^\dagger\varphi] + q^2A_\mu A^\mu\varphi^\dagger\varphi$$

što nam sugerira da će u ovoj teoriji postojati dvije vrste čvorova (dva člana u uglatoj zagradi su povezana kompleksnom konjugacijom pa ćemo njihove doprinose strpati u jedan čvor).

U teorijama u kojima ima više različitih polja/čestica Feynmanovi dijagrami će biti puno pregledniji ako različitim česticama pridjelimo različite vrste linija. Konvencija koju ćemo primjenjivati tokom ovog kolegija je da se skalarna polja označavaju crtkanim linijama, a fotonsko polje valovitom linijom.

Propagatori:

Propagatore smo već izračunali za polja kakva se javljaju u ovoj teoriji, i dani su u (3.8.40) i (4.6.43):

$$\begin{aligned} \varphi &: \quad \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \quad p \quad = \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \gamma &: \quad \mu \bullet \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \bullet \nu \quad p \quad = \quad -\frac{i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Vanjske linije (**on-shell** linije) u računu za $\mathcal{M}$:

Pravila za vanjske skalarne linije znamo od prije. Što se fotonskih vanjskih linija tiče, uočimo da djelovanje polja A^μ poništava ulazni foton 4-impulsa p^μ i polarizacije σ nakon ulaska u graf putem djelovanja operatora $a_{p\sigma}$, pa kao posljedica “preživi” pripadni polarizacijski vektor $\epsilon_\sigma^\mu(p)$ koji onda čini doprinos ulazne linije. Slično vrijedi za izlazni foton, samo je ovog puta akter operator poništenja $a_{p\sigma}^\dagger$ pa je pripadni polarizacijski vektor $\epsilon_\sigma^\mu(p)^*$. Sve skupa, imamo (smjer strelica iznad linija označava smjer impulsa):

ulazna čestica φ :	$p \text{ --- } \overrightarrow{\blacksquare} \text{ --- } \bullet$	=	1
ulazna antičestica $\bar{\varphi}$:	$p \text{ --- } \overleftarrow{\blacksquare} \text{ --- } \bullet$	=	1
ulazni foton γ :	$k, \sigma \text{ ~~~~~ } \overrightarrow{} \text{ ~~~~~ } \bullet \mu$	=	$\varepsilon_{\sigma}^{\mu}(k)$
izlazna čestica φ :	$\bullet \text{ --- } \overrightarrow{\blacksquare} \text{ --- } p$	=	1
izlazna antičestica $\bar{\varphi}$:	$\bullet \text{ --- } \overleftarrow{\blacksquare} \text{ --- } p$	=	1
izlazni foton γ :	$\mu \bullet \text{ ~~~~~ } \overrightarrow{} \text{ ~~~~~ } k, \sigma$	=	$\varepsilon_{\sigma}^{\mu}(k)^{*}$

Čvorovi:

The first diagram shows a vertex with an incoming dashed line from the left labeled p , an outgoing dashed line to the bottom right labeled q , and a wavy line extending upwards. The index μ is placed near the vertex. This is equated to the expression $i q (p_\mu + q_\mu)$.

The second diagram shows a vertex with two wavy lines extending upwards and two dashed lines extending downwards. The indices μ and ν are placed near the wavy lines. This is equated to the expression $i 2 q^2 \eta_{\mu\nu}$, which is also referred to as the "galeb" term.

Faktor 2 u “galebljem” čvoru dolazi od toga što u pripadnom članu u interakcijskom lagranžijanu postoji produkt dva identična polja ($A_\mu A^\mu$) a nismo izvukli vani faktor 1/2.

Obratite pažnju na to da u oba čvora jedna skalarna linija ulazi a druga izlazi iz dijagrama. To znači da u svakom ispravnom dijagramu **strelice na skalarnim linijama imaju konzistentan smjer**.

4.7.2 Primjeri raspršenja u skalarnoj kvantnoj elektrodinamici

Razmotrit ćemo neke elementarne procese u skalarnoj kvantnoj elektrodinamici u **drvastoj** aproksimaciji.

$\phi + \phi \longrightarrow \phi + \phi$ (Møllerovo raspršenje skalarnih čestica)

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t + i\mathcal{M}_u + O(q^4)$$

$$i\mathcal{M}_t = (iq)(p_1^\mu + p_1'^\mu) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} (iq)(p_2^\nu + p_2'^\nu) = i2 \frac{q^2}{t} [(p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2')] = iq^2 \frac{s-u}{t}$$

gdje smo koristili $(p_1' \cdot p_2') = (p_1 \cdot p_2)$ i $(p_1' \cdot p_2) = (p_1 \cdot p_2')$, što slijedi iz zakona učuvanja 4-impulsa u procesu i činjenice da sve skalarnе čestice imaju istu masu, tj. $p_1^2 = p_2^2 = p_1'^2 = p_2'^2 = m^2$. Također smo upotrijebili Mandelstamove varijable t i u definirane u odjeljku 3.8.6.

Na sličan način dobijamo:

$$i\mathcal{M}_u = (iq)(p_1^\mu + p_2'^\mu) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2')^2} (iq)(p_2^\nu + p_1'^\nu) = i2 \frac{q^2}{u} [(p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_1')] = iq^2 \frac{s-t}{u}$$

Lako se pokaže da bi dobili isti rezultat da smo koristili fotonski propagator u baždarenju u kojem je $\xi \neq 1$. To slijedi iz

$$(p_1 - p_1')(p_1 + p_1') = p_1^2 - p_1'^2 = m^2 - m^2 = 0, \quad (p_1 - p_2')(p_1 + p_2') = p_1^2 - p_2'^2 = m^2 - m^2 = 0$$

pa doprinos člana u propagatoru (4.6.41) proporcionalan $(1 - \xi)$ iščezava. To je naravno u skladu s Wardovim identitetom, tj. baždarnom invarijantnošću.

Sve skupa:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u + O(q^4) = q^2 \left(\frac{s-u}{t} + \frac{s-t}{u} \right) + O(q^4)$$

Diferencijalni udarni presjek u sustavu centra masa je:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{n^4 \alpha_e^2}{4s} \left(\frac{s-u}{t} + \frac{s-t}{u} \right)^2 + O(\alpha_e^3) \quad (4.7.2)$$

gdje smo uveli n putem $q = ne$ (e je naboj protona), te konstantu fine strukture α_e

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

gdje je ϵ_0 dielektrična konstanta vakuuma.

$\phi + \gamma \longrightarrow \phi + \gamma$ (Comptonovo raspršenje skalarne čestice)

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_s + i\mathcal{M}_t + i\mathcal{M}_g + O(q^4)$$

$$i\mathcal{M}_s = \varepsilon_1^\mu (2p_1 + p_2)_\mu \frac{i(-iq)^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} (2p'_1 + p'_2)_\nu \varepsilon_2^{\nu*} = -i4q^2 \frac{(\varepsilon_1 \cdot p_2)(\varepsilon_2'^* \cdot p'_1)}{s - m^2} = -i2q^2 \frac{(\varepsilon_1 \cdot p_2)(\varepsilon_2'^* \cdot p'_1)}{(p_1 \cdot p_2)}$$

$$i\mathcal{M}_t = \varepsilon_1^\mu (2p'_1 - p_1)_\mu \frac{i(-iq)^2}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} (2p_2 - p'_2)_\nu \varepsilon_2^{\nu*} = -i4q^2 \frac{(\varepsilon_1 \cdot p'_1)(\varepsilon_2'^* \cdot p_2)}{t - m^2} = +i2q^2 \frac{(\varepsilon_1 \cdot p'_1)(\varepsilon_2'^* \cdot p_2)}{(p_1 \cdot p'_1)}$$

$$i\mathcal{M}_g = \varepsilon_1^\mu i2q^2 \eta_{\mu\nu} \varepsilon_2^{\nu*} = i2q^2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2^*)$$

gdje smo upotrijebili Mandelstamove varijable s , t i u definirane u odjeljku 3.8.6, te smo koristili transversalnost fotonskih polarizacija, $\varepsilon_1 \cdot p_1 = 0 = \varepsilon'_2 \cdot p'_2$, te bezmasenost fotona, $p_1^2 = 0 = p_2'^2$, iz koje slijedi

$$s = m^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \quad , \quad t = m^2 - 2(p_1 \cdot p'_1)$$

$\phi + \bar{\phi} \longrightarrow \gamma + \gamma$ (anihilacija para čestica-aničestica)

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t + i\mathcal{M}_u + i\mathcal{M}_g + O(q^4)$$

$$i\mathcal{M}_t = (2p_1 - k_1)_\mu \frac{i(-iq)^2}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} (k_2 - 2p_2)_\nu \varepsilon_1^{\mu*} \varepsilon_2^{\nu*} = -i2q^2 \frac{(\varepsilon_1^* \cdot p_1)(\varepsilon_2^* \cdot p_2)}{(k_1 \cdot p_1)}$$

$$i\mathcal{M}_u = (2p_1 - k_2)_\mu \frac{i(-iq)^2}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} (k_1 - 2p_2)_\nu \varepsilon_1^{\mu*} \varepsilon_2^{\nu*} = -i2q^2 \frac{(\varepsilon_1^* \cdot p_2)(\varepsilon_2^* \cdot p_1)}{(k_1 \cdot p_2)}$$

$$i\mathcal{M}_g = \varepsilon_1^{\mu*} i2q^2 \eta_{\mu\nu} \varepsilon_2^{\nu*} = i2q^2 (\varepsilon_1^* \cdot \varepsilon_2^*)$$

Iz izraza za udarne presjeke, koji su mjerljive veličine, možemo izvući sljedeći zaključak:

Feynmanov razvoj u QED je u stvari razvoj po konstanti fine strukture koja je razumno malena ($\alpha_e < 0.01$) pa je za očekivati da je razvoj smislen.

Ovaj zaključak je izuzetno važan pa vrijedi dodati par riječi. Vidjeli smo da je lagranžijanska konstanta vezanja u kvantnoj elektrodinamici naboj elektrona e , koji iznosi $e \approx 0.3$.¹³ Kako to baš i ne zadovoljava jako dobro uvjet $e \ll 1$ koji garantira da je perturbativni razvoj smislen, moglo bi se posumnjati u kvalitetu perturbativnog razvoja QED. No, činjenica da je razvoj efektivno razvoj u $\alpha_e = e^2/4\pi \approx 1/137$, što je razumno maleno, pokazuje zašto perturbativni razvoj po konstanti vezanja u QED u stvari funkcionira jako dobro.

Zadatak 4.7.1: Izračunajte diferencijalni udarni presjek i totalni udarni presjek za Comptonovo raspršenje i anihilaciju para u sustavu centra masa. U slučaju Comptonovog raspršenja razmotrite granične slučajeve visoko-energetskog upadnog fotona ($E_1 \gg m$) i slučaj niskoenergetskog upadnog fotona ($E_1 \ll m$).

4.7.3 Wardovi identiteti i baždarna invarijantnost

Primjeri koje smo napravili demonstriraju mehanizme koji osiguravaju baždarnu invarijantnost i (s njom povezanu) valjanost Wardovog identiteta. Stoga ćemo ih iskoristiti za razumijevanje nekih **općih tvrdnji** koje vrijede za sve vrste kvantne elektrodinamike (ne samo skalarnu).

Kao primjer, razmotrimo поближе dobijene izraze za anihilaciju para (isti zaključci se dobiju analizom Comptonovog raspršenja). Ovdje ćemo uzeti da su samo čestice materije na vanjskim linijama fizikalne, tj. na ljusci mase (eng. **on-shell**) ($p_j^2 = m^2$), ali ne nužno i fotoni. Drugim riječima, polarizacijske vektore i impulse fotona na vanjskim linijama ostavljamo **slobodnim (off-shell)**.¹⁴

Razmotrimo prvo transformaciju vektora polarizacije vanjske fotonske linije, npr. fotona 1, oblika:

$$\epsilon_1(k_1) \longrightarrow \epsilon_1(k_1) + a k_1 \quad (4.7.3)$$

koja, kao što smo vidjeli, spada u baždarne transformacije. Iz izraza dobijenih u prethodnom odjeljku slijedi da se doprinosi dijagrama transformiraju na sljedeći način:

$$\mathcal{M}_t \longrightarrow \mathcal{M}_t + \frac{aq^2}{t - m^2}(k_1^2 - 2p_1 \cdot k_1)(k_2 - 2p_2) \cdot \epsilon_2^* = \mathcal{M}_t + aq^2(k_2 - 2p_2) \cdot \epsilon_2^*$$

gdje smo koristili $t = (p_1 - k_1)^2 = k_1^2 - 2(p_1 \cdot k_1) + m^2$. Na sličan način dobijamo da se $\mathcal{M}_u$ transformira kao

$$\mathcal{M}_u \longrightarrow \mathcal{M}_u + aq^2(k_2 - 2p_1) \cdot \epsilon_2^*$$

dok se "galeblji" dijagram transformira kao:

$$\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g + 2aq^2 k_1 \cdot \epsilon_2^*$$

Uočite da dijagrami sami za sebe nisu invarijantni na baždarnu transformaciju (4.7.3). No, ako pogledamo ukupnu amplitudu:

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} + 2aq^2(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \cdot \epsilon_2^* = \mathcal{M}$$

vidimo da je ona invarijantna (izraz u zagradi iščezava kao posljedica sačuvanja ukupnog 4-impulsa) pa vidimo da je zadovoljen Wardov identitet $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$. Uočimo dvije stvari, za koje se može pokazati da vrijede za općenite amplitude, kako u skalarnoj tako i u spinornoj kvantnoj elektrodinamici:

Wardov identitet vrijedi i kad su vanjske fotonske linije **off-shell** (tj. i kad $k_j^2 \neq 0$ i $k_j \cdot \epsilon_j \neq 0$).

Wardov identitet ne vrijedi za pojedinačne dijagrame već samo za **amplitude u cjelini**.

¹³Misli se naravno na bezdimenzionalni naboj koji je u SI sustavu dan s $e/\sqrt{\hbar c}$.

¹⁴Dakle, dopuštamo $k_i^2 \neq 0$ i $\epsilon_j \cdot k_j \neq 0$. Naravno, sačuvanje ukupnog 4-impulsa i dalje vrijedi jer je to posljedica simetrije na translacije u prostor-vremenu.

Za dokazati potpunu baždarnu invarijantnost nije dovoljan samo Wardov identitet već treba pokazati da unutarnje linije također ne narušavaju baždarnu invarijantnost. Kako se to događa smo vidjeli na primjeru Møllerovog raspršenja. Mi se nećemo baviti formalnim dokazivanjem toga na ovom kolegiju, a zainteresirane studente upućujemo na udžbenike iz popisa literature (Schwartz, Weinberg Vol. 1).

4.8 Meki limesi i Lorentz kovarijantnost*

Važna tehnika za razumijevanje svojstava relativističkih kvantnih teorija polja u kojima postoje **bezmasene čestice** sastoji se od proučavanja **mekih limesa**, tj. limesa u kojima impulsi ovakvih čestica idu u nulu. Posebno zanimljiv slučaj je kada bezmasene čestice imaju cjelobrojan spin veći od nula i nalaze se u asimptotskom prostoru stanja. To će biti predmet proučavanja u ovom odjeljku. Treba naglasiti da ćemo u izvodu koristiti **samo Lorentz kovarijantnost** teorije i neke elementarne pretpostavke o prirodi međudjelovanja (za koje se može pokazati da ih je teško ili čak i nemoguće zaobići, a da teorija ostane fizikalno i matematički smisljena).

4.8.1 Meki fotoni i sačuvanje naboja

Postoji izravna veza između Lorentz kovarijantnosti i sačuvanja naboja (bez pozivanja na baždarnu invarijantnost) u teorijama u kojima je foton vezan na materiju, u smislu da u svakoj relativističkoj kvantnoj teoriji polja koja u asimptotskim stanjima sadrži bezmasenu spin-1 česticu postoji pridruženi sačuvani naboj. Ovaj generalni teorem demonstrirat ćemo na primjeru teorija čiji se maseni sektori sastoje samo od spin-0 čestica, no generalizacija na polja proizvoljnog spina je manje-više direktna.

Razmotrimo neki proizvoljni proces u skalarnoj elektrodinamici (moguće s više skalarnih polja materije), koji može imati proizvoljan broj i sastav čestica u ulaznom i izlaznom stanju, čiju invarijantnu amplitudu ćemo označiti s $\mathcal{M}_0$. Pretpostavimo sada da želimo razmotriti drugu amplitudu $\mathcal{M}$ koja se razlikuje od prve u tome što postoji još jedna dodatna bezmasena spin-1 čestica u izlaznom stanju (mogli smo uzeti i ulazno, svedeno, zaključci bi bili jednaki). Ova amplituda se može dobiti iz prve tako da se vanjski ulazni foton veže na neku liniju čestice materije. Tri su mogućnosti vezanja: (a) na vanjsku ulaznu liniju, (b) na vanjsku izlaznu liniju, (c) unutarnju liniju ili čvor. Razmotrimo te tri mogućnosti pojedinačno.

Vezanje na ulaznu liniju:

Odaberimo jednu ulaznu liniju koja pripada spin-0 čestici materije mase m_i , naboja q_i i 4-impulsa p_i . Ukoliko vezemo za tu liniju izlaznu fotonsku liniju 4-impulsa k i polarizacijskog vektora ε doprinos ovakvih Feynmanovih dijagrama novoj amplitudi $\mathcal{M}$ se može izraziti pomoću stare amplitude $\mathcal{M}_0$ na način:

$$\mathcal{M}_i(p_i, k) = -q_i \frac{(2p_i - k) \cdot \varepsilon^*}{(p_i - k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p_i - k)$$

gdje smo zasad pretpostavili da je vezanje kao u skalarnoj elektrodinamici. Ako su sve čestice na vanjskim linijama on-shell (tj. fizikalne), vrijedi $p_i^2 = m^2$, $k^2 = 0$ i $k \cdot \varepsilon = 0$, pa gornja jednakost postaje

$$\mathcal{M}_i(p_i, k) = q_i \frac{(p_i \cdot \varepsilon^*)}{(p_i \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_i - k)$$

Sada napravimo **meki limes** (eng. **soft limit**), tj. pretpostavimo

$$|k \cdot p_i| \ll |p_j \cdot p_k| \quad \text{za sve vanjske 4-impulse vanjskih linija } p_j, p_k$$

U najnižem redu mekog limesa očito vrijedi:

$$\mathcal{M}_i(p_i, k) \approx q_i \frac{(p_i \cdot \varepsilon^*)}{(p_i \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_i)$$

Vezanje na izlaznu liniju:

Potpuno ista vrsta razmatranja daje da u slučaju vezanja fotona na izlaznu vanjsku liniju čestice materije mase m_f , naboja q_f i 4-impulsa p_f doprinos pripadnih Feynmanovih dijagrama amplitudi $\mathcal{M}$ ima oblik

$$\mathcal{M}_f(p_f, k) = -q_f \frac{(2p_f + k) \cdot \varepsilon^*}{(p_f + k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p_f + k) = -q_f \frac{(p_f \cdot \varepsilon^*)}{(p_f \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_f + k)$$

što u mekom limesu daje

$$\mathcal{M}_f(p_f, k) \approx -q_f \frac{(p_f \cdot \varepsilon^*)}{(p_f \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_i)$$

Vezanje na unutarnju liniju ili unutarnji čvor:

Uočite da su doprinosi od vezanja na vanjske linije singularni u limesu $k \rightarrow 0$ zbog faktora $(p_f \cdot k)$ u nazivniku. Vezanje fotona na unutarnju liniju ne može generirati singularnost u limesu $k \rightarrow 0$ jer su unutarnje linije off-shell ($p^2 \neq m^2$). Slično vrijedi za spajanje linije na neki postojeći čvor.¹⁵ To znači da je doprinos Feynmanovih dijagrama u kojima je dodatni foton vezan na unutarnju liniju ili čvor **zanemariv** u mekom limesu.

Uzimajući u obzir sve Feynmanove dijagrame dobijamo da je amplituda $\mathcal{M}$ u mekom limesu dana s

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{M}_0 \left(\sum_i q_i \frac{p_i \cdot \varepsilon^*}{p_i \cdot k} - \sum_f q_f \frac{p_f \cdot \varepsilon^*}{p_f \cdot k} \right) \quad (4.8.1)$$

gdje prva suma ide po svim ulaznim česticama, a druga suma po svim izlaznim česticama.

Sad je vrijeme da iskoristimo invarijantnost amplitude $\mathcal{M}$ na Lorentzove transformacije,

$$\mathcal{M}'(p', k', \varepsilon') = \mathcal{M}(p, k, \varepsilon)$$

Kao što smo vidjeli u odjeljku 4.6.5, na Lorentzove transformacije koje pripadaju maloj grupi od k vektor polarizacije se transformira tako da dobije longitudinalni doprinos:

$$\varepsilon_\mu(k) \longrightarrow \varepsilon'_\mu(k) = \varepsilon_\mu(k) + a k_\mu$$

Kombiniranje ovoga s (4.8.1) daje:

$$\mathcal{M}' \approx \mathcal{M} + a^* \mathcal{M}_0 \left(\sum_i q_i - \sum_f q_f \right)$$

Lorentz invarijantnost amplitude $\mathcal{M}$ očito zahtijeva

$$\sum_i q_i = \sum_f q_f$$

što nije ništa drugo nego zakon sačuvanja naboja, gdje je naboj koji nosi čestica j jednak konstanti vezanja čestice na foton, q_j .

U gornjem izvodu smo koristili da je čvor kojim se čestice vežu na foton jednak onom u elektrodinamici, no rezultat je puno općenitiji. Pretpostavimo da je vezanje fotona na česticu tipa j opisano čvorom kojem je pridružen faktor $ie_j \Gamma_\mu^{(j)}(p, k)$. Iz Lorentzove kovarijantnosti slijedi da funkcija $\Gamma_\mu^{(j)}$ mora biti oblika:

$$\Gamma_\mu^{(j)}(p, k) = 2p_\mu F^{(j)}(p^2, k^2, p \cdot k) + k_\mu G^{(j)}(p^2, k^2, p \cdot k) \quad (4.8.2)$$

gdje se neodređene funkcije F i G nazivaju **form faktori**. (U skalarnoj kvantnoj elektrodinamici je $F = G = 1$.) Pošto ćemo na čvor vezati fizikalni foton i fizikalnu česticu materije, iz $k \cdot \varepsilon = 0$ slijedi da u našem računu član s G

¹⁵Na primjer, u skalarnoj elektrodinamici mogli bi vezati meki foton na čvor tipa $\varphi^* \varphi A$ tako da ga zamijenimo čvorom tipa $\varphi^* \varphi A A$.

neće doprinositi i možemo ga odmah odbaciti, a iz $p^2 = m^2$ i $k^2 = 0$ slijedi da će F efektivno biti samo funkcija od $p \cdot k$. Pošto je k tome F bezdimenzionalan, za potrebe našeg računa možemo uzeti

$$\Gamma_\mu^{(j)}(p, k) \longrightarrow 2p_\mu F^{(j)}\left(\frac{p \cdot k}{m^2}\right) \quad (4.8.3)$$

Ako ponovimo sada prijašnji račun za vezanje mekog fotona na ulaznu spin-0 česticu, samo sada s općenitim čvorom (4.8.3), dobijamo:

$$\mathcal{M}_i(p_i, k) \approx e_i F^{(i)}(0) \frac{(p_i \cdot \varepsilon^*)}{(p_i \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_i)$$

Ovdje pretpostavljamo da je limes $F^{(i)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F^{(i)}(x)$ konačan, tj. da niti iščezava niti divergira.

Za vezanje na izlaznu liniju materije bi dobili:

$$\mathcal{M}_f(p_f, k) \approx -e_f F^{(f)}(0) \frac{(p_f \cdot \varepsilon^*)}{(p_f \cdot k)} \mathcal{M}_0(p_f)$$

Vidimo da ako definiramo **efektivni** (ili **renormalizirani**) naboj čestice j kao

$$q_j \equiv e_j F^{(j)}(0)$$

da su dobijeni izrazi potpuno isti kao u skalarnoj elektrodinamici. Stoga ponavljanje procedure sumiranja po svim vanjskim linijama i nametanja Lorentz invarijantnosti daje i isti uvjet

$$\sum_i q_i = \sum_f q_f$$

Dobijamo da je ukupni renormalizirani naboj sačuvan. Kao što smo napomenuli, ovaj rezultat se može generalizirati na relativističke teorije s proizvoljnim sektorom materije (proizvoljnog spina) pa vrijedi **općeniti** zaključak:

Bezmasene spin-1 čestice u relativističkim teorijama impliciraju sačuvanje naboja.

Prva reakcija na gornji teorem bi mogla biti da to već znamo otprije. No, u prijašnjim konstrukcijama smo uvijek koristili neke dodatne zahtjeve vezane uz jednostavnu lagranžijansku formulaciju i/ili baždarnu invarijantnost. Uočite da smo u gornjem izvodu koristili **samo Lorentz kovarijantnost teorije i neka elementarna svojstva regularnosti međudjelovanja**. *Konačni teorem daje jaku eksperimentalnu predikciju koja vrijedi za široku klasu teorija, i u tom smislu je sličan spin-statistika i CPT teoremima (koje ćemo razmotriti kasnije).*

Kombiniranjem mekog limesa i Lorentz kovarijantnosti mogu se dobiti dodatne informacije o teoriji i strukturi međudjelovanja. Na primjer, može se pokazati da za spin-0 česticu osim čvora tipa $q\varphi^*\varphi A$ mora postojati čvor tipa $q^2\varphi^*\varphi AA$, i to s relativnim faktorom kakav je prisutan u skalarnoj elektrodinamici.

4.8.2 Spin-2 i princip ekvivalencije

Na ovom kolegiju uglavnom smo se ograničili na polja i čestice spinova 0, 1/2 i 1. Ovdje ćemo u prolazu spomenuti važne teoreme koji se dobiju primjenom mekog limesa u slučaju kad bezmasena čestica ima spin ≥ 2 .¹⁶

U slučaju spin-2 čestice može se pokazati da analiza mekog limesa vodi na uvjet:

$$\sum_i \kappa_i p_i^\mu = \sum_f \kappa_f p_f^\mu \quad (4.8.4)$$

¹⁶Potpuni dokazi se mogu naći u udžbeniku Schwartza ili Weinberga Vol. 1.

gdje je κ_j konstanta vezanja čestice j na spin-2 česticu, koja se definira kao pripadni form faktor u mekom limesu $k \rightarrow 0$. Pošto su impulsi kontinuirane varijable ograničene samo uvjetom sačuvanja ukupnog impulsa $\sum_i p_i = \sum_f p_f$, jedini način na koji gornji uvjet može biti ispunjen u netrivialnoj (tj. interagirajućoj teoriji u kojoj postoje raspršenja) je u slučaju kad se sve čestice vežu na jednak način na spin-2 česticu, tj. kad su svi κ_j jednaki,

$$\kappa_j = \kappa \quad , \quad \forall j$$

U tom slučaju se uvjet (4.8.4) svodi na uvjet sačuvanja 4-impulsa (koje je posljedica translacijske invarijantnosti u prostor-vremenu).

Zaključak u jednoj rečenici je:

Vezanje na bezmasenu spin-2 česticu je univerzalno.

Oprezni čitalac se na ovom mjestu vjerojatno zapitao "što ako form faktor iščezava u mekom limesu, tj. $\kappa_j = 0$ za sve čestice. Može se pokazati da takvo vezanje ne može dati Coulombovsku silu na velikim udaljenostima, tj. nužno vodi na sile kratkog dosega.

Ovaj teorem ima jake posljedice na opis gravitacijskog međudjelovanja. Einsteinova opća teorija relativnosti, koja je utemeljena na **principu ekvivalencije** (postulatu da se sva materija jednako veže na gravitacijsko polje), kaže da su gravitacijski valovi u ravnom prostor-vremenu bezmaseni i da imaju spin-2. Gornji teorem je neka vrsta obrata ove tvrdnje. Naime, teorem nam govori da ako je gravitacija, barem u niskoenergetskom limesu, opisana relativističkom kvantnom teorijom s bezmasenom spin-2 česticom, na način da u Newtonovskom limesu sila između masivnih čestica ima Coulombov oblik, tada **vezanje mora zadovoljavati princip ekvivalencije**. Vidimo da relativnost i kvantna fizika u određenom smislu vode na nužnost opisa gravitacije na niskim energijama putem principa opće relativnosti.

4.8.3 Problemi sa spinom > 2

Možemo se zapitati koje uvjete nameće Lorentz kovarijantnost u prisustvu bozonskih bezmasenih čestica sa spinom većim od 2. U slučaju spin-3 čestice može se pokazati da ponavljanje mekog limesa vodi na uvjet:

$$\sum_i g_i p_i^\mu p_i^\nu = \sum_f g_f p_f^\mu p_f^\nu$$

gdje je g_j konstanta vezanja čestice j na bezmasenu spin-3 česticu, definirana ponovo kao meki limes pripadnog form faktora. Ukoliko su form faktori neiščezavajući u tom limesu, gornju jednadžbu je nemoguće zadovoljiti ako želimo da u teoriji postoje netrivialna raspršenja koja uključuju spin-3 česticu. Isti zaključak slijedi za sve bezmasene bozonske spin > 2 čestice. Posljedica je prilično dramatičan teorem:

U relativističkim teorijama ne mogu postojati bezmasene čestice spina većeg od 2 koje posreduju međudjelovanja neograničenog dosega.

Ovo je jedna vrlo jaka predikcija specijalne relativnosti, koja nameće značajna ograničenja na postojanje čestica spina 3 ili većeg i njihova međudjelovanja. Pošto postoje i neki drugi teoremi koji zabranjuju postojanje čestica spina većeg od 2, činjenica da ovakve čestice još nisu viđene se katkad tumači kao potvrda principa specijalne relativnosti. No, pri takvim razmišljanjima treba imati na umu da svi ti teoremi sadrže, pored specijalne relativnosti, neke dodatne pretpostavke pa treba biti oprezan u iščitavanju posljedica teorema.

4.9 Higgsov mehanizam

S obzirom da u skalarnoj elektrodinamici postoje skalarna polja, možemo razmotriti varijantu teorije u kojoj postoji spontani lom baždarnе (tj. lokalne) simetrije. To možemo jednostavno postići tako da u lagranžijanu skalarne elektro-

dinamike (4.7.1) dodamo φ^4 član i dopustimo da parametar m^2 bude negativan. Dobijamo teoriju s lagranžijanom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu + iqA_\mu)\varphi^\dagger(\partial^\mu - iqA_\mu)\varphi - m^2\varphi^\dagger\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \quad (4.9.1)$$

gdje ćemo uzeti da je $\lambda > 0$, jer pozitivnost energije nalaže $\lambda \geq 0$. Nakon dodavanja novog interakcijskog člana teorija ostaje invarijantna na lokalnu $U(1)$ grupu simetrija danu transformacijama:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{iq\chi(x)}\varphi(x) \quad , \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi(x) \quad (4.9.2)$$

gdje je $\chi(x)$ proizvoljna glatka realna funkcija.

U odsustvu elektromagnetskog međudjelovanja ($q = 0$) gornja teorija se sastoji od dva odvojena sektora (između kojih ne postoji međudjelovanje) – jedan sadrži bezmaseno spin-1 slobodno $U(1)$ baždarno realno polje A_μ , a drugi kompleksno spin-0 polje φ u kojem postoji globalna $U(1)$ simetrija dana s

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{iq\chi}\varphi(x)$$

gdje je χ realna konstanta. Uočite da je spin-0 sektor u ovom slučaju jednak modelu spontanog loma globalne $SO(2)$ simetrije koji smo analizirali u odjeljku 2.5.3 (linearni sigma model (2.5.10) s $N = 2$). To se vidi ako s kompleksnog polja φ pređemo na realna polja φ_1 i φ_2 definirana s¹⁷

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \quad , \quad \varphi(x)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] \quad (4.9.3)$$

Analiza iz odjeljka 2.5.3 nam stoga kaže da za $q = 0$ i $m^2 < 0$, osim jedne bezmasene spin-1 čestice (foton) postoji jedna bezmasena spin-0 čestica (Goldstoneov bozon spontano slomljene $SO(2)$ globalne simetrije) i jedna masivna spin-0 čestica (svaka čestica je sama sebi antičestica). Sad ćemo pokazati da za $q \neq 0$ slika izgleda bitno drukčije.

Klasični potencijal teorije (4.9.1) je dan s

$$\mathcal{V} = m^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 - q^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi$$

To znači da se rješenja za konstantna polja, $\varphi(x) = \varphi$, dobiju rješavanjem jednažbi

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi} = 0 \quad \implies \quad \varphi^* (\lambda\varphi^*\varphi + m^2 - q^2A_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.9.4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial A^\mu} = 0 \quad \implies \quad q^2A_\mu\varphi^*\varphi = 0 \quad (4.9.5)$$

Rješenja koja su ujedno i globalni minimumi potencijala predstavljaju vakuume klasične teorije, koje ćemo označiti s $\bar{\varphi}$, $\bar{A}_\mu$. Uočite da (4.9.5) nameće da ili φ ili A_μ mora iščezavati za konstantna rješenja. Pošto nas ovdje ne zanima mogućnost spontanog loma Lorentzove simetrije, uzet ćemo da je $\bar{A}_\mu = 0$.¹⁸ Stoga se rješavanje sustava (4.9.4)-(4.9.4) svodi na rješavanje jednažbe

$$\varphi^* (\lambda\varphi^*\varphi + m^2) = 0 \quad (4.9.6)$$

što znači da je analiza vakuuma potpuno jednaka kao za $q = 0$ slučaj, što smo već napravili u odjeljku 2.5.3, pa možemo prepisati rezultate.

U slučaju $m^2 > 0$ postoji samo jedno rješenje jednažbe koje ujedno daje vakuum teorije, $\bar{\varphi} = 0$. Iz ovoga očito slijedi da je čestični sastav teorije jednak onom "obične" skalarne QED – bezmaseni jedan spin-1 foton i jedna spin-0 čestica i njena antičestica (klasične mase jednake m).

¹⁷Ukoliko vas zbunjuje da ovdje govorimo o $U(1)$ grupi, a u odjeljku 2.5.3 smo govorili o $SO(2)$ grupi, uočite da su ove dvije grupe matematički identične, $U(1) = SO(2)$.

¹⁸Čitatelj se može zapitati da li u slučaju kad je $\bar{\varphi} = 0$ konstantne konfiguracije s $A_\mu \neq 0$ mogu ipak nekako biti važna, npr. kroz integral po stazama u kvantnoj teoriji. Sjetimo se da u definiciju teorije polja ulazi i pretpostavka o ponašanju polja za $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Stoga, ako pretpostavimo $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_\mu(t, \mathbf{x}) = 0$ onda konstantna polja s $A_\mu \neq 0$ ne mogu igrati nikakvu ulogu.

Pređimo sada na zanimljiviji slučaj $m^2 < 0$. Analiza iz odjeljka 2.5.3 nam govori da jednačba (4.9.6) pored rješenja $\varphi = 0$ (koje je lokalni maksimum) posjeduje beskonačno rješenja koja su vakuumi teorije i koja zadovoljavaju

$$|\bar{\varphi}| = \sqrt{\frac{|m^2|}{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \bar{A}_\mu = 0$$

Očito je da su vakuumi povezani globalnom $U(1)$ simetrijom koja djeluje na način $\varphi \rightarrow \exp(i\alpha)\varphi$ (gdje je α konstantan) i da su svi ekvivalentni. U ovom režimu vidimo da postoji **spontani lom lokalne simetrije**. Sad trebamo odabrati jedan vakuum i u tu svrhu ćemo uzeti $\bar{\varphi} = v$ i definirati dva nova realna skalarna polja $\pi(x)$ i $\sigma(x)$ u odnosu na ovaj vakuum, tako da je

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \sigma(x) + i\pi(x)] \quad , \quad (4.9.7)$$

Uvrštavanje (4.9.7) u (4.9.1) daje lagranžijan izražen pomoću novih polja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{\lambda v^2}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 + \frac{\lambda v^4}{8} - \frac{qv}{2}A^\mu\partial_\mu\pi + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (4.9.8)$$

gdje se $\mathcal{L}_{\text{int}}$ sastoji od kubnih i kvartičnih članova u poljima i njihovim derivacijama i stoga određuje međudjelovanja. Treba uočiti da drugi član s desne strane u jednakosti (4.9.8) kaže da **foton posjeduje masu** iznosa $m_\gamma = |q|v$. Ovu iznenađujuću pojavu vrijedi posebno istaknuti

Spontani lom simetrije čini pripadni baždarni bozon masivnim.

Ovaj rezultat je od izuzetne važnosti, pa ćemo zastati na trenutak da ga prokomentiramo. Vidjeli smo da u elektrodinamici, što znači u svim Abelovim baždarnim teorijama, ne možemo baždarnom bozonu generirati masu na standardni način dodavanjem člana $m_\gamma^2 A^2$ u lagranžijan (npr. u (4.9.1)), jer taj član eksplicitno narušava baždarnu simetriju. Ovo vrijedi i za neabelove, tj. za sve, baždarne teorije. Eksplicitno narušavanje baždarne simetrije u pravilu nije poželjno iz sljedećih razloga: (1) u kvantiziranoj teoriji često vodi na patologije poput narušenja unitarnosti i/ili Lorentzove simetrije, (2) dodavanje masenog člana čini teoriju **nerenormalizabilnom**,¹⁹ (3) simetrije se često pokazuju ključnima pri konstrukciji teorija, i obično ih se ne želimo riješiti samo tako. U stvari, do sredine 60-tih godina 20. stoljeća ovi razlozi su bili prepreka za konstrukciju teorijskog modela slabih međudjelovanja. Otkriće Higgsovog mehanizma, koji izbjegava sve gornje probleme, 1964. godine razbilo je ovu blokadu i omogućilo je Weinbergu i Salamu da već 1967. godine u potpunosti formuliraju opis slabih međudjelovanja, poznat pod nazivom Glashow-Salam-Weinberg (GSW) teorija, koji čini sastavni dio Standardnog modela fizike elementarnih čestica.

Vratimo se sada na razmatranje izraza (4.9.8). Površnom inspekcijom mogli bi zaključiti da postoji bezmaseno polje π , no ovaj zaključak je preuranjen zbog postojanja miješanog kvadratnog člana $A^\mu\partial_\mu\pi$. Da bi mogli govoriti o masi polja moramo se prvo riješiti svih miješanih kvadratnih članova u lagranžijanu, što se postiže redefinicijom polja. Najelegantniji način za napraviti to je prisjetiti se da je naša teorija baždarna teorija polja, što znači da možemo pokušati iskoristiti slobodu odabira baždarenja za postizanje cilja. Jedno očito baždarenje koje ostvaruje naš cilj je dano s:

$$\varphi_2(x) = 0 \quad \implies \quad \pi(x) = 0 \quad (4.9.9)$$

U sljedećem zadatku dokazuje se da je ovaj odabir baždarenja regularan, tj. da za svaki odabir polja $\phi(x)$ možemo baždarnom transformacijom (4.9.2) postići da vrijedi (4.9.9).

Vježba 4.9.1: Dokažite da je (4.9.2) regularan baždarni uvjet.

¹⁹Ovo je posljedica činjenice da se u limesu $k \rightarrow \infty$ propagator masivne spin-1 čestice ponaša kao $D_F(k) \sim k^0$, za razliku od bezmasene spin-1 čestice gdje je to $D_F(k) \sim k^{-2}$. To dovodi do povećanje stupnja divergencije dijagrama s petljama, što vodi na nerenormalizabilnost.

Rješenje: Ono što moramo pokazati je da za proizvoljno polje $\varphi(x)$ postoji baždarna transformacija (4.9.2) koja čini imaginarni dio transformiranog polja $\varphi'(x)$ jednak nula, što znači $\varphi'_2 = 0$. Nije teško zaključiti da će ovaj posao obaviti baždarna transformacija s parametrom $\chi(x)$ danim s:

$$\chi(x) = -\frac{1}{q} \arctan \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

gdje su φ_1 i φ_2 su definirani u (4.9.3). Uvrštavanje u (4.9.2) daje

$$\varphi'_2 = \varphi_2 \cos \left(\arctan \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right) - \varphi_1 \sin \cos \left(\arctan \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right) = 0$$

iz čega slijedi

$$\pi'(x) = \varphi'_2(x) = 0$$

što smo željeli postići.

Uvrštavanje (4.9.9) u (4.9.8) daje

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{\lambda v^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda v^4}{8} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (4.9.10)$$

gdje je $\mathcal{L}_{\text{int}}$ dan s:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q^2v\sigma A_\mu A^\mu + \frac{q^2}{2}\sigma^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda v}{2}\sigma^3 - \frac{\lambda}{8}\sigma^4 \quad (4.9.11)$$

Iz (4.9.10) možemo zaključiti da se spontano slomljena teorija sastoji od masivnog polja spina-1 ("masivni foton") i jednog masivnog skalarnog polja, $\sigma(x)$, mase $m_\sigma = v\sqrt{\lambda}$. **Više ne postoji Goldstoneov bozon.** Polje $\pi(x)$, za koje smo mogli očekivali da će igrati tu ulogu je naprosto nestalo iz igre.

Da ne bi bilo zabune, naglasimo da je lagranžijan (4.9.10)-(4.9.11) potpuno ekvivalentan lagranžijanu (4.9.1), u smislu da **oba opisuju potpuno isti fizikalni sustav** – sve što smo uradili da bi dobili (4.9.10) je da smo prešli na polja koja opisuju fluktuacije oko jednog odabranog vakuuma teorije i odabrali jedan spretan baždarni uvjet. U postupku smo žrtvovali manifestnu simetriju u korist transparentnog fizikalnog sadržaja. No, simetrije teorije se nisu izgubile, one su i dalje prisutne i igraju važnu ulogu za svojstva teorije (između ostalog utječu na odnose između masa i konstanti vezanja u (4.9.10) i (4.9.11)), posebno prilikom kvantizacije teorije svojstva renormalizabilnosti.

Važno je uočiti da je broj nezavisnih fizikalnih stupnjeva slobode ostao isti – naime, u slučaju kad nema loma simetrije teorija posjeduje jedno bezmaseno spin-1 polje (2 spinska stupnja slobode) i jedno kompleksno skalarno polje ($1 + 1 = 2$ spinska stupnja slobode), dakle sve skupa 4 fizikalna spinska stupnja slobode, dok u slučaju spontanog loma baždarne simetrije teorija posjeduje jedno masivno spin-1 polje (3 spinska stupnja slobode) i jedno realno skalarno polje (1 spinski stupanj slobode), sve skupa 4 fizikalna spinska stupnja slobode. Ono što se u spontanom lomu baždarne simetrije dogodilo, i naziva se **Higgsov mehanizam**, može se sažeto opisati na sljedeći način:

Higgsov mehanizam: U spontanom lomu **lokalne** simetrije pripadni baždarni bozon postaje masivan, i time stječe jedno dodatno fizikalno spinsko stanje, tako što "pojede" nesuđeni Goldstoneov bozon.

Odabir baždarenja (4.9.9) je osigurao da se u lagranžijanu nalaze samo fizikalni stupnjevi slobode, odnosno fizikalna polja. Takva baždarenja se općenito nazivaju **unitarna baždarenja**.

Zadatak 4.9.2: Dokažite (4.9.11).

Izvod Higgsovog mehanizma koji smo napravili je u potpunosti klasičan. Kako znamo da kvantizacija ne narušava opisano ponašanje teorije? Kao i u slučaju spontanog loma globalne simetrije, u slučaju kvantizirane teorije sve što trebamo napraviti je umjesto klasične akcije uzeti kvantnu efektivnu akciju i pretpostaviti da kvantizacija ne narušava baždarnu simetriju. Dokaz Higgsovog mehanizma potom slijedi klasični dokaz.

U stvarnosti, postoje teorije u kojima kvantizacija vodi na narušenje baždarnih simetrija putem tzv. **kvantnih anomalija**. No, pokazuje se da takva narušenja baždarnih simetrija obično imaju pogubne posljedice za zdravlje takvih teorija, u smislu da nisu prihvatljive kao kvantne teorija polja jer se prilikom kvantizacije na mogu zadovoljiti osnovna svojstva poput unitarnosti ili Lorentz kovarijantnosti. Kao posljedica, teorije u kojima kvantizacija narušava baždarnu simetriju u pravilu nemaju nikakvu fizikalnu primjenu.

4.9.1 Supravodljivost. Ginzburg–Landau teorija

Model Higgsovog mehanizma razmatran u prošlom odjeljku može se primijeniti za modeliranje **supravodljivosti**, pojave u kojoj neki materijali na dovoljno niskim temperaturama vode električnu struju praktički bez otpora. Pokazat ćemo da glavna svojstva supravodiča neposredno slijede iz sljedeće tvrdnje:

Supravodljivost je posljedica spontanog loma elektromagnetske $U(1)$ baždarnu simetrije.

Čitatelja na ovom mjestu može zbuniti sljedeće razmišljanje – u vodičima, a pogotovo onima koji pokazuju svojstva supravodljivosti, primarni nosioci naboja su uglavnom (vodljivi) elektroni, koji su spin-1/2 fermionske čestice pa bi mogli očekivati da u opisu supravodljivosti ključnu ulogu moraju igrati fermionska polja (koja još nismo razmatrali). Pokazuje se da ovo naivno očekivanje nije točno. Efektivni opis putem spin-0 bozonskog polja je opravdan Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) teorijom, po kojoj međudjelovanje s fononima (kvanti titranja rešetke) pod određenim uvjetima uzrokuje **privlačnu silu** među elektronima. Uslijed ove sile elektroni se vežu u spin-0 parove naboja jednakog $q = -2e$, što vodi na efektivni opis sustava vodljivih elektrona pomoću kompleksnog skalarnog polja $\varphi(x)$ naboja $q = -2e$ vezanog na elektromagnetsko polje. Mi se nećemo ovdje baviti izvedom BCS teorije, već ćemo preuzeti glavne posljedice i vidjeti kamo nas to vodi koristeći naše znanje o (kvantnoj) teoriji polja i spontanom lomu lokalne simetrije.

BCS teorija nam stoga kaže da pod navedenim okolnostima vodljive elektrone možemo opisati efektivnom kvantnom teorijom polja čiji je lagranžijan jednak onom u (4.9.1) s $q = -2e$ plus (mogući) članovi višeg reda. Pošto nas zanima termodinamički opis sustava moramo izračunati kvantnu efektivnu akciju na konačnoj temperaturi T , što vodi na to da parametri u kvantnoj efektivnoj akciji postaju funkcije od T . Račun, koji ovdje nećemo napraviti nego ga samo preuzeti, pokazuje da je dominantni učinak u našoj teoriji na parametar $m^2(T)$, za koji se dobije da je rastuća funkcija od T .²⁰ Nas će zanimati situacija u kojoj postoji kritična temperatura T_c na kojoj je $m^2(T_c) = 0$.²¹ U tom slučaju za $T \approx T_c$ u generičkom slučaju vrijedi

$$m^2(T) \approx a(T - T_c) \quad , \quad a > 0 \quad (4.9.12)$$

Kratko rečeno, BCS teorija nam kaže da u nekim materijalima pod određenim okolnostima vodljive elektrone u termičkoj ravnoteži možemo opisati kvantnim efektivnim lagranžijanom (koji ujedno daje gustoću Gibbsove slobodne energije) približno danim s (4.9.1) i $q = -2e$, gdje je $m^2(T)$ strogo rastuća funkcija od T (što je čista posljedica kvantizacije polja na konačnoj temperaturi) i gdje postoji temperatura T_c u čijoj okolini vrijedi (4.9.12).

Pronađimo sada vakuume ove teorije. Pošto se radi o istoj akciji analiziranoj u prethodnom odjeljku, možemo doslovno prepisati rezultate. Oni nam kažu da postoje dva različita režima, odnosno dvije različite **faze** sustava:

²⁰Naravno, kvantna efektivna akcija u odnosu na (4.9.1) ima dodatne članove koji dolaze od kvantnih korekcija, a koji su višeg reda u derivacijama i/ili potencijama polja. Sve ove dodatne članove, bez obzira na njihovo porijeklo (klasično, kvantno ili termalno) ćemo zanemariti u našoj analizi, što je opravdano ukoliko nas zanimaju male fluktuacije polja oko vakuuma koje su pored toga sporopromjenjive funkcije u prostor-vremenu.

²¹Postojanje kritičke točke mora biti opravdano mikroskopskim modelom. U slučaju supravodljivosti BCS teorija daje opravdanje.

1. $T > T_c$: Ovdje je $m^2 > 0$, što znači da su u vakuumu, tj. u termodinamičkoj ravnoteži, očekivane vrijednosti polja dane s $\bar{\varphi} = 0$ i $\bar{A}_\mu = 0$. Za dovoljno visoke temperature vakuum je jedinstven i pobuđenja se sastoje od masivne spin-0 čestice mase $m_\varphi = \sqrt{m^2}$, njene antičestice i jednog bezmasenog spin-1 fotona.
2. $T < T_c$: Ovdje je $m^2 < 0$, pa stoga očekivana vrijednost od φ zadovoljava

$$|\bar{\varphi}| = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \approx \sqrt{\frac{a}{\lambda}(T - T_c)}$$

Za dovoljno niske energije imamo spontani lom simetrije i pobuđenja se sastoje od jedne masivne spin-0 čestice i jednog masivnog spin-1 fotona, čije mase su dane s:

$$m_\sigma = \sqrt{2|m^2|} \approx \sqrt{2a(T_c - T)} \quad , \quad m_\gamma = e \sqrt{\frac{8|m^2|}{\lambda}} \approx e \sqrt{\frac{8a}{\lambda}(T_c - T)}$$

Iz toga možemo zaključiti da se na temperaturi T_c zbiva **fazni prijelaz** i to **druge vrste** jer se parametar uređenja $\bar{\phi}$ kontinuirano mijenja kako prelazimo preko kritične točke T_c . Uočite da su u kritičnoj točki $T = T_c$ sva pobuđenja bezmasena i kvantna efektivna akcija ne sadrži dimenzionalne parametre. To znači da je teorija je invarijantna na promjenu skale (eng. *scale invariance*). Gornja teorija je poznata kao **Ginzburg–Landau teorija** i ima širu primjenu od supravodljivosti.

Razmotrimo sada sustav u stacionarnim uvjetima, u prisustvu vremenski konstantnih vanjskih polja koja su spopromjenjiva u prostoru. Sačuvana struja, koja se dobije iz (4.6.30), je dana s

$$\mathbf{j} = 2ie(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) - 8e^2 |\varphi|^2 \mathbf{A}$$

U slučaju $T < T_c$ i kad je $\varphi(x)$ slabo promjenjiva funkcija, tj. derivacije su "male", drugi član dominira nad prvim i dobijamo

$$\mathbf{j} \approx -k^2 \mathbf{A} \quad , \quad k^2 \equiv \frac{8e^2 |m^2|}{\lambda} \quad (4.9.13)$$

gdje je očito $k^2 > 0$ pa je $k = \sqrt{k^2}$ pozitivna realna konstanta. Dobili smo tzv. **Londonovu jednadžbu**. Pošto će u slučaju kad imamo vanjsko magnetsko polje, vektorski potencijal $\mathbf{A}$ unutar vodiča općenito biti neiščezavajući (kao posljedica rubnih uvjeta), vidimo da Londonove jednadžbe govori da će u ovakvom vodiču teći električna struja čim postoji vanjsko magnetsko polje.

Ovo ima jednu važnu neposrednu posljedicu. Pošto ovdje govorimo o dobrim vodičima, znamo da u stacionarnim uvjetima u unutrašnjosti vodiča vrijedi $\rho(\mathbf{x}) = 0$ i stoga $A^0(\mathbf{x}) = \text{konst.}$ Električno polje je stoga dano s $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$, pa primjena Ohmovog zakona $\mathbf{E} = R \mathbf{j}$ (koji općenito vrijedi za dobre vodiče), gdje je R električna otpornost materijala, i činjenice da je $\mathbf{j} \neq 0$ u prisustvu vanjskog magnetskog polja, daje

$$R = 0$$

što je definicija supravodljivosti. Dobili smo da je vodič u fazi s spontanom lomom simetrije, tj. za $T < T_c$, supravodič.

Razmotrimo sada magnetsko polje u supravodiču. Djelovanjem s $\nabla \times$ na Ampereovu jednadžbu $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$, te korištenjem $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ i Londonove jednažbe (4.9.13), dobijamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{j} \quad \implies \quad \nabla^2 \mathbf{B} = k^2 \mathbf{B} \quad (4.9.14)$$

Čisto matematički gledano, opće rješenje je dano linearnom superpozicijom rješenja

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 e^{\pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad , \quad |\mathbf{k}| = k = e \sqrt{\frac{8|m^2|}{\lambda}}$$

gdje desna jednakost dolazi od Maxwellove jednadžbe $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Osim rješenja $\mathbf{B} = 0$ sva druga rješenja imaju eksponencijalnu ovisnost. Zahtjev fizikalnosti nam kaže da rješenja koja eksponencijalno rastu unutar supravodiča nemaju smisla i treba ih odbaciti. Npr. ukoliko je $z = 0$ granična ravnina, tako da je vakuum u $z < 0$ a supravodič u $z > 0$ dijelu prostora, tada su jedina fizikalno prihvatljiva rješenja dana s

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_0 e^{-kz}, \quad \mathbf{B}_0 \cdot \hat{z} = 0 \quad (4.9.15)$$

Vidimo da magnetsko polje može penetrirati supravodič do karakteristične dubine d , dane s

$$d = \frac{1}{k} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\lambda}{8|m^2|}} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\lambda}{8a}} (T_c - T)^{-\frac{1}{2}}$$

što znači da "duboko" u supravodiču magnetsko polje iščezava, $\mathbf{B} \approx 0$. Ova pojava poznata je pod imenom **Meissnerov efekt**.

Meissnerov efekt: Supravodič istiskuje silnice magnetskog polja iz svoje unutrašnjosti.

Treba uočiti da je Meissnerov efekt direktna posljedica masivnosti fotona u Higgsom mehanizmu spontanog loma baždarne simetrije. U režimi malih fluktuacija oko vakuuma, u kojem možemo zanemariti doprinos $\mathcal{L}_{\text{int}}$ u (4.9.10), elektromagnetsko polje zadovoljava jednadžbu

$$\square A^\mu + m_\gamma^2 A^\mu = 0, \quad m_\gamma = |q|v = e \sqrt{\frac{8|m^2|}{\lambda}} = k$$

Eksponencijalno trnjenje magnetskog polja u supravodiču ima jednak uzrok kao eksponencijalno trnjenje Yukawa potencijala – prijenosnik međudjeovanja je masivan i inverz njegove mase određuje doseg sile, odnosno dubinu penetracije polja, putem relacije $d = 1/m_\gamma$.

4.10 Spinori i spinorna polja

Vidjeli smo da se polja pridružena česticama cjelobrojnog spina s mogu dobiti iz tenzorskih polja $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}(x)$. No, iz analize unitarnih reprezentacija Poincaréove grupe slijedi da postoje čestice polucjelobrojnog spina, čije postojanje vidimo i u prirodi. Pitanje je kako konstruirati polja pridružena česticama polucjelobrojnog spina? Zadržat ćemo se na česticama spina 1/2 jer su najvažnije (sektor "materije" u Standardnom modelu fizike čestica je izgrađen isključivo od spin 1/2 čestica), no procedura se jednostavno generalizira na više spinove (npr. na čestice spina 3/2 koje se pojavljuju u teorijama supergravitacije).

4.10.1 Jednostavni izvod Diracove jednadžbe analogijom iz nerelativističke kvantne mehanike

Najbrži "izvod" relativističke jednadžbe koja opisuje spin-1/2 čestice ide putem analogije s nerelativističkom kvantnom mehanikom. Znamo da je hamiltonijan za slobodnu nerelativističku česticu mase m dan s:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (4.10.1)$$

Ako opisujemo spin 1/2 česticu, znamo da je pripadna valna funkcija dvokomponentni **spinor**:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}$$

Ako se takva čestica nalazi u magnetskom polju opisanom potencijalom $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ iz eksperimenta znamo da je hamiltonijan dan s

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (4.10.2)$$

gdje je $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dok su $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ Paulijeve matrice:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.10.3)$$

Hamiltonijan (4.10.2) nam sugerira da je “prirodni” zapis za H_0 umjesto (4.10.1) dan s:

$$H_0 = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} \quad (4.10.4)$$

U nerelativističkoj fizici to je potpuno isto kao (4.10.1) zbog postojanja identiteta (za dva proizvoljna operatorska vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$)

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (4.10.5)$$

jer uvrštavanje $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{p}$ daje $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$. Zašto je (4.10.4) prirodno? Zato što kad primijenimo pravilo za minimalno vezanje

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$$

na (4.10.4) dobijemo upravo (4.10.2). To slijedi iz:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})]^2 &= (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A})] = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - iq\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu koristili $\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p} = -i\nabla \times \mathbf{A} = -i\mathbf{B}$.

S obzirom da je u x - reprezentaciji $\mathbf{p} = -i\nabla$, to znači da u Schrödingerovoj jednadžbi treba napraviti supstituciju $\nabla^2 \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)^2$. Primijenimo to sada na valnu jednadžbu koja se dobije iz relativističkog izraza za energiju putem $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$:

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2 \implies (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0$$

što je naš “znanac” Klein-Gordonova jednadžba. Naivan pokušaj bi bio primijeniti supstituciju $\nabla^2 \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)^2$ no to očito neće dati relativističku jednadžbu jer se vrijeme tretira odvojeno od prostora. Stoga treba napisati izraz u formi u kojoj se derivacije po prostoru i vremenu prvo zbrajaju, a tek onda množe. Lako se vidi da se ta forma postiže jednadžbom:

$$[(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) + m^2]\phi(x) = 0 \quad (4.10.6)$$

Ova jednadžba, koja se naziva **van der Waerdenova jednadžba**, opisuje relativističku česticu **spina 1/2**. U slučaju slobodnog polja zbog $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)^2 = \nabla^2$ jednadžba se svodi na Klein-Gordonovu. Razlika nastaje ako postoji vanjsko elektromagnetsko polje $A_\mu(x)$ jer u tom slučaju treba primijeniti minimalno vezanje $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$ na (4.10.6), što ne daje Klein-Gordonovu jednadžbu u prisustvu vanjskog polja. Pokazat ćemo da je van der Waerdenova jednadžba ekvivalentna **Diracovoj jednadžbi**, koju ćemo malo kasnije izvesti iz općih principa Lorentz kovarijantnosti.

4.10.2 Lorentzova grupa detaljnije

Pošto je ključ u konstrukciji polja cjelobrojnog spina razumijevanje projektivnih konačnodimenzionalnih reprezentacija prave Lorentzove grupe $SO(1, 3)^+$, razmotrimo malo detaljnije ovu grupu i njenu Liejevu algebru. Za razumijevanje Liejeve algebre treba razmotriti ponašanje grupe u infinitezimalnoj okolini jediničnog elementa:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu, \quad |\varepsilon^\mu{}_\nu| \ll 1$$

Uvrštavanje u uvjet za Lorentzove transformacije daje:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} \implies \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

tj. infinitezimalne antisimetrične matrice generiraju pravu Lorentzovu grupu. Prostor takvih matrica je 6-dimenzionalan. Za bazu ovog prostora možemo odabrati 6 tenzora $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ danih s

$$(J_1)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (J_2)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (J_3)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_1)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (K_2)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (K_3)^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}$ i $\mathbf{K}$ čine bazu Liejeve algebre Lorentzove grupe, koja se naziva $\mathfrak{so}(1, 3)$.²² Opća prava Lorentzova transformacija infinitezimalno bliska jedinici može se parametrizirati sa 6 infinitezimalnih realnih brojeva $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ na način:

$$\varepsilon^\mu{}_\nu = i(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}^\mu{}_\nu)$$

Iz oblika generatora vidljivo je njihovo fizikalno značenje: $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} = \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{J}$ generira infinitezimalnu rotaciju za kut θ oko osi određene s jediničnim vektorom $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, dok $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} = \beta \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K}$ generira infinitezimalni boost rapiditeta β u smjeru jediničnog vektora $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Liejeva algebra je određena komutacijskim relacijama (u kojima je množenje naprosto matrično množenje)

$$[J_j, J_k] = i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} J_l, \quad [J_j, K_k] = i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} K_l, \quad [K_j, K_k] = -i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} J_l \quad (4.10.7)$$

gdje je ε_{jkl} potpuno antisimetrični Levi-Civita tenzor, koje se mogu provjeriti eksplicitnim računom.

Koristeći generatore možemo napisati **svaki** (ne samo infinitezimalno blizak jedinici) element prave Lorentzove grupe **jednoznačno** kao:

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$$

gdje su domene parametara dane s $0 \leq \theta_j < 2\pi$, $-\infty < \beta_j < \infty$, gdje ograničenje na θ_j dolazi od toga da je rotacija za 2π identitet u $SO(1, 3)$ grupi.

Katkad je praktično upakirati generatore $\mathbf{J}$ i $\mathbf{K}$ u antisimetrični **tenzorski** objekt definiran kao:

$$V^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10.8)$$

za koji se koristeći (4.10.7) lako može pokazati da zadovoljava sljedeće komutacijske relacije

$$[V^{\mu\nu}, V^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} V^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} V^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} V^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} V^{\nu\rho})$$

koje nam govore da se uistinu radi o Lorentz tenzoru ranga 2. Prave Lorentzove transformacije se onda mogu napisati kao:

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \exp(i\theta_{\mu\nu} V^{\mu\nu}), \quad \theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$$

²²Standardna je konvencija da se Liejeva algebra dane Liejeve grupe označava na isti način, uz jedinu razliku da se za grupu koriste velika slova a za pripadnu algebru mala slova u fraktur fontu.

4.10.3 Konačnodimenzionalne reprezentacije Lorentzove grupe

Kao što smo objasnili u odjeljku 4.2.3 (vidi (4.2.11)-(4.2.12)) Lorentz kovarijantnost traži da je prava Lorentzova grupa reprezentirana linearno na poljima, i da nas za ovu svrhu zanimaju konačnodimenzionalne i ireducibilne reprezentacije (IRREP) Liejeve algebre. U svrhu konstruiranja IRREP korisno je uvesti sljedeće linearne kombinacije generatora Lorentzove grupe:

$$J_j^\pm \equiv \frac{1}{2}(J_j \pm iK_j) \quad (4.10.9)$$

za koje iz (4.10.7) slijede komutacijske relacije

$$[J_j^+, J_k^+] = i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} J_l^+ \quad , \quad [J_j^-, J_k^-] = i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} J_l^- \quad , \quad [J_j^+, J_k^-] = 0 \quad (4.10.10)$$

Treba obratiti pažnju da generatori $J^\pm$ žive u kompleksificiranoj Liejevoj algebri $\mathfrak{so}(1, 3)$, $\mathfrak{so}(1, 3; \mathbb{C})$. Iz komutacijskih relacija (4.10.10) vidimo da je $\mathfrak{so}(1, 3; \mathbb{C})$ naprosto unija (direktna suma) dvije nezavisne algebre koje su identične algebri grupe $SO(3)$ (rotacije u 3-dimenzionalnom prostoru), tj. matematičkim žargonom

$$\mathfrak{so}(1, 3; \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \quad (4.10.11)$$

Pošto se može pokazati da su IRREP Lieve algebre $\mathfrak{so}(1, 3)$ identične onima kompleksificirane algebre $\mathfrak{so}(1, 3; \mathbb{C})$ (osim što su prve definirane na prostoru $\mathbb{R}$, a druge na prostoru $\mathbb{C}$), (4.10.11) nam govori da sve što trebamo je pronaći sve IRREP algebre $\mathfrak{so}(3)$ i napraviti sve moguće direktne sume. No, problem konstrukcija IRREP algebre $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ ste već prije riješili na kursu iz kvantne mehanike (prilikom analize angularnog momenta i spina) i znate da su u potpunosti karakterizirane jednim (polu)cjelim brojem $j \in \mathbb{N}^0/2$:

$$\text{IRREP } \mathfrak{so}(3) : \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

gdje je dimenzija IRREP tipa j jednaka $2j+1$. Iz toga i (4.10.11) slijedi da su IRREP Liejeve algebre prave Lorentzove grupe karakterizirane parom brojeva (A, B) gdje su $A, B \in \mathbb{N}^0/2$:

$$\text{IRREP } \mathfrak{su}(1, 3) : \quad (A, B) = (0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 0), (0, 1), \dots$$

$$\text{IRREP } \mathfrak{so}(3) : \quad s(\text{spin}) = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \oplus 1, 1, 1, \dots$$

U donjem redu su napisane IRREP od grupe rotacija generirane s $\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^-$, koje su karakterizirane spinom $s \in \mathbb{N}^0/2$, od kojih je sačinjena dana reprezentacija (A, B) . S obzirom da se radi o matematici identičnoj zbrajanju angularnih momenata u kvantnoj mehanici, znate da (A, B) sadrži spinove $s = |A - B|, |A - B| + 1, \dots, A + B - 1, A + B$.

Jednom kad smo za danu IRREP (A, B) konstruirali bazu Lieve algebre, čije elemente ćemo označiti s $\mathbf{J}_{(A, B)}$ i $\mathbf{K}_{(A, B)}$, pripadnu projektivnu reprezentaciju prave Lorentzove grupe konstruiramo eksponenciranjem:

$$\mathcal{D}^{(A, B)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}_{(A, B)} + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}_{(A, B)})$$

Što se tiče domene definicije parametara $\boldsymbol{\theta}$, može se pokazati da je u reprezentacijama s polucjelobrojnim spinom $((A+B)$ polucjelobrojno) rotacija za 2π jednaka (-1) , a tek rotacija za 4π ("dva puna kruga") daje identitet (jedinicu). Tako da će za takve reprezentacije gornja parametrizacija biti potpuna i jednoznačna ako domenu definiramo na način $0 \leq \theta_j < 4\pi$, $-\infty < \beta_j < \infty$. Reprezentiranje putem Liejeve algebre umjesto grupe automatski nam daje projektivne reprezentacije Lorentzove grupe.

Za dvije IRREP pripadna polja smo već razmatrali: $(0, 0)$ je reprezentirano na skalarnom polju $\varphi(x)$, a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na vektorskom polju $V_\mu(x)$. Sada ćemo se fokusirati na polja s polucjelobrojnim spinom i to prvenstveno na spin-1/2 polja.

4.10.4 Spinorne reprezentacije

Cilj je eksplicitno konstruirati reprezentacije $(\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \frac{1}{2})$ jer očekujemo da će polja na kojima su reprezentirane opisivati spin-1/2 čestice. Za to nam treba IRREP $\mathfrak{so}(3)$, što ste naučili na kursu iz napredne kvantne mehanike. Bazu dvodimenzionalne $j = 1/2$ reprezentacije možemo reprezentirati Paulijevim matricama σ , danim u (4.10.3), koje zadovoljavaju komutacijske relacije:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \sigma_l$$

Usporedbom s (4.10.10) vidimo da

$$\mathbf{J}^+ = \frac{\sigma}{2} \quad , \quad \mathbf{J}^- = 0 \quad \implies (\tfrac{1}{2}, 0)$$

dok za odabir

$$\mathbf{J}^+ = 0 \quad , \quad \mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2} \quad \implies (0, \tfrac{1}{2})$$

Iz (4.10.9) potom slijedi da su generatori rotacija i boostova reprezentirani s:

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2}, 0) & : \quad \mathbf{J} = \frac{\sigma}{2} \quad , \quad \mathbf{K} = i \frac{\sigma}{2} \\ (0, \tfrac{1}{2}) & : \quad \mathbf{J} = \frac{\sigma}{2} \quad , \quad \mathbf{K} = -i \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

Pošto su Paulijeve matrice hermitske, $\sigma_j^\dagger = \sigma_j$, vidimo da su generatori boostova antihermitski, $K_j^\dagger = -K_j$, iz čega slijedi da reprezentacije nisu unitarne (ne postoje konačnodimenzionalne unitarne reprezentacije prave Lorentzove grupe). Također uočite da je $(0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 0)^\dagger$, tj. reprezentacije su povezane hermitskom konjugacijom pa se katkad govori da se radi o kompleksno konjugiranim IRREP.

Elementi dvodimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora na koji spin-1/2 generatori (odnosno Paulijeve matrice) djeluju nazivaju se **spinori**. Očito postoje dvije vrste dvokomponentnih spinora:

$$\begin{aligned} (0, \tfrac{1}{2}) & : \quad \textbf{desni Weylovi spinori} \quad \psi_R = \begin{bmatrix} \psi_{R1} \\ \psi_{R2} \end{bmatrix} \\ (\tfrac{1}{2}, 0) & : \quad \textbf{lijevi Weylovi spinori} \quad \psi_L = \begin{bmatrix} \psi_{L1} \\ \psi_{L2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

koji se na pravu Lorentzovu simetriju transformiraju na način

$$\psi_R \longrightarrow \psi'_R = e^{\frac{1}{2}(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma})} \psi_R \quad , \quad \psi_L \longrightarrow \psi'_L = e^{\frac{1}{2}(i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma})} \psi_L \quad (4.10.12)$$

Ukoliko su $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\beta}$ infinitezimalni, transformacije se svode na:

$$\delta\psi_R = \frac{1}{2}(i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi_R \quad , \quad \delta\psi_L = \frac{1}{2}(i\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi_L \quad (4.10.13)$$

Hermitskim konjugiranjem gornje infinitezimalne transformacije dobijamo

$$\delta\psi_R^\dagger = -\frac{1}{2}\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}) \quad , \quad \delta\psi_L^\dagger = -\frac{1}{2}\psi_L^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\beta}) \quad (4.10.14)$$

4.10.5 Weylova spin 1/2 polja

Koristeći spinore možemo definirati spinorna polja $\psi_{L,R}(x)$ tako da svakoj točki prostor-vremena pridružimo spinor na gladak način. Želimo naći relativistički lagranžijan za slobodna polja, što znači da mora biti Lorentz invarijantan (tj. Lorentz skalar do na totalnu derivaciju), za koji očekujemo da će kvantizacija voditi na Fockov prostor čestica spina 1/2. Trivijalan pokušaj, npr. za ψ_R , bi bio

$$\mathcal{L} \stackrel{?}{=} (\partial_\mu \psi_R^\dagger)(\partial^\mu \psi_R) - m^2 \psi_R^\dagger \psi_R \quad (4.10.15)$$

No, koristeći (4.10.13)-(4.10.14) lako se pokaže da se maseni član u gornjem lagranžijanu transformira na infinitezimalne prave Lorentzove transformacije na sljedeći način

$$\delta(\psi_R^\dagger \psi_R) = (\delta \psi_R^\dagger) \psi_R + \psi_R^\dagger \delta \psi_R = \boldsymbol{\beta} \cdot (\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R) \neq 0 \quad (4.10.16)$$

pa vidimo da lagranžijan (4.10.15) **nije Lorentz invarijantan**. Na sličan način se može pokazati da ni kinetički član u (4.10.15) nije Lorentz skalar.

Za konstrukciju kinetičkog člana, koji mora sadržavati 4-derivaciju ∂_μ , spretno je prvo pronaći 4-vektorsku veličinu V_R^μ koja je izgrađena od spinora (ψ_R u našem slučaju) a koja je 4-vektor. Najprirodnije je krenuti od 3-komponentne veličine $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$ i pokušati je dopuniti do 4-vektora. To znači da moramo naći 2×2 matricu σ^0 takvu da se veličina

$$V_R^\mu \equiv \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$$

transformira kao 4-vektor. Dakle, na infinitezimalne Lorentzove transformacije mora se ponašati na sljedeći način

$$\delta V^0 = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{V} \quad , \quad \delta \mathbf{V} = \boldsymbol{\beta} V^0 - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V} \quad (4.10.17)$$

Razmotrimo transformaciju veličine $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$, za koju primjenom (4.10.13)-(4.10.14) dobijamo

$$\delta(\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R) = \boldsymbol{\beta}(\psi_R^\dagger \psi_R) - \boldsymbol{\theta} \times (\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R) \quad (4.10.18)$$

Usporedbom (4.10.16) i (4.10.18) s (4.10.17) vidimo da ako uzmemo

$$V_R^0 = \psi_R^\dagger \psi_R \quad \implies \quad \sigma^0 = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V_R^μ će se transformirati kao 4-vektor, što znači da je **4-vektor**. Pošto je V_R^μ 4-vektorsko polje, onda su

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad , \quad (\partial_\mu \psi_R^\dagger) \sigma^\mu \psi_R \quad (4.10.19)$$

skalarna polja koja su očiti kandidati za konstrukciju kinetičkog člana u lagranžijanu. Uočite dvije stvari:

- Zbroj dva člana u (4.10.19) je totalna derivacija. Pošto totalne derivacije ne mijenjaju jednadžbe gibanja, za većinu potreba dovoljno je koristiti samo jedan od dva člana.
- Može izgledati čudno da je kinetički član u lagranžijanu linearan u ∂_μ umjesto kvadratičan. Razlog je što je 4-vektor V_R^μ sam po sebi kvadratičan u poljima. Stvar je u tome da ne postoji 4-vektor koji je linearan u spinornim poljima pa stoga ne možemo konstruirati kinetički član kvadratičan i u poljima i u ∂_μ . Ovo je specifičnost polja polucjelobrojnog spina.

V_R^μ je **realna veličina** jer:

$$(V_R^\mu)^\dagger = \psi_R^\dagger \sigma^{\mu\dagger} \psi_R = V_R^\mu$$

gdje smo koristili hermitičnost Paulijevih matrica. Na sličan način dobijamo:

$$(\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger = (\partial_\mu \psi_R^\dagger) \sigma^\mu \psi_R$$

Pošto je Lagranžijan nužno realan, tj. hermitski, kinetički član u Lagranžijanu za desno Weylovo spinorno polje mora biti dan s²³

$$\mathcal{L}_R = \frac{i}{2} \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - \frac{i}{2} (\partial_\mu \psi_R^\dagger) \sigma^\mu \psi_R = i \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + (\text{totalna derivacija})$$

gdje je

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$$

Za puno praktičnih potreba spretno je koristiti drugi (kraći) izraz (uz zanemarenje totalnih derivacija). No treba imati na umu da on sam za sebe nije realan tako da se u svim situacijama u kojima je realnost akcije važna ili je topologija prostor-vremena netrivialna mora koristiti prvi (duži) izraz.

Ponavljjanje gornje procedure za lijevo Weylovo spinorno polje $\psi_L(x)$ vodi na 4-vektor V_L^μ dan s

$$V_L^\mu \equiv \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L, \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma})$$

a kinetički član u lagranžijanu je

$$\mathcal{L}_L = \frac{i}{2} \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{i}{2} (\partial_\mu \psi_L^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \psi_L = i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + (\text{totalna derivacija})$$

Weylova spin 1/2 polja su **bezmase** i vidjet ćemo da jedno takvo polje nakon kvantizacije vodi na Fockov prostor izgrađen od čestica (i pripadnih antičestica) samo jednog heliciteta. Napomenimo da postoji način kako generirati masu slobodnom Weylovom polju dodavanjem tzv. Majorana masenog člana u lagranžijan. No, kako se time mijenja helicitetna struktura čestičnih pobuđenja polja i način kako takva polja ulaze u međudjelovanja, takva polja imaju posebno ime (**Majorana spinorna polja**) i razmotrit ćemo ih zasebno malo kasnije.

4.10.6 Diracovo spin 1/2 polje

Postavlja se pitanje kako dobiti masivno spin 1/2 polje? Postoje dva načina uvođenja mase, putem **Diracove** i/ili **Majorana mase**. Razmotrimo sada prvu vrstu koja nas vodi na definiranje **Diracovog spinora**.

Ukoliko imamo par Weylovih polja, ψ_L i ψ_R , možemo konstruirati realni Lorentz skalar na sljedeći način

$$\mathcal{L}_{Dm} = -m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (4.10.20)$$

koji se naziva **Diracov maseni član**, a parametar m **Diracova masa**. Da se uistinu radi o Lorentzovom skalaru slijedi iz

$$\delta(\psi_L^\dagger \psi_R) = 0, \quad \delta(\psi_R^\dagger \psi_L) = 0 \quad (4.10.21)$$

Zadatak 4.10.1: Primjenom (4.10.13)-(4.10.14) dokažite (4.10.21).

Čitatelj se može zapitati zašto nismo razmotrili član

$$im(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L)$$

²³Druge mogućnost bi bila da zbrojimo dva člana iz (4.10.19), no, kao što smo već konstatirali, ova kombinacija daje totalnu derivaciju koja se u svim situacijama u kojima je topologija prostor-vremena trivijalna može zanemariti.

koji je također realan i Lorentz skalar. Odgovor je da, kao što ćemo vidjeti kasnije, spin 1/2 polja imaju antikomutativnu prirodu pa se može pokazati da je ova druga masena kombinacija trivijalna i ne doprinosi dinamici polja (u stvari dodaje nebitnu konstantu akciji).

Zbrajanjem kinetičkih članova i Diracovog masenog člana dobijamo **Diracov lagranžijan**:

$$\mathcal{L}_D \equiv \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{Dm} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) + (\text{totalna derivacija})$$

Diracov lagranžijan se može jednostavnije zapisati, ako uvedemo 4-komponentni **Diracov spinor**

$$\psi \equiv \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \quad (4.10.22)$$

te također definiramo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, gdje su γ^μ četiri 4×4 matrice, zvane **Diracove matrice**, dane s:

$$\gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10.23)$$

U tom slučaju Diracov lagranžijan za slobodno Diracovo polje možemo napisati u obliku

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + (\text{totalna derivacija}) \quad (4.10.24)$$

Primjenom Euler-Lagrangeovih jednačbi lako se pokaže da je jednažba gibanja za slobodno Diracovo polje

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (4.10.25)$$

Uočite da po konstrukciji prava Lorentzova grupa na Diracovom polju nije reprezentirana ireducibilno, već se radi o “uniji” (točnije, direktnom zbroju) reprezentacija koja se matematički označava s $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Zadatak 4.10.2: Dokažite (4.10.25).

Vježba 4.10.3: Pokažite da su Diracova jednažba (4.10.25) i van der Waerdenova jednažba (4.10.6) ekvivalentne, ne samo za slobodno polje nego i u prisustvu minimalno vezanog spin 1 polja.

Dokaz: Radi preglednosti razmotrimo prvo slobodne jednažbe. Uočite da se (4.10.6) može napisati u obliku:

$$(i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu) (i\sigma^\mu \partial_\mu) \phi = m^2 \phi \quad (4.10.26)$$

Ukoliko definiramo $\chi(x)$ na sljedeći način:

$$m \chi = i\sigma^\mu \partial_\mu \phi$$

i potom uvrstimo to u (4.10.26), dobijamo da polje ϕ zadovoljava jednažbu:

$$m \phi = i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$$

Par vezanih jednažbi za ϕ i χ koje smo dobili su ekvivalentne van der Waerdenovoj jednažbi (4.10.6). S druge strane, ovaj par jednažbi je potpuno identičan paru jednažbi za ψ_L i ψ_R koje slijede iz Diracove jednažbe u Weylovoj reprezentaciji ukoliko napravimo identifikaciju $\psi_R = \psi$, $\psi_L = \chi$. To znači da je slobodna van der Waerdenova jednažba ekvivalentna slobodnoj Diracovoj jednažbi.

U prisustvu minimalno vezanog spin 1 polja, sve što treba napraviti je supstituirati $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu$. Dokaz ekvivalencije jednažbi ide potpuno jednako.

4.10.7 Svojstva Diracovih matrica

Iz definicije Diracovih matrica (4.10.23) slijedi

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

Koristeći antikomutacijske relacije za Paulijeve matrice, koje su dane s

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta_{jk}$$

Iako se pokaže da Diracove matrice zadovoljavaju sljedeće antikomutacijske relacije:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{Definicija Diracovih matrica}) \quad (4.10.27)$$

Ova relacija je u stvari **definiciona relacija za Diracove matrice**, u smislu da je svaki skup od 4 matrice koji ju zadovoljava formalno jednako dobar. Važno je imati na umu da je spinor $\bar{\psi}$ definiran s

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (4.10.28)$$

neovisno o reprezentaciji.

Specifični odabir za Diracove matrice dan u (4.10.23) je **samo jedan izbor** koji se naziva **Weylova reprezentacija**. Obratite pažnju da su izrazi (4.10.22) i $\bar{\psi} = (\psi_R^\dagger \psi_L^\dagger)$ specifični za Weylovu reprezentaciju i općenito ne vrijede u drugim reprezentacijama, za razliku od relacija (4.10.27) i (4.10.28) koje su univerzalne.

U praksi se često koristi i tzv. **Majorana reprezentacija** Diracovih matrica:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = i \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^3 = -i \begin{bmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{bmatrix}$$

koja je karakteristična po tome da su Diracove matrice **čisto imaginarne**.

Razmotrimo neka važna svojstva Diracovih matrica i definicije nekih pridruženih matrica koje su neovisne o reprezentaciji. Kao prvo, uočite da iz (4.10.27) slijedi da je

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad , \quad (\gamma^j)^2 = -1$$

To znači da su svojstvene vrijednosti γ^0 matrice ± 1 , a γ^j matrica $\pm i$. Iz toga pak dobijamo sljedeće ponašanje na hermitsku konjugaciju

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad , \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (4.10.29)$$

Iz ovih relacija i (4.10.27) očito slijedi

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

Korisno je uvesti veličine

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad , \quad S^{\mu\nu} \equiv \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$$

Hermitska konjugacija daje

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4} [\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]$$

pa upotrebom (4.10.29) dobijamo da je

$$(S^{jk})^\dagger = S^{jk} \quad , \quad (S^{0j})^\dagger = -S^{0j}$$

Sad se lako može pokazati da vrijedi

$$\gamma^0 (S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = S^{\mu\nu}$$

Koristeći (4.10.27) može se pokazati da $S^{\mu\nu}$ zadovoljava komutatore

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} S^{\nu\rho}) \quad (4.10.30)$$

Vidimo da su potpuno identični komutatorima kakve zadovoljavaju generatori pravih Lorentzovih transformacija $V^{\mu\nu}$ definirani u (4.10.8). Iz toga možemo zaključiti da $S^{\mu\nu}$ **reprezentiraju generatore** $V^{\mu\nu}$ na prostoru Diracovih spinora (neovisno o reprezentaciji).

Kao što ćemo uskoro vidjeti, važna veličina je γ^5 matrica koja se definira kao

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.10.31)$$

Koristeći (4.10.27) lako se dokažu sljedeća svojstva γ^5 matrice:

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

Važna matematička tvrdnja je da skup matrica

$$\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}$$

čini **bazu** na prostoru 4×4 kompleksnih matrica. Pošto je broj točno onoliki koliki treba biti (16), treba samo pokazati da su matrice linearno nezavisne. Dokaz se može pronaći u udžbenicima a mi ćemo prihvatiti ovu tvrdnju kao činjenicu. Posljedica ove tvrdnje je da je u izgradnji i analizi bilineara sačinjenih od Diracovih polja **dovoljno razmotriti samo elemente baze, jer se svi drugi bilineari mogu dobiti linearnim kombiniranjem baznih**.

4.10.8 Korisni identiteti s tragovima

Ovdje ćemo navesti neke identitete vezane uz tragove produkata Diracovih matrica koji se često pojavljuju u računima koji uključuju nepolarizirana raspršenja i/ili petlje u Feynmanovim dijagramima. Sve što nam treba u izvodu su definicione relacije

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

i dvije relacije koje slijede iz njih

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

To znači da će dobijeni rezultati biti **neovisni o reprezentaciji Diracovih matrica**.

Krenimo od najjednostavnijeg traga i iskoristimo gornje relacije i cikličnost traga:

$$\text{tr}(\gamma_\mu) = \text{tr}(\gamma_5^2 \gamma_\mu) = -\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5) = -\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_5^2) = -\text{tr}(\gamma_\mu)$$

Slijedi da je $\text{tr}(\gamma_\mu) = 0$. Sličnom procedurom možemo pokazati da to vrijedi za svaki produkt neparnog broja γ_μ matrica:

$$\text{tr}(\gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2n-1}}) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.10.32)$$

Sljedeći po kompleksnosti je:

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu) + 2\eta_{\mu\nu} \text{tr}(1) = -\text{tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu) + 8\eta_{\mu\nu}$$

iz čega slijedi

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\eta_{\mu\nu} \quad (4.10.33)$$

Na sličan način možemo pokazati:

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda) = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\lambda} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}) \quad (4.10.34)$$

Iterativnom procedurom može se dobiti formula za trag produkta proizvoljnog broja Diracovih matrica, no nama će trebati samo ove formule koje smo napisali iznad.

4.10.9 Svojstva na Lorentzove transformacije

Djelovanje prave Lorentzove grupe na Diracove spinore je dano 4×4 matricama:

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \exp(i\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}) \quad , \quad \theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu} \quad (4.10.35)$$

tako da se spinori transformiraju na pravu Lorentzovu transformaciju Λ na sljedeći način:

$$\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'(x') = \mathcal{D}(\Lambda)\psi(x) \quad , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4.10.36)$$

U Weylovoj reprezentaciji Diracovih matrica vrijedi:

$$S^{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \begin{bmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{bmatrix} \quad , \quad S^{0j} = K_j = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix}$$

što, usporedbom s (4.10.12), jasno pokazuje da je $S^{\mu\nu}$ uistinu izgrađen od generatora Lorentzovih transformacija.

Iz gornje relacije slijedi da je projekcija angularnog momenta na z -os reprezentirana s:

$$J_3 = S^{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \quad (4.10.37)$$

Iz toga slijedi da je rotacija za konačni θ_z oko z osi reprezentirana na Diracovom polju s:

$$\mathcal{D}(R_{\theta_z}) = \exp \begin{bmatrix} i\frac{\theta_z}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{\theta_z}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{\theta_z}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\frac{\theta_z}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta_z/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_z/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_z/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta_z/2} \end{bmatrix} \quad (4.10.38)$$

Vidimo da je rotacija za 2π reprezentirana s $\mathcal{D}(R_\pi) = -1$. Pošto nema ništa specijalno s osi z , možemo zaključiti da će to vrijediti za rotaciju za 2π oko proizvoljne osi, pa možemo zaključiti da se spinori transformiraju na rotaciju za 2π na sljedeći način:

$$\psi(x) \xrightarrow{2\pi} \psi'(x) = -\psi(x)$$

Pošto rotacija za 2π nije mjerljiva (jednaka je identitetu na mjerljivim veličinama) očito je da spinori sami po sebi nisu mjerljivi. Mjerljive veličine moraju biti izgrađene od produkata **parnog** broja spinornih polja.

Razmotrimo najjednostavnije takve produkte, tj. bilineare (produkti dva spinora). Naravno, posebno smo zainteresirani za one koji daju Lorentz tenzore. U tu svrhu važno je uočiti sljedeće relacije

$$\mathcal{D}(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu \mathcal{D}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad , \quad \mathcal{D}(\Lambda)^{-1} \gamma^5 \mathcal{D}(\Lambda) = \gamma^5 \quad (4.10.39)$$

koje su direktna posljedica (4.10.27) i definicija $\mathcal{D}(\Lambda)$ i γ^5 .

Iz (4.10.39) i relacija dobijenih u prethodnom odjeljku mogu se dokazati sljedeće tvrdnje:

1. $\bar{\psi}\psi$ je Lorentz skalar.
2. $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ je Lorentz pseudoskalar.
3. $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ je Lorentz vektor.
4. $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ je Lorentz aksijalni vektor.
5. $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ je Lorentz tenzor ranga 2.

Riječ **pseudo** govori o transformiranju na paritet što ćemo pojasniti u odjeljku 4.14.2. Obratite pažnju da ova lista sačinjava potpunu taksonomiju realnih bilineara, koji ne sadrže derivacije polja, s obzirom na Lorentzove transformacije, jer matrice koje smo upotrijebili u konstrukciji čine bazu. Ukoliko uključimo i derivacije, lista se proširuje trivijalnim ubacivanjem derivacija:

6. $\bar{\psi}\partial_\mu\psi$ je Lorentz vektor.
7. $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ je Lorentz skalar.
- ⋮

gdje točkice označavaju bilineare koji uz derivaciju sadrže i druge članove baze, te članove s dvije i više derivacija (kojih ima beskonačan broj). Za dokaz transformacija na pravu Lorentzovu grupu simetrija treba koristiti (4.10.39) i (4.10.36) te zakon transformacije polja $\bar{\psi}$ koji je

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{D}(\Lambda)^{-1} \quad , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.10.40)$$

Zadatak 4.10.4: Dokažite (4.10.39) i (4.10.40).

Vježba 4.10.5: Dokažite gornje tvrdnje za transformacije bilineara na pravu Lorentzovu simetriju.

Dokaz: Dokazat ćemo samo tvrdnju 3., a ostale prepustiti za domaću zadaću (1., 6. i 7. smo već prije dokazali koristeći Weylovu reprezentaciju). Primjenom (4.10.36) i (4.10.40) dobijamo

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)' \equiv \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\mathcal{D}(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu\mathcal{D}(\Lambda)\psi(x)$$

Uvrštavanje (4.10.39) daje

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)' = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \equiv \Lambda^\mu{}_\nu (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)$$

što je zakon transformacije 4-vektorskog polja.

U praksi se pokazuje elegantnim koristiti Diracovu **slash notaciju** u kojoj se množenje i kontrakcija 4-vektora s γ^μ matricama označava na sljedeći način:

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu \quad , \quad \not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$$

U ovoj konvenciji Diracov lagranžijan i pripadna jednažba gibanja imaju vrlo kratak zapis

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad \implies \quad (i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

Može se pokazati da slobodno Diracovo polje zadovoljava jednažbu

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (4.10.41)$$

tj. svaka komponenta slobodnog Diracovog spinornog polja zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu (isto vrijedi i za slobodno Weylovo spinorno polje). Može se pokazati da je to **univerzalno svojstvo svih slobodnih relativističkih polja**. Naravno, Klein-Gordonova jednadžba sadrži manje informacije od Diracove jednadžbe i to treba imati u vidu prilikom konstrukcije rješenja.

Vježba 4.10.6: Dokažite (4.10.41).

Dokaz: Ako djelujemo na Diracovu jednadžbu s lijeva s $(i\cancel{\partial} + m)$ dobijamo

$$0 = (i\cancel{\partial} + m)(i\cancel{\partial} - m)\psi = (-\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi = \left(-\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\psi$$

Pošto je $\partial_\mu\partial_\nu$ simetričan tenzor, član s komutatorom iščezava. Primjena (4.10.27) onda daje

$$0 = -(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi$$

što je upravo (4.10.41).

Na kraju ovog odjeljka, napišimo eksplicitno i jednadžbu za polje $\bar{\psi}$, koja naravno nije nezavisna nego se može dobiti iz jednadžbe za ψ (točnije rečeno, jednadžbe su ekvivalentne) kompleksnom konjugacijom i množenjem s γ^0 :

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\psi}(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + m) = 0 \quad (4.10.42)$$

gdje strelica označava smjer u kojem derivacija djeluje (kad nema strelice podrazumijeva se da je smjer djelovanja kao i obično s lijeva na desno).

4.10.10 Vezanje fotona na Diracovo polje

Lagranžijan za slobodno Diracovo polje posjeduje unutarnju simetriju na $U(1)$ transformacije

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\chi}\psi(x) \quad , \quad \chi \in \mathbb{R} \quad (4.10.43)$$

gdje je q naboj polja ψ . Stoga možemo primijeniti minimalno vezanje na bezmaseno spin-1 realno polje $A_\mu(x)$ (fotonsko polje) na način kako smo opisali u odjeljku 4.6.3 uvođenjem kovarijantne derivacije

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

Diracov lagranžijan postaje

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + q\cancel{A} - m)\psi$$

a pripadna jednadžba polja

$$(i\cancel{\partial} + q\cancel{A} - m)\psi = 0 \quad (4.10.44)$$

Ukoliko imamo jedan elektron impulsa $|\mathbf{p}| < m$ i ako se polje A_μ može tretirati kao klasično vanjsko polje ovu jednadžbu možemo rješavati kao jednočestičnu valnu jednadžbu, onako kako ste to radili na kursu iz kvantne mehanike. Dobijamo **aproksimaciju jednočestične relativističke kvantne mehanike**. Na primjer, na ovaj način možemo dobiti relativističke korekcije orbitala u atomu vodika. Naravno, na to dolaze korekcije kvantne teorije polja, tzv. **radijacijske korekcije**, koje ćemo razmatrati u poglavlju 5.

Ako djelujemo na jednadžbu (4.10.44) s lijeve strane operatorom $(i\mathcal{D} + m)$ dobijamo

$$(\mathcal{D}^2 + m^2)\psi = 0 \quad (4.10.45)$$

Koristeći sličan trik kao u prethodnom odjeljku

$$\mathcal{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu]$$

gdje sada treba imati u vidu da kovarijantne derivacije ne komutiraju već vrijedi

$$[D_\mu, D_\nu] = -iq([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu]) = -iqF_{\mu\nu}$$

gdje smo koristili $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 = [A_\mu, A_\nu]$ i $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Uvrštavanje u jednadžbu iznad daje

$$\mathcal{D}^2 = D^2 - \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Uvrštavanje ovog izraza nazad u (4.10.45) daje jednadžbu

$$\left(D^2 + m^2 - \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi = 0 \quad (4.10.46)$$

Usporedba s jednadžbom za spin-0 polje, koja glasi

$$(D^2 + m^2)\varphi = 0$$

vidimo da je razlika član $\frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Razmotrimo sada njegovo fizikalno značenje.

U Weylovoj reprezentaciji vrijedi

$$\sigma^{jk} = \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \begin{bmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{bmatrix}, \quad \sigma^{0j} = i \begin{bmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{bmatrix}$$

Ako uvedemo električno polje $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ i magnetsko polje $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ na standardan način, $F_{0j} = E_j$ i $F_{jk} = -\sum_l \epsilon_{jkl} B_l$, dobijamo

$$\frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -q \begin{bmatrix} (\mathbf{B} + i\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & (\mathbf{B} - i\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.10.47)$$

Ako uvrstimo (4.10.47) i napravimo nerelativistički limes jednažbe (4.10.46) dobijamo da član s $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ iz (4.10.47) daje doprinos hamiltonijanu (privremeno se vraćamo na SI sustav jedinica):

$$H_{BS} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.10.48)$$

što je upravo oblik za energiju vezanja **permanentnog magnetskog dipola** čiji magnetski moment je dan s

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{m} \mathbf{S} = \frac{\hbar q}{2m} \boldsymbol{\sigma}$$

To znači da ako napišemo naboj kao $q = ne$, iznos **spinskog dipolnog momenta** jednak je

$$\mu = \frac{ne\hbar}{2m} = n \mu_B, \quad \mu_B = \frac{\hbar e}{2m}$$

gdje je μ_B poznat kao **Bohrov magneton**. Obratite pažnju da je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ vezanje za faktor dva snažnije od vezanja orbitalnog angularnog momenta $\mathbf{L}$ na magnetsko polje, koje smo izveli na kursu iz Elektrodinamike i za koje smo dobili:²⁴

$$H_{LS} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

²⁴Bohrov magneton se definira kao doprinos magnetskom momentu koji kreira orbitalni angularni moment iznosa $\hbar$, a ne $\hbar/2$.

Ova činjenica je bila uočena promatranjem eksperimentalnih promatranja anomalnog Zeemanovog efekta u atomskim spektrima već 1925. (od strane Uhlenbecka i Goudsmita) manje od godinu dana nakon što je Pauli iznio hipotezu o postojanju dodatnog kvantnog broja. Iz ovog rezultata možemo zaključiti sljedeće:

Relativistička teorija polja točno **predviđa** izraz za spinski magnetski moment za čestice spina 1/2 uključujući i ekstra faktor 2 (tzv. **g-faktor**) koji postoji u odnosu na vezanje orbitalnog angularnog momenta na magnetsko polje.

Napomenimo da je rezultat da je $g = 2$ za sve čestice spina 1/2 u potpunosti misteriozan iz perspektive nerelativističke kvantne mehanike, u kojoj je g neodređen parametar, neka vrsta konstante vezanja. U stvari, iz činjenice da je spin vrsta angularnog momenta, i zbraja se s orbitalnim u (sačuvani) ukupni angularni moment na način $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, naivno očekivanje bi bilo da je $g = 1$. Demonstracija 1928. da iz Diracove jednažbe neposredno slijedi $g = 2$ je bila veliki uspjeh Diraca i njegove teorije. Ovaj rezultat je jedan od razloga zašto se nismo zadovoljili pojednostavljenim “izvodom” Diracove jednažbe napravljenim u odjeljku 4.10.1 gdje smo uzeli zdravo za gotovo da je $g = 2$ – u tom slučaju ne bi jasno vidjeli da **relativnost nužno implicira $g = 2$ za čestice spina 1/2**.

Treba reći da **kvantne korekcije** doprinose g -faktoru pa on nije točno jednak 2, no te korekcije ne ovise samo o spinu već i o masi i međudjelovanjima u kojima čestica sudjeluje pa **nisu univerzalne**. U odjeljku 5.7 izračunat ćemo prvu kvantnu korekciju g -faktora unutar spinorne kvantne elektrodinamike.

Vježba 4.10.7: Dokažite (4.10.48) tako da je jasno da taj član u potpunosti dolazi od člana $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Dokaz: U stvari, pošto smo pokazali da je Diracova jednažba s minimalno vezanim vanjskim poljem spina 1 ekvivalentna van der Waerdenovoj jednažbi, a u odjeljku 4.10.1 smo vidjeli da ova reproducira (4.10.48) u nerelativističkom limesu, mogli bi reći da dokaz već imamo. No, za potrebe odjeljka 5.7 ovdje ćemo dokaz napraviti krećući od (4.10.46) kako bi bili sigurni da magnetskom momentu doprinosi isključivo član (4.10.47).

U nerelativističkom limesu (4.10.46) postaje jednažba za valnu funkciju pa možemo napraviti standardnu korespondenciju $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$ i identificirati p_0 s hamiltonijanom H . Na taj način dobijamo:

$$(H - qA_0)^2 = m^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - 2q(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \pm i\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}) = m^2 \left[1 + \frac{1}{m^2} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - \frac{2q}{m^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \pm i\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}) \right]$$

gdje $\pm$ predznak se odnosi na $\psi_{L,R}$. Ograničimo se sada na situaciju u kojoj su polja $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ vremenski neovisna i u kojoj vrijedi $\mathbf{E} = -\nabla A_0$ i $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Obratite pažnju da su u nerelativističkoj aproksimaciji svi članovi u uglatoj zagradi puno manji od 1. Sad možemo izvaditi kvadratni korijen na način da ostavimo samo granu rješenja s pozitivnom energijom i zadržimo se na prvoj korekciji u Taylorovom razvoju funkcije $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$. Također koristimo činjenicu da nerelativistička aproksimacija podrazumijeva da se polja sporo mijenjaju u prostoru, što između ostalog znači da je $A_0 \gg (\nabla A_0)/m$ pa u najnižem redu možemo zanemariti $\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$ član. Rezultat je da se Diracova jednažba u nerelativističkoj aproksimaciji u najnižem redu svodi na:

$$H \approx m + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A})^2 + V(r) - \frac{q}{m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (4.10.49)$$

gdje smo uveli tradicionalnu oznaku za potencijalnu energiju $V = qA_0$. Vidimo da zadnji član s desna strane daje upravo (4.10.48), što znači i faktor $g = 2$. Također uočimo da taj član u potpunosti dolazi od člana $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ u jednažbi (4.10.46).

$U(1)$ simetrija (4.10.43) koja posjeduje jedan kontinuirani parametar χ vodi, putem Noetherinog teorema, na postojanje jedne sačuvane struje dane s

$$j^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.10.50)$$

Uočite da su gustoća naboja j^0 i ukupni sačuvani naboj Q dani s

$$j^0 = \psi^\dagger \psi = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2 \quad , \quad Q = \int d^3\mathbf{x} j^0(x)$$

gdje su ψ_a komponente Diracovog spinora ψ .

Jednočestična relativistička kvantna mehanika – reloaded?

Pogled na ove izraze nas vraća na pitanje da li je moguće konstruirati konzistentnu interagirajuću jednočestičnu relativističku kvantnu mehaniku, na koje smo dali negativan odgovor u odjeljku 1.4. Jer ako bi uzeli da su $\psi_a(x)$ obične (kompleksne) valne funkcije tada bi j^0 bio pozitivno definitan, a Q konstanta u vremenu (koju možemo normalizirati na jedan) pa izgleda kao da Diracova jednačba omogućava jednočestičnu interpretaciju po kojoj bi j^0 bila gustoća vjerojatnosti pronalaska čestice. U stvari, to je bila ideja vodilja Diracu pri konstrukciji jednačbe.

Ipak se pokazuje da postoje različiti **problemi**, kao što je **postojanje rješenja s negativnom energijom**. Ukoliko bismo pak odbacili ova rješenja kao nefizikalna, više **ne bismo mogli konstruirati proizvoljno lokalizirana stanja u prostoru**. Kao i u slučaju Klein-Gordonove jednačbe, zbog ovih problema Diracova jednačba se ne može interpretirati kao jednočestična, odnosno može samo **aproksimativno** u situacijama niskih energija i slabih polja koja se ne mijenjaju naglo u prostor-vremenu (kao u slučaju elektronskih orbitala u atomu vodika). Studentima zainteresiranim za ovu temu preporučam udžbenik Bjorken i Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* ili Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* za pojašnjenja. Pokazuje se da jedina u potpunosti konzistentna formulacija Diracove jednačbe ide putem kvantne teorije polja. U tom slučaju veličina Q se interpretira kao operator ukupnog naboja koji, zbog postojanja antičestica pridruženih Diracovom polju, može imati i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti.

4.10.11 Majorana fermioni

Postoji način na koji se jednom Weylovom spinornom polju, za primjer uzmimo ψ_L , može generirati masa putem bilineara u lagranžijanu. To je posljedica postojanja bilineara koji je Lorentz skalar

$$\psi_L^T \sigma^2 \psi_L \quad \Longrightarrow \quad \delta(\psi_L^T \sigma^2 \psi_L) = 0$$

Desna jednakost se lako može dokazati upotrebom (4.10.13).

Ako raspišemo Weylovo spinorno polje po komponentama

$$\psi_L(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

dobijamo

$$\psi_L^T \sigma^2 \psi_L = (\psi_1 \ \psi_2) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = i(\psi_2 \psi_1 - \psi_1 \psi_2)$$

Ovdje vidimo jednu zanimljivu stvar – ako bi $\psi_{1,2}$ bili komutirajući objekti (kao što su komponente polja cjelobrojnog spina) gornji bilinear bi trivijalno iščezavao. No, vidjet ćemo da su komponente spinornih polja nužno **antikomutirajući** objekti pa bilinear ne iščezava.

Razmotrimo kompleksnu konjugaciju gornjeg bilineara:

$$(\psi_L^T \sigma^2 \psi_L)^* = \psi_L^\dagger (\sigma^2)^\dagger \psi_L^* = \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*$$

Pošto lagranžijan mora biti realan, moramo izgraditi realne kombinacije kao kandidate za masene članove. Postoje dvije mogućnosti:

$$\psi_L^T \sigma^2 \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^* \quad \text{nije dobar maseni član}$$

$$i(\psi_L^T \sigma^2 \psi_L - \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*) \quad \text{Majorana maseni član}$$

Koristeći Majorana maseni član možemo konstruirati lagranžijan za masivno slobodno $(\frac{1}{2}, 0)$ spinorno polje, koje se naziva **Majorana polje**,

$$\mathcal{L}_M = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + \frac{i}{2} m (\psi_L^T \sigma^2 \psi_L - \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*) \quad (4.10.51)$$

Koja je razlika između Majorana, Weyl i Diracovog polja vidi se u potpunosti tek nakon kvantizacije. No, odgovor se može naslutiti iz analize diskretnih simetrija. U tu svrhu ćemo formalno proširiti ψ_L , koji ima dvije komponente, u 4-komponentni Diracov spinor. Može se pokazati da se spinor $\sigma^2 \psi_L^*$ transformira na Lorentzove transformacije kao desni Weylov spinor, $(0, \frac{1}{2})$. To znači da korištenjem Weylove reprezentacije možemo konstruirati posebnu vrstu Diracovog spinora

$$\psi_M \equiv \begin{bmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{bmatrix}$$

koji se naziva **Majorana spinor**. Uočite dvije stvari: (i) ψ_M zadovoljava Diracovu jednadžbu, (ii) proširenje jednadžbe ne uvodi nove stupnjeve slobode, proširenje na Diracov spinor i jednadžbu su samo formalne matematičke operacije.

Majorana spinor se razlikuje u odnosu na općeniti Diracov spinor po načinu na koji na njega djeluje simetrija zvana **nabojna konjugacija** (C), koja se u Weylovoj reprezentaciji definira kao

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = -i\gamma_2 \psi^* \quad (\text{u Weylovoj reprezentaciji}) \quad (4.10.52)$$

Koje je fizikalno značenje nabojne konjugacije? Jedan način da se to vidi je razmotriti Diracovu jednadžbu u prisustvu vanjskog elektromagnetskog polja, koja je dana u (4.10.44). Ako ju kompleksno konjugiramo i potom pomnožimo s lijeva s $-i\gamma_2$ dobijamo

$$0 = -i\gamma_2 [\gamma^{\mu*} (-i\partial_\mu + qA_\mu) - m] \psi^* = [\gamma_2 \gamma^{\mu*} \gamma_2 (i\partial_\mu - qA_\mu) - m] (-i\gamma_2 \psi^*) = [\hat{\gamma}^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m] \psi^c$$

gdje smo iskoristili $\gamma_2^2 = -1$ i uveli $\hat{\gamma}^\mu \equiv \gamma_2 \gamma^{\mu*} \gamma_2$. Vidimo da ψ^c zadovoljava jednadžbu koja izgleda isto kao početna osim što je $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ i $q \rightarrow -q$. No, pošto je $\gamma_2^2 = -1$ lako se pokaže da matrice $\hat{\gamma}$ također zadovoljavaju algebru Diracovih γ matrica (4.10.27), što znači da one i jesu Diracove γ matrice samo ne u Weylovoj nego nekoj drugoj reprezentaciji. Pošto je izbor reprezentacije proizvoljan, zaključak je da ψ^c zadovoljava Diracovu jednadžbu, ali za česticu sa suprotnim nabojem od ψ , $q \rightarrow -q$. Stoga možemo pretpostaviti da nabojna konjugacija u kvantiziranoj teoriji vodi na zamjenu čestica $\leftrightarrow$ antičestica (kasnije ćemo to pokazati eksplicitno).

Ključna opservacija je da je Majorana spinor **invarijantan na nabojnu konjugaciju**

$$\psi_M \xrightarrow{C} \psi_M^c = \psi_M$$

(pa se kaže da je Majoranin spinor **realan**) i stoga očekujemo da je Majoranin fermion sam sebi antičestica.

Kako bi se uvjerali u valjanost gornje tvrdnje, pokažimo da Majoranino polje ne može posjedovati neiščezavajući naboj na unutarnju $U(1)$ simetriju danu s

$$\psi_L \longrightarrow \psi'_L = e^{iq\chi} \psi_L,$$

što je kako smo vidjeli tipično svojstvo realnih polja (tj. onih čije pripadne čestice su jednake antičesticama), jer iz nje slijedi

$$\psi_L^T \sigma^2 \psi_L \longrightarrow e^{i2q\chi} \psi_L^T \sigma^2 \psi_L$$

iz čega je očito da Majoranin maseni član **nije invarijantan** na ovu simetriju, izuzev u trivijalnom slučaju $q = 0$.

Zadatak 4.10.8: Pokažite da je u proizvoljnoj reprezentaciji Diracovih matrica transformacija nabojne konjugacije dana s

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c = C \psi^* \quad (4.10.53)$$

gdje je C 4×4 matrica koja zadovoljava

$$C^\dagger C = 1 \quad \text{i} \quad C^\dagger \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^* \quad (4.10.54)$$

4.11 Spinorna rješenja

4.11.1 Kiralnost, helicitet i spin

Vidjeli smo da postoje dvije vrste dvokomponentnih spinora $\psi_{R,L}$ koje možemo upariti u 4-komponentni Diracov spinor. U Weylovoj reprezentaciji to uparivanje ima jednostavan oblik dan u (4.10.22). Za oznake L i R kaže se da označavaju **kiralnost** spinora, L označava **lijevu** (eng. **left**), a R **desnu** (eng. **right**) kiralnost. Pokazuje se korisnim imati **projektore kiralnosti** – matrice koje kad djeluju na Diracov spinor projiciraju lijevi ili desni Weylov spinor. Za to se pokazuje korisnim matrica γ^5 koju smo definirali u (4.10.31), i koja je u Weylovoj reprezentaciji dana s

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (4.11.1)$$

Iz toga i (4.10.22) očito slijedi da su projektori kiralnosti dani s

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad , \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (4.11.2)$$

jer je

$$P_R \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_R \end{bmatrix} \quad , \quad P_L \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11.3)$$

što možemo skraćeno zapisati kao

$$P_{R,L}\psi = \psi_{R,L} \quad , \quad \gamma^5\psi_R = \psi_R \quad , \quad \gamma^5\psi_L = -\psi_L \quad (4.11.4)$$

gdje podrazumijevamo da smo Weylove spinore upakirali u Diracov spinor sparivanjem s nulom. Relacije (4.11.2) i (4.11.4) su univerzalne i neovisne o odabiru reprezentacije za Diracove matrice, za razliku od (4.11.1) i (4.11.3) koje vrijede samo u Weylovoj reprezentaciji.

Razmotrimo sada rješenja u obliku ravnih sinusoidalnih valova

$$\psi(x) = u e^{-ip \cdot x} \quad , \quad (4.11.5)$$

Ukoliko odaberemo Weylovu reprezentaciju i spinor u raspišemo po komponentama

$$u = \begin{bmatrix} u_L \\ u_R \end{bmatrix}$$

tada uvrštavanje (4.11.5) u Diracovu jednadžbu daje dvije dvokomponentne jednadžbe

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot p)u_R &\equiv (p^0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_R = m u_L \\ (\bar{\sigma} \cdot p)u_L &\equiv (p^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_L = m u_R \end{aligned}$$

Uvrštavanje (4.11.5) u Klein-Gordonovu jednadžbu (4.10.41) daje relativističku disperzijsku relaciju

$$(p^0)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

koja sugerira da će nakon kvantizacije polje opisivati čestice mase m . Kao što vidimo, maseni član miješa helicitetna stanja.

U slučaju kad je $m = 0$ jednadžbe se razvezuju i vidimo da su u_L i u_R svojstvena stanja **heliciteta** h (projekcije spina na smjer impulsa p) čiji operator (u smislu djelovanja na Weylove spinore) je dan s

$$h \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Pošto u ovom slučaju imamo $p^0 = \pm|\mathbf{p}|$ vidimo da će valovi s $p^0 > 0$ imati helicitet dan s:

$$h\psi_R = \psi_R \quad , \quad h\psi_L = -\psi_L \quad (p^0 > 0)$$

dok za valove s $p^0 < 0$ vrijedi

$$h\psi_R = -\psi_R \quad , \quad h\psi_L = \psi_L \quad (p^0 < 0)$$

(Bezmaseni) Weylovi fermioni imaju **fiksni helicitet**. To nije iznenađujuće otkriće jer smo vidjeli u analizi unitarnih reprezentacija prave Poincaréove grupe da za bezmasene čestice ireducibilne reprezentacije imaju fiksni helicitet.

Uočimo da u slučaju $m \neq 0$ moraju postojati **oba heliciteta i obje kiralnosti**, no helicitet i kiralnost se **ne mogu dijagonalizirati zajedno**.

Vidjeli smo da postoje 3 različite veličine povezane sa spinom:

1. **SPIN**: Vektorska veličina $\mathbf{S}$ koja doprinosi ukupnom angularnom momentu. Za spinorna polja vrijednosti koje može poprimiti spin su svojstvene vrijednosti od $\sigma/2$, tj. $\pm 1/2$. Za polja spina s vrijedi $\mathbf{S}^2 = s(s+1)$, a vrijednosti koje može poprimiti su $-s, -s+1, \dots, s-1, s$, gdje je $s \in \mathbb{N}^0/2$.
2. **HELICITET**: Projekcija spina na smjer kretanja. Helicitetno svojstveno stanje fotona odgovara onome što smo u klasičnoj elektrodinamici zvali cirkularna polarizacija.
3. **KIRALNOST**: Postoji samo za polja pridružena reprezentacijama (A, B) za koja je $A \neq B$. Za teoriju se kaže da je kiralna ako **ne posjeduje** simetriju na zamjenu $L \leftrightarrow R$. Za elektromagnetsko polje ne postoji jer je ono pridruženo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ reprezentaciji. Također, kvantna elektrodinamika nije kiralna teorija jer je međudjelovanje

$$\bar{\psi} A \psi = \bar{\psi}_R A \psi_R + \bar{\psi}_L A \psi_L \quad (4.11.6)$$

simetrično na zamjenu $L \leftrightarrow R$. S druge strane, teorija **slabih** međudjelovanja u standardnom modelu fizike čestica je kiralna teorija.

Sažetak – vrste spinora :

- **Diracovi spinori** – imaju i lijevu i desnu kiralnost, mogu biti i masivni i bezmaseni.
- **Weylovi spinori** – uvijek bezmaseni, lijevi ili desni. Kad se napišu kao 4-komponentni Diracovi spinori zadovoljavaju $\gamma^5 \psi = \pm \psi$.
- **Majorana spinori** – Kad se napišu kao Diracovi spinori zadovoljavaju uvjet $\psi = \psi_c \equiv -i\gamma_2 \psi^*$.

4.11.2 Rješenja slobodne Diracove jednačbe

U prošlom odjeljku smo se bavili nekim općim svojstvima sinusoidalnih ravnovalnih rješenja slobodne Diracove jednačbe

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (4.11.7)$$

Sad prelazimo na eksplicitnu konstrukciju rješenja u obliku sinusoidalnih ravnih valova:

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x} \quad (4.11.8)$$

Uvrštavanje u Klein-Gordonovu jednačbu (4.10.41) nam daje $p^2 = m^2$.

Razmotrimo prvo rješenja s “pozitivnom energijom” za koja je $p^0 > 0$ pa je

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \omega_{\mathbf{p}} \quad (4.11.9)$$

Naravno, ako želimo moći konstruirati proizvoljne valne pakete ne smijemo ispustiti rješenja s “negativnom energijom” koja ćemo napisati u sljedećem obliku:

$$\psi(x) = v(p) e^{ip \cdot x} \quad (4.11.10)$$

u kojem je p^0 ponovno po definiciji pozitivan i jednak (4.11.9). $u(p)$ i $v(p)$ su konstantni 4-komponentni spinori koje treba odrediti uvrštavanjem u Diracovu jednadžbu. Kad to napravimo opće rješenje ćemo dobiti superponiranjem rješenja iz (4.11.8) i (4.11.10) po svim impulsima i spinovima.

Uvrštavanje (4.11.8) i (4.11.10) u Diracovu jednadžbu (4.11.7) daje sljedeće uvjete na spinore u i v :

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v(p) = 0 \quad (4.11.11)$$

Naš zadatak je naći opća rješenja ovih jednadžbi.

U rješavanju ćemo koristiti Weylovu reprezentaciju. U tom slučaju jednažbe (4.11.11) postaju

$$\begin{bmatrix} -m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & -m \end{bmatrix} u(\mathbf{p}) = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{bmatrix} v(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.11.12)$$

Radi jednostavnosti razmotrimo prvo rješenja s $\mathbf{p} = 0$ za koja je $p^\mu = (m, \mathbf{0})$ i stoga $\sigma \cdot p = m\sigma^0 = m\mathbb{1}$ pa gornje jednažbe postaju

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} u(0) = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{bmatrix} v(0) = 0$$

gdje je $\mathbb{1}$ jedinična 2×2 matrica. Ovo su dva linearna sustava jednažbi za koja se lako može pokazati da su opća rješenja dana s:

$$u(0) = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix} \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} \eta \\ -\eta \end{bmatrix}$$

gdje su ξ i η proizvoljni dvokomponentni spinori. Očito je da je jedan spretan izbor za bazu od rješenja dan s:

$$u(0, \tfrac{1}{2}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u(0, -\tfrac{1}{2}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v(0, \tfrac{1}{2}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad v(0, -\tfrac{1}{2}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da za svaki $p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ postoje 4 stupnja slobode. Pošto Diracovo polje nosi spin 1/2, to daje dva spinska stupnja slobode. Za preostala dva stupnja slobode očekujemo da dolaze zbog postojanja antičestice. U stvari, vidjet ćemo da su rješenja za $u(0, s)$ ($v(0, s)$) povezana s česticom (antičesticom) čija projekcija spina na z -os je jednaka s .²⁵

Za dobivanje rješenja za opći impuls $\mathbf{p} \neq 0$ najspretnija procedura je razmotriti neki jednostavni skup rješenja iz kojih rotacijama možemo dobiti sva druga. Na primjer, jedan takav spretan izbor je $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$. U tom slučaju imamo

$$\sigma \cdot p = \begin{bmatrix} \omega_z - p_z & 0 \\ 0 & \omega_z + p_z \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{\sigma} \cdot p = \begin{bmatrix} \omega_z + p_z & 0 \\ 0 & \omega_z - p_z \end{bmatrix} \quad , \quad \omega_z \equiv \sqrt{p_z^2 + m^2}$$

²⁵Za rješenja za u ova tvrdnja slijedi direktno iz formule za projekciju angularnog momenta (4.10.37). Za rješenja za v ispada kao da je definicija “naopaka”, no to je posljedica toga da se radi o rješenjima s negativnom energijom (koja su povezana s antičesticama). Nakon kvantiziranja Diracovog polja vratiti ćemo se na ovo pitanje.

pa jednačba za $u(p)$ u (4.11.12) postaje

$$\begin{bmatrix} -ab & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & b^2 \\ b^2 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & -ab \end{bmatrix} u(p) = 0 \quad , \quad a \equiv \sqrt{\omega_z - p_z} \quad , \quad b \equiv \sqrt{\omega_z + p_z}$$

Opće rješenje ovog linearnog sustava jednačbi je:

$$u(p) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \xi \\ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_z - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z + p_z} \end{pmatrix} \xi \\ \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_z + p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z - p_z} \end{pmatrix} \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \sqrt{\omega_z - p_z} \\ \xi_2 \sqrt{\omega_z + p_z} \\ \xi_1 \sqrt{\omega_z + p_z} \\ \xi_2 \sqrt{\omega_z - p_z} \end{bmatrix}$$

gdje je ξ proizvoljni dvokomponentni spinor i $\xi^T = (\xi_1 \ \xi_2)$. Na sličan način dobije se da je opće rješenje za $v(p)$ dano s

$$v(p) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_z - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z + p_z} \end{pmatrix} \eta \\ - \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_z + p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z - p_z} \end{pmatrix} \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \sqrt{\omega_z - p_z} \\ \eta_2 \sqrt{\omega_z + p_z} \\ \eta_1 \sqrt{\omega_z + p_z} \\ \eta_2 \sqrt{\omega_z - p_z} \end{bmatrix}$$

gdje je η proizvoljni dvokomponentni spinor i $\eta^T = (\eta_1 \ \eta_2)$. Za bazu rješenja s impulsom u smjeru z -osi možemo uzeti:

$$u(p_z, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_z - p_z} \\ 0 \\ \sqrt{\omega_z + p_z} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(p_z, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\omega_z + p_z} \\ 0 \\ \sqrt{\omega_z - p_z} \end{bmatrix}, \quad v(p_z, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\omega_z + p_z} \\ 0 \\ -\sqrt{\omega_z - p_z} \end{bmatrix}, \quad v(p_z, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_z - p_z} \\ 0 \\ -\sqrt{\omega_z + p_z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Za **bezmasena** polja ($m = 0$) vrijedi $\omega_z = |p_z|$. U slučaju $p_z > 0$ imamo

$$u(p_z, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2p_z} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(p_z, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v(p_z, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v(p_z, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2p_z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11.13)$$

Vidimo da u ovom slučaju rješenja za spinore imaju **fiksni helicitet**, što je u skladu s raspravom iz prošlog odjeljka.

Rješenja za opći impuls $\mathbf{p}$ se mogu dobiti naprosto primjenom operacije rotacije. No, postoji i brži način za dobijanje općeg rješenja. Uočimo da za $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ vrijedi:

$$\sqrt{\sigma \cdot p} = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_z - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z + p_z} \end{bmatrix}, \quad \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_z + p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_z - p_z} \end{bmatrix} \quad \text{za } p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$$

Koristeći Lorentz kovarijantnost možemo zaključiti da je generalizacija baze na opći impuls $\mathbf{p}$ dana s:

$$u(\mathbf{p}, s) = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \chi^{(s)} \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \chi^{(s)} \end{bmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, -s) = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \chi^{(s)} \\ -\sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \chi^{(s)} \end{bmatrix}, \quad s = \pm \frac{1}{2} \quad (4.11.14)$$

gdje je p^0 dan u (4.11.9) i gdje su dvokomponentni spinori $\chi^{(\frac{1}{2})}$ i $\chi^{(-\frac{1}{2})}$ definirani na sljedeći način

$$\chi^{(\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11.15)$$

Dobili smo opća rješenja jednadžbi (4.11.11) u Weylovoj reprezentaciji.

Zadatak 4.11.1: Pokažite da su spinorna rješenja u Weylovoj reprezentaciji (4.11.14) povezana relacijama:

$$v(\mathbf{p}, s)^* = -i\gamma_2 u(\mathbf{p}, s) \quad , \quad u(\mathbf{p}, s)^* = -i\gamma_2 v(\mathbf{p}, s) \quad (4.11.16)$$

Slobodno Diracovo polje je opisano općom superpozicijom rješenja (4.11.8) i (4.11.10):²⁶

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}s} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}s}^* v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x}) \quad (4.11.17)$$

gdje nakon kvantizacije koeficijenti $a_{\mathbf{p}s}$ i $b_{\mathbf{p}s}$ postaju operatori (pa shodno tome $b_{\mathbf{p}s}^* \rightarrow b_{\mathbf{p}s}^\dagger$) za koje ćemo kasnije pokazati da su operatori poništavanja čestice i pripadne antičestice. Stoga 4 nezavisna fizikalna stanja za svaki impuls $\mathbf{p}$ opisuju česticu i antičesticu spinova 1/2 koja svaka može biti u dva linearno nezavisna spinska stanja ($2 \times 2 = 4$).

Normalizacija i spinske sume

Odabir baze je povezan sa specifičnom normalizacijom koja je takva da vrijedi

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \chi^{(s)T} & \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \chi^{(s)T} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \chi^{(s')} & \sqrt{\sigma \cdot p} \chi^{(s')} \end{bmatrix} = 2\chi^{(s)T} \sqrt{(\sigma \cdot p)(\bar{\sigma} \cdot p)} \chi^{(s')}$$

Treba nam:

$$(\sigma \cdot p)(\bar{\sigma} \cdot p) = E_{\mathbf{p}}^2 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = E_{\mathbf{p}}^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

gdje smo koristili identitet (4.10.5) i $\chi^{(s)T} \chi^{(s')} = \delta_{ss'}$, što očito slijedi iz definicija (4.11.15). Na koncu dobijamo

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (4.11.18)$$

Na sličan način može se pokazati da vrijedi

$$\bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') = -2m\delta_{ss'} \quad , \quad \bar{u}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') = 0 \quad , \quad \bar{v}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = 0$$

Sličnom procedurom mogu se dobiti i sljedeće relacije koje će se pokazati vrlo korisne:

$$u(\mathbf{p}, s)^\dagger u(\mathbf{p}, s') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{ss'} \quad , \quad v(\mathbf{p}, s)^\dagger v(\mathbf{p}, s') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{ss'} \quad , \quad u(\mathbf{p}, s)^\dagger v(-\mathbf{p}, s') = 0 \quad (4.11.19)$$

Također će se pokazati kao vrlo važne relacije s *vanjskim (ili tenzorskim) produktom* sumiranim po spinovima:

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \not{p} + m \quad , \quad \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \not{p} - m \quad (4.11.20)$$

U gornjim relacijama pretpostavlja se da vanjski produkt daje matricu, tj. da nema sumiranja po indeksima spinora. Radi jasnoće, napišimo prvu jednakost sa svim indeksima ekspliciranim:

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u(\mathbf{p}, s)_a \bar{u}(\mathbf{p}, s)_b = (\gamma^\mu p_\mu + m)_{ab} \quad , \quad a, b = 1, \dots, 4$$

Zadatak 4.11.2: Dokažite (4.11.20).

²⁶Ovdje iznimno umjesto σ koristimo slovo s kao oznaku za spinska stanja, jer je oznaka σ ovdje rezervirana za Paulijeve matrice.

4.12 Kvantizacija spin 1/2 polja

4.12.1 Kvantizacija Diracovog polja

Razmotrimo sada kvantizaciju slobodnog Diracovog polja. U odjeljku 4.11.2 pokazali smo da se ono može napisati, koristeći Fourierov razvoj, kao

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}s} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}s}^\dagger v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} \right) \quad (4.12.1)$$

gdje ćemo uzeti da su spinori u i v normalizirani kao u (4.11.19)-(4.11.20). Slijedi da je

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi(x)^\dagger \gamma_0 = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(b_{\mathbf{p}s} \bar{v}(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}s}^\dagger \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} \right) \quad (4.12.2)$$

Koeficijenti a i b kvantizacijom postaju operatori koji djeluju na prostor stanja. Analogija s kvantiziranjem polja spina 0 i 1 sugerira nam da bi a i b trebali biti povezani s operatorima poništenja čestice i antičestice. Sad ćemo pokazati da je to naivno očekivanje u stvari točno.

Kao i u slučaju polja spina 1 primijenit ćemo prečac tako što ćemo napisati operatore energije, impulsa i naboja pomoću operatora a i b i iz toga zaključiti kakvu operatorsku algebru ovi operatori moraju zadovoljavati da bi dobili matematički i fizikalno konzistentnu relativističku kvantnu teoriju.

Koristeći Noetherin theorem lako se pokaže da je tenzor energije i impulsa dan s

$$T_{\mu\nu} = i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} [\bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi] = i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \quad (4.12.3)$$

=0 iz jedn. gib.

Slijedi da je Hamiltonijan dan s

$$H = \int d^3\mathbf{x} T_{00} = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} - b_{\mathbf{p}s} b_{\mathbf{p}s}^\dagger) \quad (4.12.4)$$

dok je impuls

$$\mathbf{P} = - \int d^3\mathbf{x} T_{0j} = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} - b_{\mathbf{p}s} b_{\mathbf{p}s}^\dagger) \quad (4.12.5)$$

Razmotrimo odmah i simetrije ove teorije. Diracov lagranžijan je invarijantan na $U(1)$ simetriju

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\chi} \psi(x) \quad , \quad \chi \in \mathbb{R}$$

iz koje slijedi postojanje sačuvane Noetherine struje

$$j^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.12.6)$$

i pripadnog sačuvanog naboja

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0 = q \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} + b_{\mathbf{p}s} b_{\mathbf{p}s}^\dagger) \quad (4.12.7)$$

Zadatak 4.12.1: Dokažite (4.12.3)-(4.12.7).

Dokazat ćemo (4.12.4), dok dokaze preostalih jednadžbi ostavljamo za vježbu. Uvrštavanje (4.12.1)-(4.12.2) daje

$$\begin{aligned} H &= i \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma_0 \psi \\ &= \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \sum_{s'=\pm\frac{1}{2}} \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2}} \left(b_{\mathbf{p}s} v(\mathbf{p}, s)^\dagger e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}s}^\dagger u(\mathbf{p}, s)^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \times \\ &\quad \times \left(a_{\mathbf{q}s'} u(\mathbf{q}, s') e^{-iq \cdot x} - b_{\mathbf{q}s'}^\dagger v(\mathbf{q}, s') e^{iq \cdot x} \right) \end{aligned}$$

Integracija po x daje $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ za članove proporcionalne $u^\dagger u$ i $v^\dagger v$, odnosno $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ za članove proporcionalne $v^\dagger u$ i $u^\dagger v$. Nakon integracije po $\mathbf{q}$ dobijamo sljedeće produkte

$$u(\mathbf{p}, s)^\dagger u(\mathbf{p}, s') = v(\mathbf{p}, s)^\dagger v(\mathbf{p}, s') = 2\omega_{\mathbf{p}} \delta_{ss'} \quad , \quad u(\mathbf{p}, s)^\dagger v(-\mathbf{p}, s') = v(\mathbf{p}, s)^\dagger u(-\mathbf{p}, s') = 0$$

gdje smo iskoristili (4.11.19). Upotrebom ovih relacija dobijamo upravo (4.12.4).

Ako bismo slijepo slijedili proceduru koju smo primjenili na poljima spina 0 i 1, nametnuli bismo komutatorsku algebru operatora stvaranja i poništavanja na operatore a , $a^\dagger$, b i $b^\dagger$. No, tu vidimo dva problema. Ta procedura bi nas vodila do toga da pripadne čestice zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, no mi znamo da u prirodi vidimo da sve čestice spina 1/2 zadovoljavaju u stvari **Fermi-Diracovu statistiku**, tj. da su **fermioni**. Drugi problem je čisto formalno-matematičke prirode. Naime, vidimo da ako bi primjenili komutatorsku algebru da bi operatori energije i impulsa dobili relativni minus faktor, što dovodi do problema da teorija ne bi posjedovala stanje najniže energije.

Oba ova problema se mogu riješiti ako se algebra operatora stvaranja i poništenja definira pomoću **antikomutatora**, $\{A, B\} \equiv AB + BA$, umjesto komutatora:

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p}s}, a_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} &= \{b_{\mathbf{p}s}, b_{\mathbf{p}'s'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \{a_{\mathbf{p}s}, a_{\mathbf{p}s'}\} &= \{b_{\mathbf{p}s}, b_{\mathbf{p}s'}\} = \{a_{\mathbf{p}s}, b_{\mathbf{p}s'}\} = \{b_{\mathbf{p}s}, a_{\mathbf{p}s'}^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (4.12.8)$$

U idućem odjeljku ćemo pokazati da je ovaj odabir u stvari **nužan** ako želimo dobiti konzistentnu relativističku teoriju. Ako primijenimo ove relacije u (4.12.4), (4.12.5) i (4.12.7) dobijamo redom:

$$H = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} + b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s}) - 4E_0 \quad (4.12.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} + b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s}) \\ Q &= q \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} - b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s}) \end{aligned} \quad (4.12.10)$$

Uočite da je oblik potpuno isti kao u slučajevima spina 0 i 1 koja smo proučavali do sada.²⁷ Jedina razlika je da operatori stvaranja i poništavanja zadovoljavaju antikomutacijske umjesto komutacijskih relacija. Usprkos toj razlici

²⁷U stvari, iz (4.12.7) slijedi da bi Q trebao sadržavati aditivnu konstantu $2Q_0$, gdje je Q_0 dan u (3.3.11), pa bi ispalo da vakuum posjeduje beskonačnu gustoću naboja. Kao i u slučaju kompleksnog skalarnog polja, ovaj problem se može jednostavno riješiti ispravnim odabirom uređenja operatora u izrazu za struju. Lako se može pokazati da ako operator gustoće struje umjesto s (4.12.6) definiramo s

$$j^\mu = \frac{q}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}^c \gamma^\mu \psi^c)$$

što je identično (4.12.6) u klasičnoj teoriji, pripadni naboj će biti dan s (4.12.10).

procedura konstrukcije prostora stanja ide potpuno isto kao u prijašnjim bozonskim primjerima. Krećemo od vakuuma $|0\rangle$ koji zadovoljava:

$$a_{\mathbf{p}s}|0\rangle = 0 \quad , \quad b_{\mathbf{p}s}|0\rangle = 0 \quad (4.12.11)$$

Potom stvaramo bazu u prostoru stanja djelovanjem operatora $a_{\mathbf{p}s}^\dagger$ i $b_{\mathbf{p}s}^\dagger$. Normalizacija koju primjenjuje je takva da "najniža" stanja u konstrukciji, koja sadrže po jedan kvant tipa a ili b , su definirana kao:

$$|a\mathbf{p}s\rangle \equiv \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle \quad , \quad |b\mathbf{p}s\rangle \equiv \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}s}^\dagger |0\rangle \quad (4.12.12)$$

i analogno za stanja koja sadrže više kvanata.

Kvanti pobuđenja koje stvaraju ovi operatori ponašaju se kao slobodne čestice energije $E_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}}$, impulsa $\mathbf{p}$ i spinskog stanja s . Razlika između dva tipa čestica je da tip- a nosi količinu naboja Q jednaku $+q$, a tip- b jednaku $-q$. Vidimo da je čestica tipa b antičestica od čestice tipa a , $b = a^c$ (i obratno). Razlika koju donose antikomutatori je u statistici. U to svrhu razmotrimo što se zbiva ako u dvočestičnom stanju zamijenimo mjesta dvjema česticama

$$|a\mathbf{p}_1s_1, a\mathbf{p}_2s_2\rangle \equiv \sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2} a_{\mathbf{p}_1s_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2s_2}^\dagger |0\rangle = -\sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2} a_{\mathbf{p}_2s_2}^\dagger a_{\mathbf{p}_1s_1}^\dagger |0\rangle \equiv -|a\mathbf{p}_2s_2, a\mathbf{p}_1s_1\rangle$$

Vidimo da su stanja, pa onda i valne funkcije, **antisimetrične** na izmjenu mjesta identičnih čestica, što znači da zadovoljavaju Fermi-Diracovu statistiku pa su spin 1/2 čestice **fermioni**.

Konstrukcija Fockovog prostora i interpretacija stanja (osim statistike) jednaka je neovisno o tome zadovoljavaju li komutatori komutacijske ili antikomutacijske relacije, što je posljedica matematičkih identiteta:

$$[AB, C] = A[B, C] - [C, A] = A\{B, C\} - \{C, A\}$$

gdje desna strana ima isti oblik ako je izražena pomoću komutatora ili antikomutatora.

Zadatak 4.12.2: Napravite eksplicitnu konstrukciju Fockovog prostora i pokažite da je uistinu razapet slobodnočestičnim stanjima konačnog ali neograničenog broja koja posjeduju gore navedena svojstva.

Iz (4.12.9) slijedi da je energija vakuuma jednaka $-4E_0$, gdje je E_0 isti kao u (3.2.14). Pošto je, ako zanemarimo gravitaciju, samo razlika energija u odnosu na vakuum mjerljiva, kao i prije iz praktičnih razloga postaviti ćemo ju "rukom" na nulu. Ipak, uočite zanimljivu stvar da **fermioni doprinose energiji vakuuma suprotnim predznakom nego bozoni**. Faktor 4 dolazi od toga što teorija za dani impuls $\mathbf{p}$ ima 4 fizikalno propagirajuća stupnja slobode (čestica i antičestica, svaka po dva spinska stanja). **Ovaj faktor i predznak u izrazu za kvantnu energiju vakuuma su univerzalno svojstvo svih relativističkih slobodnih polja, neovisno o spinu.** Stoga, ukoliko u nekoj teoriji ima točno jednak broj bozonskih i fermionskih stupnjeva slobode ovaj doprinos kvantnoj energiji vakuuma se krati i daje nulu. To je upravo ono što se događa u **supersimetričnim teorijama** u kojima simetrija zahtijeva da za svaki bozonski stupanj slobode mora postojati pripadni fermionski stupanj slobode.

4.12.2 Kanonski antikomutatori. Antikomutirajući brojevi.

Koristeći kanonske antikomutacijske relacije (4.12.8) za operatore stvaranja i poništenja možemo izvesti istovremenske kanonske relacije za polja. Antikomutacijska priroda ovih relacija prisiljava nas da razmotrimo istovremenske kanonske **antikomutacijske** relacije. Primjenom (4.12.8) i (4.11.20) lako se pokaže da vrijedi:

$$\{\psi_j(t, \mathbf{x}), \psi_k(t, \mathbf{y})^\dagger\} = \delta_{jk} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \{\psi_j(t, \mathbf{x}), \psi_k(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (4.12.13)$$

Postoji jednostavan način za shvatiti ovaj rezultat ako uočimo da nam lagranžijan (4.10.24) govori da je kanonska gustoća impulsa $\pi(x)$ pridružena polju ψ dana s:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x) \quad (4.12.14)$$

Ako upotrijebimo proceduru kanonske kvantizacije, diskutiranu u odjeljku 3.1, uz izuzetak da koristimo antikomutatore umjesto komutatora, dobijamo upravo (4.12.13). Dolazimo do sljedeće generalizacije: U slučaju fermionske teorije, kanonska kvantizacija kaže da se prelazak s klasične na kvantnu fiziku postiže sljedećom korespondencijom:

$$\{ \quad , \quad \}_P \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} \{ \quad , \quad \} \quad (\text{fermioni})$$

gdje je s P označena Poissonova zagrada. Naravno, i za fermione vrijede sve napomene koje smo iznijeli u odjeljku 3.1 za bozone.²⁸

Kanonski antikomutatori imaju važnu posljedicu vezanu uz klasičnu teoriju fermionskih polja. Kao što znamo, u određenom smislu klasični režim se dobija u limesu $\hbar \rightarrow 0$. Iz (4.12.13) slijedi da komponente polje $\psi(x)$ i $\psi^\dagger$ u klasičnom režimu **antikomutiraju**. To znači da u klasičnom limesu fermionska polja nisu uobičajene funkcije koje poprimaju vrijednosti na prostoru realnih ili kompleksnih brojeva, jer ovi komutiraju na množenje. "Klasična" fermionska polja su opisana posebnim, **antikomutirajućim brojevima** koji se nazivaju **Grassmanovi brojevi**. Pošto smo već pokazali da su mjerljive veličine nužno izgrađene od parnog broja spinornih polja, ovo neobično "klasično" svojstvo nije problematično. Mi se nećemo baviti Grassmanovim brojevima na ovom kolegiju, no napomenimo da su oni nužni za primjenu kvantizacije pomoću integrala po stazama na fermionske stupnjeve slobode.

4.12.3 Propagator za Diracovo polje

Vidjeli smo da je za bozonska polja propagator, koji je jedan od osnovnih gradivnih elemenata u Feynmanovom perturbativnom računu, definiran kao T -uređena korelacijska funkcija slobodnih polja ϕ i $\phi^\dagger$. Slično vrijedi i za Diracovo polje, uz dva dodatna elementa. Kao prvo, vidjeli smo da se u Lorentz kovarijantnim izrazima (poput, npr. lagranžijana) polje $\psi^\dagger$ uvijek pojavljuje u kombinaciji s γ_0 , tj. kroz $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$. Stoga, da bismo dobili manifestno Lorentz kovarijantne izraze trebamo definirati propagator s $\bar{\psi}$ umjesto $\psi^\dagger$:

$$D_{rs}(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi_j(x) \bar{\phi}_k(y) \} | 0 \rangle \quad (4.12.15)$$

Kao drugo, analiza Wickovog teorema za fermionska polja pokazuje da antikomutativnost operatora u izraze za normalno i T - uređenje prirodno unosi faktore $(-1)^P$ ispred produkata operatora, gdje je P parnost permutacije danog produkta. Tako se normalno uređenje za fermionske operatore stvaranja i poništavanja prirodno definira tako da je, npr.

$$: a_{p\sigma} a_{p'\sigma'}^\dagger : = -a_{p'\sigma'}^\dagger a_{p\sigma}$$

dok se T -uređeni produkt koji se javlja u (4.12.15) definira na način

$$T \{ \psi_j(x) \bar{\psi}_k(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \psi_j(x) \bar{\psi}_k(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_k(y) \psi_j(x) \quad (4.12.16)$$

Radi razloga koji će postati jasniji kasnije, razmotrimo prvo vremenski neuređenu korelacijsku funkciju. Iz (4.12.1), (4.12.8) i (4.12.11) slijedi

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_j(x) \bar{\psi}_k(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{q}}}} \sum_{s=\pm 1/2} \sum_{s'=\pm 1/2} u_j(\mathbf{p}, s) \bar{u}_k(\mathbf{q}, s') e^{i(q \cdot y - p \cdot x)} \langle 0 | a_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{q}\sigma'}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{s=\pm 1/2} u_j(\mathbf{p}, s) \bar{u}_k(\mathbf{p}, s) \end{aligned}$$

²⁸To znači da ako teorija posjeduje veze, umjesto Poissonovih zagrada treba upotrijebiti tzv. Diracove zgrade. Govoreći o tome, uočite da Diracovo polje posjeduje veze jer je jednačba (4.12.14) u stvari jednačba veze. Račun pokazuje da su Diracove zgrade između ψ i $\psi^\dagger$ polja jednake Poissonovima u ovom slučaju.

Sad možemo iskoristiti (4.11.20) za dobijanje konačnog rezultata:

$$\langle 0 | \psi_j(x) \bar{\psi}_k(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} (\not{p} + m)_{jk} e^{-ip \cdot (x-y)} = (-i\not{\partial}_x + m)_{jk} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (4.12.17)$$

Na sličan način dobije se:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_k(y) \psi_j(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} (\not{p} - m)_{jk} e^{ip \cdot (x-y)} = (i\not{\partial}_x - m)_{jk} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{ip \cdot (x-y)} \quad (4.12.18)$$

Obratite pažnju da ove relacije vrijede bez obzira da li koristimo kvantizaciju s komutatorima ili antikomutatorima. Razliku između bozonske i fermionske kvantizacije u izrazu za propagator stvara isključivo predznak u drugom članu u definiciji T -uređenja.

Koristeći (4.12.17), (4.12.18), (4.12.16) i identiteta (3.7.17) dobijamo da je propagator za Diracovo polje dan s:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = (-i\not{\partial} + m) D_F(x - y)$$

gdje je D_F propagator za polje spina 0.

Uočimo da je Feynmanov propagator za Diracovo polje u p -prostoru dan s

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

4.12.4 Kvantizacija Weylovog polja

Vidjeli smo da se Weylova polja $\psi_{R,L}$, kao i Majorana polje ψ_M , mogu napisati kao Diracova polja koja zadovoljavaju neke dodatne uvjete. U slučaju Weylovih polja ti dodatni uvjeti su $m = 0$ i (4.11.4) pa imamo

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \psi(x) \quad , \quad \psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \psi(x)$$

gdje je $\psi(x)$ Diracovo polje (4.11.17). U formalnom smislu jedina bitna razlika u odnosu na bezmaseno Diracovo polje je da projekcija odbaci dva stupnja slobode tako da za svaki $\mathbf{p}$ postoje dva linearno nezavisna stupnja slobode koja zadovoljavaju ista svojstva kao i u Diracovoj teoriji. Otprije iz analize "klasičnog" polja znamo da su ta stanja svojstvena stanja heliciteta. Nakon kvantizacije želimo znati koja su to dva stanja.

Da bi dobili odgovor na ovo pitanje dovoljno ga je razmotriti za jedan proizvoljni impuls $\mathbf{p}$, za koji ćemo ponovo uzeti da je $\mathbf{p} = p_z \hat{z}$ s $p_z > 0$. U tom slučaju odgovor možemo dobiti primjenom projektora kiralnosti na (4.11.13) i glasi:

Slobodno polje $\psi_R(x)$ vodi na teoriju u kojoj postoje samo čestica desnog heliciteta i aničestica lijevog heliciteta, dok slobodno polje $\psi_L(x)$ vodi na teoriju u kojoj postoje samo čestica lijevog heliciteta i aničestica desnog heliciteta.

4.12.5 Kvantizacija Majorana polja

Majorana polje je određeno uvjetom $\psi_M = -i\gamma_2 \psi_M^*$, pa koristeći (4.11.16) lako se pokaže da je njegov Fourierov raspis dan s

$$\psi_M(x) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\mathbf{p}s} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}s}^\dagger v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} \right)$$

Vidimo da u Majorana polju postoji samo jedna vrsta operatora stvaranja i poništenja, tj. samo jedna vrsta čestica, koja može biti u oba spinska stanja.

Majoranina čestica je sama sebi antičestica.

Stoga se kaže da je Majoranino polje **realno**.

4.13 Spin i statistika

Statistiku čestice definiramo kao način na koji se mijenja vektor stanja (ili valna funkcija) na zamjenu mjesta para jednakih čestica koje se nalaze u danom stanju. Na dosadašnjem studiju naučili ste da postoje dvije vrste statistika: **Bose-Einsteinova** (simetrična na zamjenu) i **Fermi-Diracova** (antisimetrična na zamjenu) i da prvu zadovoljavaju sve čestice cjelobrojnog spina, a drugu sve čestice polucjelobrojnog spina. Na taj način su sve čestice podijeljene u dvije grupe kad govorimo o statistici: **bozoni** i **fermioni**. Sigurno su se neki od vas već prije zapitali zašto je spin povezan sa statistikom i zašto u prirodi ne vidimo neke druge statistike.

Vidjeli smo da smo na ovom kolegiju čestice spina 0 i 1 kvantizirali tako da zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, a čestice spina 1/2 tako da zadovoljavaju Fermi-Diracovu statistiku. Da li je to bilo nužno ili smo mogli i drukčije? Odgovor je da je to **nužno**, a razlog je **teorem o spinu i statistici** koji vrijedi u svim relativističkim kvantnim teorijama polja i koji kaže da kad je broj prostorno-vremenskih dimenzija veći od 3, čestice cjelobrojnog spina moraju zadovoljavati Bose-Einsteinovu statistiku, a čestice polucjelobrojnog spina Fermi-Diracovu statistiku. Postojanje ovog teorema je izuzetno značajna stvar, pogotovo ako imamo na umu da u nerelativističkoj kvantnoj mehanici ne postoje nikakvi zahtjevi na vezu između spina i statistike.

Postoji nekoliko kriterija za dokazivanje teorema:

1. Svojstva trajektorija po kojima možemo izmijeniti čestice.
2. Lorentz invarijantnost S-matrice.
3. Stabilnost vakuuma (postojanje stanja najniže energije).
4. Kauzalnost.

U ovom dijelu razmotrit ćemo kako ovi kriteriji djeluju na ograničavanje mogućnosti za izbor statistike, te na samom kraju dati pojednostavljeni dokaz spin-statistika teorema.

4.13.1 Statistika – naivno

Vidjeli smo da Poincaréova simetrija vodi na Fockov prostor stanja izgrađen od jednočestičnih stanja karakteriziranih s kvantnim brojevima $\mathbf{p}$ (impuls), σ (projekcija spina na neku os) i n (tip čestice koji određuje njenu masu, spin i način kako ulazi u međudjelovanje). Stanje koje se sastoji od r čestica označavamo s

$$|n_1 \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r \mathbf{p}_r \sigma_r\rangle$$

Konvencija koju smo koristili za normaliziranje gornje baze je

$$\begin{aligned} \langle n_1 \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r \mathbf{p}_r \sigma_r | n'_1 \mathbf{p}'_1 \sigma'_1, \dots, n'_l \mathbf{p}'_l \sigma'_l \rangle &= \delta_{rl} \prod_{j=1}^r \delta_{n_j n'_j} \delta_{\sigma_j \sigma'_j} 2\omega_j (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}'_j) \\ &+ (\text{doprinos permutacija}) \end{aligned} \quad (4.13.1)$$

Ukoliko su sve čestice danog tipa **identične i nerazpoznatljive**, redoslijed u kojem su napisane unutar vektora stanja po definiciji opisuje **isto fizikalno stanje**, pa zamjena mjesta dvije identične čestice istog tipa može samo dovesti do promjene faze, tj.

$$|\dots, n \mathbf{p}_j \sigma_j, \dots, n \mathbf{p}_k \sigma_k, \dots\rangle = \alpha |\dots, n \mathbf{p}_k \sigma_k, \dots, n \mathbf{p}_j \sigma_j, \dots\rangle, \quad |\alpha| = 1 \quad (4.13.2)$$

Ključno pitanje je: O čemu može ovisiti α ? O iznosima impulsa i projekcija spinova ne može, jer bi Lorentz kovarijantnost teorije diktirala da α daje netrivialnu jednodimenzionalnu reprezentaciju Lorentzove grupe što ne postoji. Moglo bi se (olako) zaključiti da α može ovisiti samo o tipu čestica n koje permutiramo, $\alpha = \alpha_n$. Ako bi to bilo tako onda bi ponovna zamjena istog para čestica morala dati potpuno jednak faktor α_n pa pošto dvije zamjene mjesta istog para čine identičnu operaciju, mora vrijediti

$$\alpha_n^2 = 1 \implies \alpha_n = \pm 1$$

Kao posljedicu dobijamo da sve čestice s obzirom na statistiku moraju spadati u jednu od dvije kategorije:

- $\alpha_n = +1 \implies$ valna funkcija simetrična na zamjenu čestica $\longrightarrow$ čestica n je **bozon**
- $\alpha_n = -1 \implies$ valna funkcija antisimetrična na zamjenu čestica $\longrightarrow$ čestica n je **fermion**

Uvedimo sada operatore stvaranja i poništenja čestice tipa n , impulsa $\mathbf{p}$ i projekcija spina σ , $a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ i $a_{n\mathbf{p}\sigma}$, na sljedeći način

$$|n_1\mathbf{p}_1\sigma_1, \dots, n_r\mathbf{p}_r\sigma_r\rangle = \sqrt{2\omega_1} \cdots \sqrt{2\omega_r} a_{n_1\mathbf{p}_1\sigma_1}^\dagger a_{n_r\mathbf{p}_r\sigma_r}^\dagger |\Omega\rangle \quad (4.13.3)$$

Statistika u kombinaciji s normalizacijskim uvjetom (4.13.1) jednoznačno određuje algebru operatora stvaranja i poništavanja u smislu da bozoni zadovoljavaju **komutacijske relacije** oblika

$$[a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad , \quad [a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}] = 0 \quad (\text{bozoni}) \quad (4.13.4)$$

dok fermioni zadovoljavaju **antikomutacijske relacije**

$$\{a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad , \quad \{a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}\} = 0 \quad (\text{fermioni}) \quad (4.13.5)$$

Koje relacije zadovoljavaju operatori koji pripadaju različitim česticama? U stvari, pošto su različite čestice međusobno raspoznatljive, odabir je uglavnom stvar konvencije. U okviru formalizma kvantnih teorija polja pokazuje se praktično spretnim uzeti da operatori stvaranja i poništavanja koji pripadaju različitim bozonima ($n \neq n'$) ili bozonu i fermionu komutiraju

$$[a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}] = 0 \quad (\text{bozon-bozon ili bozon-fermion})$$

dok za različite fermione ($n \neq n'$) antikomutiraju

$$\{a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger\} = 0 \quad , \quad \{a_{n\mathbf{p}\sigma}, a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}\} = 0 \quad (\text{fermion-fermion})$$

Zadatak 4.13.1: Dokažite (4.13.4) i (4.13.5).

Dokažimo prvo desne jednakosti u (4.13.4) i (4.13.5). Iz definicije (4.13.3) i simetričnosti stanja na izmjenju čestica očito je da

$$|n\mathbf{p}\sigma, n'\mathbf{p}'\sigma', \beta\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}} a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger |\beta\rangle$$

gdje β označava proizvoljnu kolekciju čestica. Na isti način možemo napisati

$$|n'\mathbf{p}'\sigma', n\mathbf{p}\sigma, \beta\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{n'\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger |\beta\rangle$$

Gornja stanja imaju sljedeće svojstvo

$$|n\mathbf{p}\sigma, n'\mathbf{p}'\sigma', \beta\rangle = \pm |n'\mathbf{p}'\sigma', n\mathbf{p}\sigma, \beta\rangle$$

gdje je plus predznak za bozone, a minus za fermione. Pošto stanja u (4.13.3) čine bazu u prostoru stanja, možemo zaključiti da vrijedi operatorska relacija

$$a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{n\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger = \pm a_{n\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger$$

gdje je ponovo plus predznak za bozone a minus za fermione. Nakon kompleksne konjugacije gornja jednakost postaje identična desnim jednakostima u (4.13.4) i (4.13.5).

Lijeve jednakosti u (4.13.4) i (4.13.5) se mogu dokazati razmatranjem skalarnog produkta između stanja $|n\mathbf{p}\sigma, \beta\rangle$ i $|n\mathbf{p}'\sigma', \beta\rangle$ i primjene (4.13.1). Dokaz ostavljamo studentima za vježbu.

Komentari:

1. Argument da α može ovisiti samo o n je naivan, no slučajno je točan kad je dimenzionalnost prostor-vremena veća od 3. Kad je prostor-vrijeme trodimenzionalno ili dvodimenzionalno argument ne vrijedi i imamo dodatne mogućnosti. To ćemo kasnije pokazati.
2. Još nismo uspostavili vezu između spina i statistike.

Prvi cilj nam je uspostaviti vezu između spina i statistike, koju ćemo demonstrirati na primjerima slobodnih polja spina 0 i 1/2 tako što ćemo pretpostaviti da čestice mogu biti samo bozoni i fermioni (u skladu s naivnim argumentom). Potom ćemo se ozbiljnije pozabaviti pitanjem koje vrijednosti može poprimiti faza α u (4.13.2) i pokazati da naivni argument ne vrijedi u 2 i 3 prostorno-vremenske dimenzije.

4.13.2 Stabilnost vakuuma

Sad krećemo na sistematično razmatranje pitanja da li je odabir statistike koji smo do sada napravili (spin 0 i 1 bozoni, spin 1/2 fermioni) bila **nužnost** ili smo mogli upotrijebiti i suprotne statistike. Kao primjere za ovu analizu radi jednostavnosti uzet ćemo spin 0 i spin 1/2 polja, no argumentacija u stvari vrijedi za polja svih spinova.

Kompleksno skalarno polje (spin 0)

Kao što smo vidjeli u odjeljku 3.3, ako napravimo Fourierov razvoj polja spina 0 kao u (3.3.10) dobijamo da je hamiltonijan dan s

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger \right)$$

Nametanjem komutatora na operatore stvaranja i poništenja vidjeli smo da dobijemo Fockov prostor stanja koji se sastoji od bozonske čestice i pripadne antičestice. Da li je moguće kvantizirati ovo polje kao fermionsko, tj. nametnuti antikomutatore na operatore stvaranja i poništenja? U tom slučaju hamiltonijan bi bio (do na nevažnu konstantu)

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right)$$

Ako sada probamo na standardni način konstruirati prostor stanja tako da a i b igraju ulogu operatora poništenja, a $a^\dagger$ i $b^\dagger$ operatore stvaranja, očito je da će kvanti koje stvaraju operatori $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ nositi **negativnu energiju** jednaku $-\omega_{\mathbf{p}}$. To znači da **energija ne bi bila ograničena odozdo, tj. ne bi postojao vakuum kao stanje najniže energije**. Pošto uvođenje međudjelovanja u pravilu dopušta sve prijelaze između stanja koji nisu zabranjeni simetrijama teorije, sustav opisan ovakvom teorijom bi bio *nestabilan* jer bi postojala vjerojatnost stalnog generiranja antičestica “iz ničega”.

U stvari, ovdje postoji jedno “rješenje” problema nestabilnosti fermionski kvantiziranog slobodnog polja spina 0. Ako zamijenimo uloge operatorima b i $b^\dagger$ pa pri konstrukciji Fockovog prostora uzmemo da su b operatore stvaranja a $b^\dagger$ operatori poništenja (obratite pažnju da antikomutacijske relacije ne razlikuju b od $b^\dagger$ jer ulaze simetrično), dobit ćemo da je energija pozitivna i da problem nestabilnosti vakuuma ne postoji. No, kasnije ćemo pokazati da je ovakva kvantizacija ipak u suprotnosti sa zahtjevima Lorentz kovarijantnosti i kauzalnosti.

Diracovo polje (spin 1/2)

Razmotrimo sada isto pitanje za slučaj slobodnog Diracovog polja. Hamiltonijan u ovom slučaju je dan u (4.12.4). Ako bi pokušali kvantizirati ovu teoriju koristeći bozonske komutatore umjesto antikomutatora, dobili bi

$$H = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}s}^\dagger a_{\mathbf{p}s} - b_{\mathbf{p}s}^\dagger b_{\mathbf{p}s} \right) \quad (4.13.6)$$

Zbog minus predznaka ispred drugog člana vidimo da ne postoji stanje najniže energije pa bi uvođenje međudjelovanja dovelo do nestabilnosti teorije. Uočite da nam ovdje ne pomaže trik zamjene uloga b i $b^\dagger$ jer se zbog prirode komutatora predznak ne mijenja zamjenom mjesta ovih operatora. Zaključak je da zahtjev stabilnosti vakuuma odbacuje mogućnost kvantiziranja Diracovog polja komutatorima, tj.

Spin 1/2 čestice ne mogu biti bozoni.

4.13.3 Kauzalnost

Za operatore $\mathcal{O}_1(x)$ i $\mathcal{O}_2(x)$ koji reprezentiraju neke dvije lokalne mjerljive veličine **kauzalnost** zahtijeva

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0 \quad \text{za} \quad (x - y)^2 < 0 \quad (4.13.7)$$

Ako to ne bi vrijedilo, mjerenje ovih veličina na udaljenostima prostornog tipa bi bilo povezano, što bi se moglo iskoristiti za **slanje informacija brže od svjetlosti u vakuumu**. Ako bi to bilo moguće, specijalna relativnost nam kaže da bi automatski bilo moguće **slati informacije u prošlost**. Kako ni jedno ni drugo nije opaženo, obično se nameće zahtjev (4.13.7).

Vidjeli smo da su lokalne mjerljive veličine u teorijama polja obično reprezentirane operatorima koji su kvadratični (tj. bilinearni) u elementarnim poljima (npr. gustoća energije, impulsa, angularnog momenta, naboja), pa ćemo razmotriti operatore oblika²⁹

$$\mathcal{O}(x) = \phi_r(x)^\dagger \phi_n(x)$$

Pošto vrijedi identitet

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B \\ &= A\{B, C\}D - AC\{B, D\} + \{A, C\}DB - C\{A, D\}B \end{aligned}$$

vidimo da će (4.13.7) uvijek biti zadovoljeno ukoliko sva elementarna polja komutiraju ili antikomutiraju na udaljenostima prostornog tipa.

Kompleksno skalarno polje (spin 0)

Ako pretpostavimo **bozonsku** statistiku dobijamo

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)^\dagger] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_q}} \left(e^{i(p \cdot y - q \cdot x)} [a_q, a_p^\dagger] + e^{-i(p \cdot y - q \cdot x)} [b_q^\dagger, b_p] \right) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) \end{aligned}$$

²⁹Za fermionska polja mjerljive veličine nužno imaju paran broj elementarnih operatora u umnošku.

Ako označimo $s \equiv x^0 - y^0$ i $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ gornji izraz daje

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)^\dagger] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{2\omega_p} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(e^{-i\omega_p t} e^{ipr \cos \theta} - e^{i\omega_p t} e^{-ipr \cos \theta} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\sin(t\omega_p)}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{\sin(pr)}{pr} \\ &\equiv i D(t, r) \end{aligned} \quad (4.13.8)$$

Za bezmaseno polje vrijedi $\omega_p = p$ i integracija se može lako napraviti. Rezultat je:

$$D(t, r) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(r+t) - \delta(r-t)] \implies D(r, t) \neq 0 \quad \text{samo za} \quad (x-y)^2 = 0$$

iz čega slijedi da je kauzalnost zadovoljena.

Za masivno polje, $m \neq 0$, integral nije trivijalan, no može se izraziti pomoću poznatih specijalnih funkcija:

$$D(t, r) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{za } t > r \\ 0 & \text{za } r > |t| \\ -J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{za } t < -r \end{cases}$$

gdje je J_0 Besselova funkcija. Pošto samo srednja linija ($r > |t|$) odgovara $(x-y)^2 < 0$, vidimo da je kauzalnost zadovoljena.

Pokazali smo da je

$$[\varphi(x), \varphi(y)^\dagger] = 0 \quad \text{za} \quad (x-y)^2 < 0$$

neovisno o iznosu mase. Slično se može pokazati i za komutator $[\varphi(x), \varphi(y)]$. Možemo zaključiti:

Slobodno spin 0 polje kvantizirano u skladu s bozonskom statistikom je **kauzalno**.

Ukoliko kvantiziramo ovo polje koristeći **fermionsku** statistiku, trebamo izračunati antikomutatore. Sličnom procedurom sada dobijamo

$$\begin{aligned} \{\varphi(x), \varphi(y)^\dagger\} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_q}} \left(e^{i(p \cdot y - q \cdot x)} \{a_q, a_p^\dagger\} + e^{-i(p \cdot y - q \cdot x)} \{b_q^\dagger, b_p\} \right) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} + e^{ip \cdot (x-y)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\cos(t\omega_p)}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{\sin(pr)}{pr} \\ &\equiv i D_1(t, r) \end{aligned} \quad (4.13.9)$$

Razmotrimo ponovo prvo slučaj $m = 0$ za koji se lako pokaže da je:

$$D_1(t, r) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r^2 - t^2} \implies D_1(r, t) \neq 0 \quad \text{za} \quad (x-y)^2 < 0$$

Vidimo da je narušena kauzalnost.

U slučaju $m \neq 0$ ponovo možemo izraziti integral pomoću specijalnih funkcija:

$$D_1(t, r) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} Y_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{za } |t| > r \\ H_0(im\sqrt{t^2 - r^2}) & \text{za } |t| < -r \end{cases}$$

gdje je Y_0 Besselova funkcija druge vrste, a $H_0 = J_0 + iY_0$ Hankelova funkcija. Pošto je poznato da je općenito $H_0(ix) \neq 0$ za $x > 0$ slijedi da je

$$\{\varphi(x), \varphi(y)^\dagger\} \neq 0 \quad \text{za} \quad (x-y)^2 < 0$$

Kvantiziranje slobodnog polja spina 0 fermionskom statistikom vodi na **narušenje kauzalnosti**.

Diracovo polje (spin 1/2)

Ponovimo istu proceduru za slobodno Diracovo polje. Ako bi ga htjeli kvantizirati koristeći **bozonsku** statistiku dobili bi:

$$\begin{aligned} [\psi(x), \bar{\psi}(y)] &= \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left(u(p, s) \bar{u}(p, s) e^{-ip \cdot (x-y)} - v(p, s) \bar{v}(p, s) e^{ip \cdot (x-y)} \right) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left[(\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x-y)} - (\not{p} - m) e^{ip \cdot (x-y)} \right] \\ &= i(i\not{\partial} + m) D_1(t, r) \end{aligned}$$

gdje je $D_1(t, r)$ definiran u (4.13.9). Pošto smo vidjeli da $D_1(t, r)$ ne općenito ne iščezava za prostorne udaljenosti, isto vrijedi i za derivaciju pa možemo zaključiti

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)] \neq 0 \quad \text{za} \quad (x-y)^2 < 0$$

Kvantiziranje slobodnog polja spina 1/2 bozonskom statistikom vodi na **narušenje kauzalnosti**.

Ukoliko kvantiziramo slobodno Diracovo polje **fermionskom** statistikom dobije se:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \dots = i(i\not{\partial} + m) D(t, r) \quad (4.13.10)$$

gdje je funkcija D definirana u (4.13.8). Pošto smo vidjeli da $D(t, r)$ iščezava za prostorne udaljenosti, isto će vrijediti i za derivaciju pa slijedi

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = 0 \quad \text{za} \quad (x-y)^2 < 0$$

Isto to se može pokazati i za antikomutator $\{\psi(x), \psi(y)\}$, pa možemo zaključiti:

Slobodno polje spina 1/2 kvantizirano fermionskom statistikom je **kauzalno**.

Rezultati se generaliziraju na proizvoljni spin, na način da kvantiziranje polja bozonskom statistikom vodi na kauzalnost za polja cjelobrojnog spina i nekauzalnost za polja polucjelobrojnog spina, dok kvantiziranje fermionskom statistikom vodi na obrnuti rezultat.

Zadatak 4.13.2: Dokažite (4.13.10).

4.13.4 Lorentz invarijantnost S-matrice

U Feynmanovom računu za S-matricu osnovni gradivni elementi su čvorovi i propagatori za slobodna polja. U pravilu, za Lorentz kovarijantnost S-matrice nužan uvjet je da su propagatori kovarijantni.³⁰ Sjetimo se da su propagatori T-uređene korelacijske funkcije slobodnih polja

$$D_{rs}(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi_r(x) \phi_s(y)^\dagger \} | 0 \rangle$$

Oprez: Za fermionska polja neparna permutacija redoslijeda operatora u T-uređenju mijenja predznak (posljedica zamjene mjesta operatora stvaranja i poništenja u izvodu Wickovog teorema) pa je

$$T \{ \psi_r(x) \psi_s(y)^\dagger \} = \theta(x^0 - y^0) \psi_r(x) \psi_s(y)^\dagger - \theta(y^0 - x^0) \psi_s(y)^\dagger \psi_r(x)$$

Slično vrijedi i za normalno uređenje operatora stvaranja i poništenja pa tako npr. za fermionske operatore vrijedi

$$: a_{p\sigma} a_{p'\sigma'}^\dagger : = -a_{p'\sigma'}^\dagger a_{p\sigma}$$

Sad možemo provjeriti kako odabir statistike utječe na svojstva Lorentz kovarijantnosti propagatora.

Kompleksno skalarno polje (spin 0)

Vidjeli smo da primjena **bozonske** statistike na slobodno spin 0 polje daje za propagator

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y)^\dagger \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv D_F(x - y)$$

Ovaj propagator je očito **Lorentz kovarijantan** (točnije, skalar).

Ukoliko kvantiziramo ovo polje pomoću **fermionske** statistike sličan račun daje

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y)^\dagger \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{p^0}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}}_{\text{nije L. inv.}} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Vidimo da se javlja ekstra faktor koji nije Lorentz invarijantan pa narušava Lorentz kovarijantnost propagatora.

Kvantiziranje slobodnog polja spina 0 fermionskom statistikom vodi na **narušenje** Lorentzove simetrije.

Diracovo polje (spin 1/2)

U slučaju slobodnog Diracovog polja vidjeli smo da je umjesto $\psi^\dagger$ spretnije raditi s poljem $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$. Vidjeli smo da su obični (vremenski neuređeni) korelatori, koji su dani u (4.12.17) i (4.12.18), neovisni o statistici.

Pokazali smo da kvantiziranje Diracovog polja **fermionskom** statistikom daje za Feynmanov propagator

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = (-i\not{\partial} + m) D_F(x - y)$$

što je **Lorentz kovarijantno**.

³⁰Postoji mogućnost da se nekovarijantni dio propagatora poništi s nekovarijantnim dijelovima u čvorovima. To se događa npr. kad se elektrodinamika kvantizira u nekom od nekovarijantnih baždarenja. U pravilu se ovakve situacije mogu prevesti u ekvivalentnu definiciju u kojoj su i čvorovi i propagatori kovarijantni.

Ukoliko kvantiziramo ovo polje **bozonskom** statistikom, iz (4.12.17)-(4.12.18) i identiteta (3.7.17) slijedi:

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle &= (i\cancel{\partial}_x - m) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left[e^{ip\cdot(x-y)} \theta(x^0 - y^0) - e^{-ip\cdot(x-y)} \theta(y^0 - x^0) \right] \\ &= (-i\cancel{\partial}_x + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^0}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{i e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

Vidimo da se javlja nekovarijantni faktor koji narušava kovarijantnost propagatora.

Kvantiziranje slobodnog polja spina 1/2 bozonskom statistikom vodi na **narušenje** Lorentzove simetrije.

4.13.5 Sažetak analize*

Ako pretpostavimo da čestice mogu biti samo bozoni ili fermioni, na primjerima polja spina 0 i 1/2 pokazali smo da se slobodna **relativistička** polja mogu konzistentno kvantizirati samo na način da se polja cjelobrojnog spina kvantiziraju kao bozoni, a polja polucjelobrojnog spina kao fermioni. Argumentacija se može lako proširiti na polja proizvoljnog spina. U stvari, postoji **egzaktan** teorem koji kaže:

Spin-statistika teorem: Ako su ispunjene sljedeće pretpostavke:

1. Teorija posjeduje simetriju na Lorentzove transformacije.
2. Teorija posjeduje stanje najniže energije (vakuum).
3. Čestice u teoriji su lokalizirana pobuđenja (nisu vezane za strune ili hiperplohe).
4. Čestice su propagirajuće, tj. imaju konačnu masu.
5. Čestice su stvarna fizikalna pobuđenja (prisutna u fizikalnom prostoru stanja) i norma im je pozitivno definitna.

U tom slučaju **čestice cjelobrojnog spina su nužno bozoni, a čestice polucjelobrojnog spina fermioni ako je dimenzija prostor-vremena veća od 3.**

Ostaje pitanje: Što je s teorijama polja u dvije i tri prostorno-vremenske dimenzije?

4.13.6 Teorija polja u općem broju dimenzija*

Tokom dosadašnjeg dijela kolegija uglavnom smo se ograničili na teorije polja u 4 prostorno-vremenske dimenzije. No, većina općih formula koje smo napisali se može generalizirati na d dimenzija uz "prirodne" transformacije, npr. prostorno-vremenski indeksi uzimaju vrijednosti $\mu, \nu, \dots = \{0, 1, \dots, d-1\}$, te

$$\begin{aligned}d^4x, d^4p, d^3\mathbf{p} &\longrightarrow d^d x, d^d p, d^{d-1}\mathbf{p} \\ (2\pi)^4, (2\pi)^3 &\longrightarrow (2\pi)^d, (2\pi)^{d-1} \\ \delta^4(p-q), \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q}) &\longrightarrow \delta^d(p-q), \delta^{d-1}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\end{aligned}$$

i slično.

U slučaju spinora, definicija Diracovih γ -matrica ostaje ista

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$$

Dimenzionalnost Diracovih matrica je dana minimalnom dimenzijom u kojoj ih možemo reprezentirati. Pokazuje se da su one $2^k \times 2^k$ matrice, gdje je k definiran putem $d = 2k + 1$ ako je d neparan, odnosno $d = 2k$ ako je

d	Majorana	Majorana-Weyl (L i R)	Weyl (L i R)	Konj. (*)
1+1	✓	✓	✓	samo
0+2	✓	-	✓	među
1+2	✓	-	-	-
0+3	-	-	-	-
1+3	✓	-	✓	među
0+4	-	-	✓	samo
1+4	-	-	-	-
0+5	-	-	-	-
1+5	-	-	✓	samo
0+6	✓	-	✓	među
1+6	-	-	-	-
0+7	✓	-	-	-
1+7	✓	-	✓	među
0+8	✓	✓	✓	samo
1+8	✓	-	-	-
0+9	✓	-	-	-

Tablica 4.1: Vrste spinora u d dimenzionalnom prostor-vremenu. Retci se ponavljaju s modulo 8. "Konj. (*)" označava kako se Weylovi spinori transformiraju na kompleksnu konjugaciju – "samo" znači da se transformira sam u sebe, dok "među" znači $L \leftrightarrow R$. Majorana-Weyl znači da možemo imati Weylova polja koja su ujedno i realna.

d paran. Majorana spinori imaju istu dimenziju kao i Diracovi, ali su realni (pa imaju dvostruko manje nezavisnih komponenti), dok je dimenzionalnost Weylovih spinora upola manja (kao u $d = 4$). Diracov spinor se može definirati za proizvoljan d , no to ne vrijedi i za Majoranine i Weylove spinore. Tablica 4.1 pokazuje u kojem broju dimenzija (Minkowski i Euklidski prostori) ovi spinori postoje.

Sve teorije polja kojima smo se eksplicitno bavili tokom kolegija se mogu definirati za svaki $d \geq 2$. Uočite da se kvantna mehanika može shvatiti kao kvantna teorija polja u $(1 + 0)$ prostorno-vremenskih dimenzija. Teorije polja u $d \neq 4$ su važne kako u fizici čvrstog stanja, tako i u nekim ograncima teorijske fizike elementarnih čestica poput teorije struna ili općenito u teorijama u kojima postoje dodatne dimenzije.

Ključna veličina čija svojstva ovise o broju prostorno-vremenskih dimenzija je **spin** i stvari vezane uz njega (npr. kiralnost, helicitet, i, kao što ćemo uskoro vidjeti, statistika). Što se statistike tiče, pokazuje se da je ona povezana s topološkim svojstvima male grupe prave Lorentzove grupe. Radi jednostavnosti prikaza ograničit ćemo se na masivne čestice/polja, za koje je mala grupa $SO(d - 1)$.

Eksplicitna konstrukcija projektivnih reprezentacija male grupe vodi na sljedeće ponašanje:

- $d \geq 4$: Rotacije za 4π daju identitet, $D(R_{4\pi}) = 1$, dok rotacije za 2π daju

$$D(R_{2\pi}) = e^{i2\pi s} = \begin{cases} +1 & s = 0, 1, 2, \dots \\ -1 & s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \end{cases}$$

gdje je s spin reprezentacije/čestice, koji je **nužno (polu)cjelobrojan** ($s \in \mathbb{N}^0/2$).

- $d = 3$: Mala grupa je $SO(2) = U(1)$ koja je lokalno izomorfna (ima istu Liejevu algebru) grupi zbrajanja realnih brojeva $\mathbb{R}_+$. Ova grupa nema nikakvu periodičnost pa stoga ni reprezentacije ne moraju imati nikakvu posebnu periodičnost. Slijedi da rotacija za 2π može dati bilo koju fazu:

$$D(R_{2\pi}) = e^{i2\pi s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

gdje s , koji igra ulogu spina, može biti bilo koji realni broj. Sve unitarne IRREP grupe $U(1)$ su jednodimenzi-
onalne, tj. interni spinski prostor stanja je trivijalan.

- $d = 2$: U jednodimenzionalnom prostoru ne postoje rotacije i Lorentzova grupa je generirana samo boostovima po toj jednoj dimenziji. Pošto je to jednodimenzionalna grupa (parametrizirana rapiditetom β), nužno je Abelova grupa pa su ireducibilne konačnodimenzionalne reprezentacije nužno jednodimenzionalne. To znači da unutar IRREP Lorentzove transformacije samo mijenjaju fazu na sljedeći način

$$D(\beta) = e^{i\beta s}$$

Parametar s , koji pripada danoj IRREP/čestici, igra pomalo sličnu ulogu kao spin pa ga se često tako i naziva.

4.13.7 Spin-statistika teorem iz krivuljne ovisnosti*

Vratimo se sada nazad na pitanje s početka ovog poglavlja: O čemu sve može ovisiti faza α koja se pojavljuje nakon zamjene mjesta dviju istovrsnih čestica u vektoru stanja? Kao što smo već zaključili, α može ovisiti samo o Lorentz skalarima. Razmatrajući Lorentz skalare koji su pridruženi stanju zaključili smo da α može ovisiti samo o tipu čestice, $\alpha = \alpha_n$. No, ono što smo propustili uočiti je da α može ovisiti i o Lorentz skalarima vezanima uz **operaciju zamjene čestica**. Ideja je da zamjenu čestica opišemo kao kontinuiranu transformaciju kojoj je pridružena zatvorena krivulja u konfiguracijskom prostoru (razapetom impulsima čestica u stanju).³¹ Sad je jasno da su **topološke** razlike između krivulja Lorentz invarijante.³²

U prostor-vremenu dimenzije $d \geq 4$ dimenzija prostora impulsa je $d - 1 \geq 3$. U takvom prostoru svaku krivulju možemo neprekidno prevesti u bilo koju drugu pa je topologija krivulja trivijalna. Stoga zaključak da α može ovisiti samo o n stoji pa čestice mogu biti samo bozoni ili fermioni.

U prostor-vremenu dimenzije $d = 3$ dimenzija prostora impulsa je 2, tj. imamo ravninu s "izbušenim rupama". Krivulje se klasificiraju po tome koliko puta se zavrtje oko "rupa" (tj. impulsa $\mathbf{p}_j$). Radi jednostavnosti, razmotrimo dvočestično stanje u kojem imamo samo impulse $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}_2$. Zatvorene krivulje su topološki klasificirane po tome koliko puta $N \in \mathbb{Z}$ se zavrtje u krug (smjer je bitan). Pošto kompozicija dvije krivulje s N_1 i N_2 daje krivulju s $N = N_1 + N_2$, ovisnost α o krivulji zamjene mora imati oblik

$$\alpha_n(N) = e^{i2\pi N \kappa_n}, \quad \kappa_n \in \mathbb{R} \quad (4.13.11)$$

gdje je κ_n karakteristika vrste čestica n čiju izmjenu mjesta razmatramo. Vidimo da postoje sljedeće mogućnosti:

- $\kappa = 0 \pmod{1} \implies$ bozoni
- $\kappa = \frac{1}{2} \pmod{1} \implies$ fermioni
- $\kappa \neq 0, \frac{1}{2} \pmod{1} \implies$ anioni

Na koji način je statistika povezana sa spinom, tj. koja je veza između κ i s ? U tu svrhu zgodno je preći u sustav centra masa u kojem je $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$. U ovom slučaju zamjena čestica koja uključuje kut 2π odgovara operaciji rotacije za kut π , R_π . Na prostoru stanja ova operacija je reprezentirana s $D(R_\pi)$ pa možemo pisati

$$D(R_\pi)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (e^{i\pi s})^2 |\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle = \alpha |\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle$$

Usporedba s (4.13.11) za $N = 1$ daje $\kappa = s \pmod{1}$, tj. **statistika je u potpunosti određena spinom**.

Sažetak spin-statistika teorema u d dimenzija:

- $d \geq 4$ $s \in \mathbb{N}^0/2$ bozoni/fermioni
- $d = 3$ $s \in \mathbb{R}$ bozoni/fermioni/anioni
- $d = 2$ nema spina (kuriozitet: parastatistike)

³¹Zamislite da fizički zamjenjujete mjesta česticama po nekim krivuljama.

³²Dvije krivulje su topološki ekvivalentne ako se mogu neprekidno prevesti jedna u drugu tako da ne izlaze iz danog prostora. Obratite pažnju da je prostor u kojem se nalaze krivulje $d - 1$ dimenzionalni prostor impulsa u kojem su "izbušene rupe" na mjestima na kojima se nalaze impulsi $\mathbf{p}_j$ koji definiraju dano stanje.

4.14 C, P, T i CPT teorem*

U ovom odjeljku nastaviti ćemo analizu simetrija razmatranjem **diskretnih transformacija nabojne konjugacije (C), pariteta (P) i vremenske inverzije (T)**. Postojanje svake od ovih simetrija vodi na neke interesantne fizikalne posljedice. Na kraju ćemo demonstrirati da je u **svakoj relativističkoj teoriji polja kompozitna transformacija CPT simetrija**. Pokazat ćemo da ova tvrdnja, koja se može matematički dokazati i koja je poznata pod imenom **CPT teorem**, ima važne, eksperimentalno mjerljive, posljedice. Kao i prije, radi preglednosti i jasnoće demonstracije ćemo napraviti na poljima spina 0, 1/2 i 1 i to posebno na primjeru kvantne elektrodinamike, no tvrdnje imaju neposrednu generalizaciju na polja proizvoljnog spina i proizvoljna međudjelovanja.

Postoje dva glavna puta za istraživanje simetrija neke teorije: (1) "**klasični**": Proučavanjem transformacija na koje je akcija ili oblik jednadžbi gibanja invarijantan (ovaj način je posebno spretan u slučaju kontinuiranih simetrija gdje možemo koristiti snagu Noetherinog teorema), (2) "**kvantni**": Ukoliko znamo kako simetrija treba djelovati na prostoru stanja možemo neposredno konstruirati djelovanje na operatore (polja).

"Klasični" put smo intenzivno koristili kod analize internih $U(1)$ simetrija i translacija u prostor-vremenu. No, pošto nas sad zanimaju diskretne simetrije, pa ne možemo koristiti Noetherin teorem, taj način više nije toliko privlačan. S druge strane, mi već znamo kako simetrije koje nas ovdje zanimaju djeluju na prostor stanja, tako da ćemo ovdje demonstrirati "kvantni" pristup.

U "kvantnom" pristupu početna točka će nam biti činjenica da ćemo znati kako operator simetrije O djeluje na asimptotske prostore ulaznih i izlaznih stanja. Pošto su asimptotski prostori Fockovog tipa, iz toga se može neposredno dobiti djelovanje O na operatore stvaranja $a_{n\mathbf{p}\sigma}$ i $a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ poništenja čestica u asimptotskim stanjima, tj. izračunati

$$O a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger O^\dagger \quad (4.14.1)$$

Pretpostavit ćemo nadalje da transformacija simetrije ostavlja vakuum invarijantnim,

$$O |0\rangle = |0\rangle \quad (4.14.2)$$

što za teorije koje imaju jedinstven vakuum direktno slijedi iz zahtjeva da O komutira s hamiltonijanom. Kao što smo već napomenuli, O je ili unitaran ili antiunitaran operator, što znači da je $O^{-1} = O^\dagger$. Pošto antiunitarnost (koja uključuje antilinearnost) nužno mijenja smjer vremena, tj. uključuje djelovanje $t \rightarrow -t$ na vremenski razvoj operatora i stanja, jedine simetrije koje se reprezentiraju antiunitarnim operatorima su one koje uključuju transformaciju zvanu vremenska inverzija (T).

Polja u asimptotskim režimima ($t \rightarrow \pm\infty$) su slobodna i Fourierov razvoj polja pridruženog čestici tipa n je dan s:

$$\phi_n(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(\mathbf{p}, \sigma) a_{n\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot x} + f(\mathbf{p}, \sigma) a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (4.14.3)$$

gdje su e i f polarizacijski tenzori čija struktura je određena spinom s polja i masom ($m \neq 0$ ili $m = 0$). S n^c smo označili antičesticu čestice n (tako da je $a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^\dagger$, koji smo prije označavali s $b_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger$, operator stvaranja antičestice n^c). Principi kvantne mehanike kažu da se polje transformira na sljedeći način:

$$\phi(x) \xrightarrow{O} \phi'(x) = O \phi(x) O^\dagger \quad (4.14.4)$$

Sad vidimo da primjenom (4.14.1) možemo neposredno izračunati kako se svako polje transformira na simetriju u asimptotskim režimima $t \rightarrow \pm\infty$. Pošto operator simetrije mora komutirati i sa slobodnim i s interakcijskim dijelom hamiltonijana (ili, ekvivalentno, i slobodni i interakcijski dio lagranžijana moraju biti invarijantni na transformaciju $\phi \rightarrow \phi'$) ovaj zakon transformacije mora vrijediti u sva vremena, a ne samo u asimptotskim režimima.

U računu postoji jedna mala suptilnost. Kao što ćemo vidjeti na primjerima simetrija, u izrazu za transformaciju čestičnih stanja u Fockovom prostoru na O postoji fazni faktor χ_n , $|\chi_n| = 1$ (tzv. O -paritet) za svaku česticu (uključujući i antičestice). Ovi fazni faktori su u danoj teoriji ograničeni zahtjevom da su i slobodni i interagirajući dio

lagranžijana svaki za sebe invarijantni na transformaciju simetrije. Pošto smo vidjeli da je slobodni dio lagranžijana $\mathcal{L}_0$ suma bilineara oblika $\phi^\dagger M \phi$, gdje M sadrži derivacije i/ili neke matrice, zahtjev invarijantnosti

$$\mathcal{L}_0 \xrightarrow{O} \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0$$

nam kaže da ϕ'_n mora biti linearna kombinacija ili od samog ϕ_n ili od $\phi_n^\dagger$. Kao što ćemo vidjeti na primjerima, ovaj zahtjev uspostavlja vezu između faznih faktora čestica i njima pridruženih antičestica.

Zahtjev da je i interakcijski dio lagranžijana invarijantan na transformaciju polja

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \xrightarrow{O} \mathcal{L}'_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}$$

postavlja dodatna ograničenja na fazne faktore. Vrlo često fazni faktori nisu u potpunosti određeni. Na primjer, ukoliko dana teorija posjeduje k nezavisnih $U(1)$ simetrija, ove se mogu iskoristiti tako da se redefinira faza nabijenih čestica redefiniranjem operatora simetrije, $C' = C \exp(i \sum_j \alpha_j Q_j)$, gdje su Q_j sačuvani $U(1)$ naboji a α_j proizvoljni realni parametri. Izborom α_j možemo po volji fiksirati fazne faktore k nabijenih čestica. Recimo, u Standardnom modelu fizike čestica postoje tri nezavisne $U(1)$ simetrije koje su odgovorne za sačuvanje električnog naboja, barionskog broja i leptonskog broja, koje se mogu iskoristiti da se fiksiraju O -pariteti za tri čestice (tradicionalno se uzimaju elektron, proton i neutron i postavljaju im se O -pariteti na 1). Uočite da se korištenjem $U(1)$ simetrija ne mogu mijenjati fazni faktori realnih polja (onih čije čestice su same sebi antičestice, poput fotona ili π^0 piona.). Takvim poljima međudjelovanja najčešće fiksiraju u potpunosti O -paritete.

Naravno, postoji mogućnost da je interakcijski član takav da je nemoguće dobiti simetričnost niti za jedan izbor faznih faktora. U tom slučaju kažemo da član u $\mathcal{L}_{\text{int}}$ koji je za to odgovoran **eksplicitno lomi simetriju**. Na primjer, iako su teorije kojima opisujemo gravitacijsko, elektromagnetsko i jako međudjelovanje invarijantne na C , P i T , slaba međudjelovanja eksplicitno lome sve tri ove simetrije i sve njihove kombinacije osim CPT .

Sad ćemo primijeniti ovu pomalo apstraktnu analizu na konkretne primjere diskretnih simetrija i polja pa će sve biti puno jasnije.

4.14.1 Nabojna konjugacija

Nabojna konjugacija je, po definiciji, transformacija koja prebacuje sve čestice u antičestice bez da mijenja druge kvantne brojeve u stanju. To znači da je djelovanje C na asimptotski Fockov prostor stanja određeno s:

$$C |n_1 \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r \mathbf{p}_r \sigma_r\rangle = \xi |n_1^c \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r^c \mathbf{p}_r \sigma_r\rangle, \quad |\xi| = 1 \quad (4.14.5)$$

gdje n_j^c označava antičesticu čestice n_j . Operator C mora biti unitarni operator. Iz gornje relacije i definicije operatora stvaranja i poništavanja (4.13.3) i zahtijeva da je vakuum invarijantan na ovu transformaciju (jer ne sadrži nikakve čestice)

$$C |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

slijedi da mora vrijediti

$$C a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger C^\dagger = \xi_n a_{n^c\mathbf{p}\sigma}^\dagger \quad (4.14.6)$$

gdje je $|\xi_n| = 1$. ξ_n se naziva C -paritet od čestice tipa n i primjer je faznog faktora koji smo spomenuli u uvodu. Očito je ξ u (4.14.5) dan produktom C -pariteta po svim česticama:

$$\xi = \prod_{j=1}^r \xi_{n_j} \quad (4.14.7)$$

Jednadžba (4.14.4) koja daje transformaciju polja ovdje daje:

$$\phi_n(x) \xrightarrow{C} \phi_n^c(x) = C \phi_n(x) C^\dagger \quad (4.14.8)$$

Primjena (4.14.6) daje:

$$\begin{aligned}\phi_n^c(x) &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(\mathbf{p}, \sigma) C a_{n\mathbf{p}\sigma} C^{\dagger} e^{-ip \cdot x} + f(\mathbf{p}, \sigma) C a_{n^c\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} C^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\xi_n^* e(\mathbf{p}, \sigma) a_{n^c\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot x} + \xi_n^c f(\mathbf{p}, \sigma) a_{n\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right)\end{aligned}\quad (4.14.9)$$

Kao što smo napomenuli, očekujemo da je transformirano polje linearna kombinacija ϕ_n ili $\phi_n^{\dagger}$. Iz oblika od (4.14.9) jasno je da mora biti ova druga varijanta. Stoga ćemo napisati (4.14.9) u sljedećem obliku:

$$\phi_n^c(x) = \xi_n^* \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(\mathbf{p}, \sigma)^* a_{n^c\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} e^{ip \cdot x} + \frac{\xi_n^c}{\xi_n} f(\mathbf{p}, \sigma)^* a_{n\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot x} \right)^{\dagger} \quad (4.14.10)$$

Da bi nastavili dalje, trebamo znati kako se transformiraju tenzori polarizacije e i f na kompleksnu konjugaciju. To ćemo razmotriti na posebnim slučajevima spinova 0, 1/2 i 1.

Spin 0

Za slobodno polje spina 0, $\varphi(x)$, imamo $e(\mathbf{p}, \sigma) = 1 = f(\mathbf{p}, \sigma)$ pa iz (4.14.10) i zahtijeva da desna strana jednakosti mora biti proporcionalna $\varphi(x)^{\dagger}$, slijedi da je

$$\xi_{n^c} = \xi_n^* \quad (4.14.11)$$

pa dobijamo da je zakon transformacije polja spina 0 na nabojnu konjugaciju dan s

$$\varphi^c(x) = \xi^* \varphi(x)^{\dagger} \quad (4.14.12)$$

U slučaju realnog skalarnog polja očito mora vrijediti $\xi = \pm 1$.

Pošto je očito $(\varphi^{\dagger}\varphi)^c = (\varphi^{\dagger}\varphi)$, slijedi da je lagranžijan slobodnog polja spina 0 invarijantan na nabojnu konjugaciju za svaki izbor C -naboja, pa je ona simetrija u slobodnoj teoriji.

Spin 1

Analiza slobodnog polja spina 1, kao i drugih slobodnih bozonskih polja spina $s \in \mathbb{N}$, je potpuno identična gornjoj analizi za spin 0. Jedina razlika je da sad imamo polarizacijske vektore koji zadovoljavaju $f(\mathbf{p}, \sigma) = e(\mathbf{p}, \sigma)^*$. Rezultat je da ponovo mora vrijediti relacija (4.14.11) pa je transformacija spin 1 polja na nabojnu konjugaciju dana s

$$A_{\mu}^c(x) = \xi^* A_{\mu}(x)^{\dagger}$$

Za realna polja ponovno mora vrijediti $\xi = \pm 1$. Ponovo je trivijalno očito da je lagranžijan za spin 1 polje, masivno i bezmaseno, invarijantan na ovu transformaciju.

Spin 1/2

Za polje spina 1/2, $\psi(x)$, tenzori polarizacije su dani spinorima u i v , $e = u$ i $f = v$. Ključ je relacija (4.11.16), čijom primjenom ponovo dobijamo da mora vrijediti relacija (4.14.11) i stoga dobijamo sljedeće pravilo za transformaciju Diracovog (i Majoraninog) spinora na nabojnu konjugaciju:

$$\psi^c(x) = -\xi^* i\gamma_2 \psi(x)^* \quad (\text{u Weylovoj reprezentaciji}) \quad (4.14.13)$$

koje vrijedi u Weylovoj reprezentaciji.³³ To je, do na fazni faktor, upravo transformacija (4.10.52) koju smo dobili pri razmatranju Majoraninog polja i sada vidimo da smo je s pravom nazvali nabojna konjugacija.

³³U slučaju spinornih polja nabojnu konjugaciju, koja ne radi transponiranje na spinornim indeksima, označili smo s *. Oznaka $\dagger$, kao i prije, podrazumijeva i transpoziciju spinornih indeksa. Oznaka T označava transpoziciju samo spinornih indeksa. To znači da je $\psi^{*T} = \psi^{\dagger}$.

Za Majorana fermione, kod kojih je čestica sama sebi antičestica što znači $n^c = n$ i $\xi_{n^c} = \xi_n$, iz (4.14.11) slijedi da je $\xi_M = \pm 1$. Pošto Majoranin spinor zadovoljava $\psi_M(x) = -\xi^* i \gamma_2 \psi_M(x)^*$, vidimo da iz (4.14.13) slijedi da za njega vrijedi

$$\psi_M^c(x) = \pm \psi_M(x) \quad (\text{Majorana spin } 1/2 \text{ polje})$$

Uočite da operator C , definiran kao u (4.14.6), miješa stanja koja se nalaze u ψ_L i ψ_R , što znači da postojanje simetrije na C automatski implicira da lijeva i desna polja moraju dolaziti u parovima. No, ukoliko se lijevo i desno Weylovo polje pojavljuju simetrično i u interakcijskom članu, govorimo o bezmasenom Diracovom polju, a ne o paru Weylovih polja. Zaključak je:

U kiralnim teorijama nabojna konjugacija ne može biti simetrija.

Razmotrimo sada transformaciju važnijih Lorentz kovarijanti. Neposrednim računom lako se pokaže da vrijedi:

$$(\bar{\psi}\psi)^c = (\bar{\psi}\psi) \quad (4.14.14)$$

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^c = -(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (4.14.15)$$

Dokaz: Razmotrimo prvo (4.14.14). Primjenom (4.14.13) dobijamo

$$(\bar{\psi}\psi)^c = (\bar{\psi})^c \psi^c = (-i\gamma_2 \psi(x)^*)^\dagger \gamma_0 (-i\gamma_2 \psi(x)^*) = \psi^T \gamma_2^\dagger \gamma_0 \gamma_2 \psi^*$$

Pošto u Weylovoj reprezentaciji vrijedi $\gamma_2^\dagger = -\gamma_2$, te $\gamma_2 \gamma_0 \gamma_2 = \gamma_0$ neovisno o reprezentaciji, dobijamo

$$(\bar{\psi}\psi)^c = -\psi^T \gamma_0 \psi^* \equiv -\psi_j (\gamma_0)_{jk} \psi_k^* = \psi_k^* (\gamma_0)_{jk} \psi_j \equiv \psi^\dagger \gamma_0^T \psi = \psi^\dagger \gamma_0 \psi = \bar{\psi}\psi$$

gdje smo koristili da su spinori antikomutirajući objekti i da je u Weylovoj reprezentaciji $\gamma_0^T = \gamma_0$. Dokaz druge relacije prepoštamo čitatelju za vježbu. Ključno je za uočiti da se ovaj izvod razlikuje od prvog samo u tome što umjesto $(\gamma_2 \gamma_0 \gamma_2)^T = \gamma_0$ imamo

$$(\gamma_2 \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_2)^T = -\gamma_0 \gamma_\mu$$

što se lako provjeri da vrijedi u Weylovoj reprezentaciji.

Sad trebamo provjeriti da li je Diracov lagranžijan invarijantan na (4.14.13). Relacija (4.14.14) nam kaže da je Diracov maseni član invarijantan pa ostaje provjeriti kinetički dio. Iz izvoda za (4.14.15) možemo vidjeti da je

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi)^c = -(\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi) \quad , \quad (\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^c = -(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi) \quad (4.14.16)$$

iz čega slijedi da je kinetički dio lagranžijana invarijantan. Sve skupa, dobili smo da je slobodni Diracov lagranžijan invarijantan na nabojnu konjugaciju.

Za ostale bilineare može se provjeriti da su transformacije na C dane s:

$$(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^c = i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (4.14.17)$$

$$(i\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\psi)^c = i(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi) \quad (4.14.18)$$

$$(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)^c = -(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi) \quad (4.14.19)$$

Iz (4.14.15) i (4.14.19) vidimo da za Majoranino polje vrijedi:

$$\bar{\psi}_M \gamma^\mu \psi_M = 0 \quad (4.14.20)$$

$$\bar{\psi}_M \sigma_{\mu\nu} \psi_M = 0 \quad (4.14.21)$$

To znači da Majorana fermioni imaju iščezavajući električni naboj i magnetski moment.

Međudjelovanja i procesi

Ukoliko ne postoje međudjelovanja i teorija je slobodna, očito je da je uvijek moguće odabrati C -paritet tako da je $\xi_n = 1$ za sva polja. No, kada postoje međudjelovanja to više nije tako. Umjesto da govorimo apstraktno, na primjeru spinorne kvantne elektrodinamike demonstrirat ćemo gornje tvrdnje.

U spinornoj elektrodinamici svako Diracovo polje ψ_n se veže na elektromagnetsko polje putem međudjelovanja

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q_n A_\mu j^\mu \quad , \quad j^\mu = \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n$$

gdje je j^μ gustoća struje električnog naboja. Iz (4.14.15) direktno slijedi da je

$$j_\mu \xrightarrow{C} j_\mu^c = -j_\mu \quad (4.14.22)$$

što potvrđuje da C radi zamjenu $q \rightarrow -q$. Invarijantnost međudjelovanja $\mathcal{L}_{\text{int}}$ automatski implicira da se elektromagnetsko polje **mora** transformirati na nabojnu konjugaciju na način

$$A_\mu \xrightarrow{C} A_\mu^c = -A_\mu \quad (4.14.23)$$

S druge strane, ukoliko ne postoje druga međudjelovanja (razmatramo "čistu elektrodinamiku") očito je da su C -pariteti za fermione potpuno proizvoljni i možemo ih $U(1)$ simetrijom postaviti na bilo koju vrijednost, pa se obično uzima $\xi = 1$.

Ova analiza se generalizira na sve vrste elektrodinamike, ne samo spinornu. Sažeto izrečeno:

Elektrodinamika posjeduje simetriju na nabojnu konjugaciju. C -paritet fotona je $\xi_\gamma = -1$ dok za druga polja ne nameće ograničenja.

Ova relacija ima važne fenomenološke posljedice. Kao prvo, iz nje je očito da korelacijska funkcija sačinjena od produkta neparnog broja polja A_μ nužno **iščezava**:

$$\langle \Omega | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2j+1}}(x_{2j+1}) | \Omega \rangle = 0 \quad , \quad j \in \mathbb{N} \quad (4.14.24)$$

Dokaz: Samo treba ubaciti $C^\dagger C = 1$ između polja i iskoristiti $C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ i (4.14.23):

$$\begin{aligned} \langle \Omega | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2j+1}}(x_{2j+1}) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | C^\dagger C A_{\mu_1}(x_1) C^\dagger C A_{\mu_1}(x_1) C^\dagger \cdots C A_{\mu_{2j+1}}(x_{2j+1}) C^\dagger C | \Omega \rangle \\ &= -\langle \Omega | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2j+1}}(x_{2j+1}) | \Omega \rangle \end{aligned}$$

Iz dokaza i (4.14.22) slijedi da to isto vrijedi i za produkt neparnog broja struja j_μ , kao i za svaki operator neparan na C (tj. koji zadovoljava $\mathcal{O}^c = -\mathcal{O}$).

Iz (4.14.24) trivijalno slijedi da će i T -uređeni produkti iščezavati na isti način. Pošto se T -uređeni produkti javljaju u amplitudama i S -matrici procesa, posljedica je da su nemogući procesi u kojima sudjeluju samo fotoni i to ukupno neparan broj njih (sumiran po ulaznom i izlaznom stanju), kao što je npr. $\gamma\gamma \not\rightarrow \gamma\gamma\gamma$. No, u stvari možemo izreći i jaču tvrdnju unutar Feynmanovog računa. Pošto je T -uređena korelacijska funkcija u Feynmanovom računu dana svim off-shell dijagramima koji na vanjskim linijama imaju samo fotonske noge, njeno iščezavanje nam kaže da u računima možemo odbaciti sve dijagrame koji imaju poddijagrame čije vanjske noge se sastoje od neparnog broja fotona. Ove tvrdnje su poznate pod nazivom **Furryjev teorem**, koji kratko možemo zapisati kao:

Furryjev teorem: U (off-shell ili on-shell) procesima možemo zanemariti sve dijagrame koji sadrže poddijagrame čije vanjske noge čini neparan broj fotona.

Simetriju na C naravno možemo koristiti kao i sve druge simetrije u kvantnoj mehanici. Ako razmatramo prijelaz između dva svojstvena stanja od C (što će biti ako su sve čestice u oba stanja realne, odnosno neutralne), $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$, on će biti moguć samo ako vrijedi:

$$\xi_\alpha = \xi_\beta$$

gdje se ξ_α i ξ_β dobiju množenjem C -pariteta svih čestica u stanju, kao u (4.14.7). Ovo možemo koristiti za dobijanje važnih informacija čak i ako ne znamo **ništa** o teoriji koja opisuje međudjelovanje. Na primjer, pretpostavimo da smo eksperimentalno uočili sljedeći raspad:

$$\pi_0 \longrightarrow \gamma\gamma$$

Ukoliko teorija posjeduje simetriju na C , možemo odmah zaključiti da je $\xi_{\pi_0} = (\xi_\gamma)^2 = 1$. To znači da ako teorija posjeduje simetriju na C svi procesi u kojima se π_0 raspada u neparan broj fotona bi trebali biti zabranjeni, npr.

$$\pi_0 \not\rightarrow \gamma\gamma\gamma$$

jer je C -paritet stanja na lijevoj strani jednak 1, a na desnoj strani (-1) . Eksperimenti su u skladu s tim.

Postojanje simetrije na nabojnu konjugaciju ima jednu očitu važnu posljedicu:

Vjerojatnost prijelaza procesa ostaje nepromijenjena ako sve čestice u ulaznom i izlaznom stanju zamjenimo njihovim antičesticama.

Dokaz je trivijalna posljedica definicije C dane u (4.14.5) i toga da je $|\xi| = 1$.

U zaključku, eksperimentalnim proučavanjem procesa možemo dobijati radne hipoteze koje simetrije postoje u međudjelovanju, što teoretičarima olakšava izradu modela.

4.14.2 Paritet

Paritet (ili "prostorno zrcaljenje") P je diskretna prostorno-vremenska transformacija koja spada u Lorentzovu grupu i definira se kao

$$x^\mu \xrightarrow{P} \mathcal{P}^\mu_\nu x^\nu = (x^0, -\mathbf{x})$$

Običnim rječnikom rečeno, simetrija na paritet zakona koji upravljaju nekim sustavom ili pojavama kaže da:

Ako snimate zbivanja jednom kamerom direktno, a drugom odraz zbivanja u ogledalu, i prikazete filmove nekome tko nije bio prisutan, on(a) neće moći zaključiti koji film je koji.

Vidimo da je $\mathcal{P}^2 = 1$. U odjeljku 4.2.3 smo napisali kako se čestična stanja transformiraju na paritet. Za masivne čestice pravila su dana u (4.2.7) a za bezmasene u (4.2.9).³⁴ Iz ovih relacija se vidi da P transformira lijevo helicitetno stanje u desno, i obratno, pa možemo odmah zaključiti:

U kiralnim teorijama paritet ne može biti simetrija.

Razmotrimo sada masivne čestice. Iz (4.2.7) slijedi da paritet ima sljedeće djelovanje na asimptotske Fockove prostore stanja:

$$P |n_1 \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r \mathbf{p}_r \sigma_r\rangle = \eta_{n_1} \eta_{n_2} \dots \eta_{n_r} |n_1 - \mathbf{p}_1 \sigma_1, \dots, n_r - \mathbf{p}_r \sigma_r\rangle, \quad |\eta_n| = 1 \quad (4.14.25)$$

gdje je η_n **unutarnji paritet** čestice n (eng. *intrinsic parity*), a P je unitarni operator. Iz toga direktno slijedi:

$$P a_{n\mathbf{p}\sigma} P^\dagger = \eta_n^* a_{n-\mathbf{p}\sigma} \quad (4.14.26)$$

Polja se na paritet transformiraju kao

$$\phi_n(x) \xrightarrow{P} \phi'_n(x) = P \phi_n(x) P^\dagger \quad (4.14.27)$$

³⁴Oprez! Za masivne čestice σ označava projekciju spina u odnosu na fiksnu os, a za bezmasene čestice helicitet.

pa primjena (4.14.26) daje:

$$\begin{aligned}
\phi'_n(x) &= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(\mathbf{p}, \sigma) P a_{n\mathbf{p}\sigma} P^{\dagger} e^{-ip \cdot x} + f(\mathbf{p}, \sigma) P a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^{\dagger} P^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\eta_n^* e(\mathbf{p}, \sigma) a_{n-\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot x} + \eta_{n^c} f(\mathbf{p}, \sigma) a_{n^c - \mathbf{p}\sigma}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \eta_n^* \sum_{\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(-\mathbf{p}, \sigma) a_{n\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot (\mathcal{P}x)} + \frac{\eta_{n^c}}{\eta_n^*} f(-\mathbf{p}, \sigma) a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^{\dagger} e^{ip \cdot (\mathcal{P}x)} \right) \quad (4.14.28)
\end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo napravili supstituciju na varijabli integracije $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ i iskoristili $\mathcal{P}^2 = 1$ kako bi prebacili djelovanje $\mathcal{P}$ s $\mathbf{p}$ na $\mathbf{x}$ u eksponentima putem relacije $(\mathcal{P}p) \cdot x = (\mathcal{P}^2 p) \cdot (\mathcal{P}x) = p \cdot (\mathcal{P}x)$.

Kao što smo napomenuli, očekujemo da je transformirano polje linearna kombinacija ϕ_n ili $\phi_n^{\dagger}$. Iz oblika (4.14.9) jasno je da ovaj put očekujemo prvu varijantu. Proceduru ćemo nastaviti na primjerima polja spina 0, 1/2 i 1.

Spin 0

U slučaju slobodnog spin 0 polja, $\varphi(x)$, imamo $e = 1 = f$, pa je iz (4.14.28) očito da iz zahtjeva da φ' mora biti proporcionalan φ slijedi da

$$\eta_{n^c} = \eta_n^* \quad (4.14.29)$$

Primjena toga nam daje pravilo transformacije spin 0 polja na paritet:

$$\varphi'(t, \mathbf{x}) = \eta^* \varphi(t, -\mathbf{x})$$

Realna skalarna polja imaju $\eta = \pm 1$. Spin 0 polja čiji paritet je $\eta = 1$ se nazivaju **skalarna polja**, a ona čiji paritet je $\eta = -1$ **pseudoskalarna polja**.

Spin 1

U slučaju slobodnog spin 1 polja A_{μ} , izvod u potpunosti prati gornji za spin 0, uz dodatak da nam se sada pojavljuju polarizacijski faktori $e(\mathbf{p}, \sigma) = \varepsilon_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)$ i $f(\mathbf{p}, \sigma) = \varepsilon_{\mu}(\mathbf{p}, \sigma)^*$, za koje se može pokazati da zadovoljavaju:

$$\varepsilon^{\mu}(-\mathbf{p}, \sigma) = -\mathcal{P}^{\mu}_{\nu} \varepsilon^{\nu}(\mathbf{p}, \sigma)$$

Primjena toga nas opet vodi na zahtjev (4.14.29), što vodi na sljedeći zakon transformacije spin 1 polja:

$$A'^{\mu}(x) = -\eta^* \mathcal{P}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(t, -\mathbf{x})$$

Ova formula se na prirodan način generalizira na bozonska polja generalnog spina s , $A_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Vidimo da za paritet realnih bozonskih polja može biti samo $\eta = \pm 1$. Općenito se 4-vektorska polja čiji paritet je $\eta = 1$ nazivaju **vektorska polja**, dok ona koja imaju paritet $\eta = -1$ **aksijalno vektorska polja**.

Spin 1/2

U slučaju slobodnog spin 1/2 polja (Diracovog ili Majorana), ψ , tenzori polarizacije su dani pomoću spinora $u(\mathbf{p}, \sigma)$ i $v(\mathbf{p}, \sigma)$ na način da je $e = u$ i $f = v$. Iz (4.14.28) vidimo da nam trebaju sljedeće relacije:

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \gamma_0 u(\mathbf{p}, \sigma) \quad , \quad v(-\mathbf{p}, \sigma) = -\gamma_0 v(\mathbf{p}, \sigma)$$

Uvrštavanje gornjih relacija u (4.14.28) vodi na zahtjev

$$\eta_{n^c} = -\eta_n^* \quad (4.14.30)$$

pa dobijamo da je zakon transformacije Diracovog polja na paritet dan s:

$$\psi(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{P} \psi'(t, \mathbf{x}) = \eta^* \gamma_0 \psi(t, -\mathbf{x}) \quad (4.14.31)$$

Iz (4.14.30)-(4.14.31) lako se pokaže da se Lorentz kovarijantni bilineari transformiraju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} (\bar{\psi}\psi)(t, -\mathbf{x}) && \text{(skalar)} \\ i(\bar{\psi}\gamma^5\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} -i(\bar{\psi}\gamma^5\psi)(t, -\mathbf{x}) && \text{(pseudoskalar)} \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} \mathcal{P}^\mu{}_\nu (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)(t, -\mathbf{x}) && \text{(vektor)} \\ i(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} -i\mathcal{P}^\mu{}_\nu (\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi)(t, -\mathbf{x}) && \text{(aksijalni vektor)} \\ (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} \mathcal{P}^\mu{}_\alpha \mathcal{P}^\nu{}_\beta (\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi)(t, -\mathbf{x}) && \text{(tenzor ranga 2)} \end{aligned}$$

Uočite da iz (4.14.30) slijedi da Majorana fermioni moraju imati $\eta_M = \pm i$.

Opći spin

Može se pokazati da su unutarnji pariteti čestice spina s i pripadne aničestice povezani relacijom:

$$\eta_{m^c} \eta_m = (-1)^{2s} \quad (4.14.32)$$

Međudjelovanja

Simetrija na paritet se može koristiti na isti način kao i simetrija na nabojnu konjugaciju pa ovdje nećemo trošiti vrijeme na to. Za polja koja se u interakcijskom dijelu lagranžijana pojavljuju samo kroz $\phi^\dagger\phi$ produkt, paritet je stvar konvencije i uvijek se može uzeti da je $\eta_n = 1$. Također se $U(1)$ simetrije uvijek mogu iskoristiti da se odabere paritet za onoliko čestica koliko ima $U(1)$ simetrija u teoriji. Običaj u fizici čestica je da se primjenom električnog naboja (Q), leptonskog (L) i barionskog broja (B) unutarnji paritet elektrona, neutrona i protona postavi na $\eta_e = \eta_p = \eta_n = 1$.

Vrlo često se u literaturi može naći tvrdnja da je $P^2 = 1$, iz koje i (4.14.25) direktno slijedi da je $\eta_n^2 = 1$, tj. da mora vrijediti $\eta_n = \pm 1$. Ova tvrdnja nije egzaktno točna. Ono što se događa je da je u većini zanimljivih teorija, poput Standardnog modela, to tako iz razloga jer je paritet takav da je P^2 jednak nekom elementu iz $U(1)$ grupa simetrija, $P^2 = \exp(i \sum_j \alpha_j Q_j)$, gdje su Q_j sačuvani naboji povezani s $U(1)$ simetrijama. U tom slučaju možemo redefinirati paritet na način $P' = P \exp(-i \sum_j \alpha_j Q_j/2)$ koji zadovoljava $P'^2 = 1$. No obratite pažnju da to ne mora biti tako. Trivijalni kontraprimjer su teorije u kojima postoje Majorana fermioni za koje smo vidjeli da imaju paritet $\eta_M = \pm i$. Treba zapamtiti da simetrije postavljaju ograničenja na faze u paritetu i nekim česticama mogu zabraniti neke nama zgodne "ručne" odabire, poput $\eta = \pm 1$. Naravno, može se dogoditi da je P^k za $k > 2$ jednako nekom elementu iz $U(1)$ simetrija. U tom slučaju redefinicijom pariteta možemo dobiti da unutarnji pariteti svih čestica zadovoljavaju $\eta_n^k = 1$, tj. $\eta_n = \sqrt[k]{1}$.

Napomenimo samo da se spin 1 polje može u principu vezati na dva načina na Diracovo polje, koja se na paritet transformiraju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}A\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} \eta_A^* (\bar{\psi}A\psi)(t, -\mathbf{x}) \\ (\bar{\psi}A\gamma^5\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{P} -\eta_A^* (\bar{\psi}A\gamma^5\psi)(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

gdje smo ponovo koristili $P^2 = 1$. Prva relacija nam kaže da sačuvanje pariteta u elektrodinamici fiksira paritet fotona na $\eta_A \equiv \eta_\gamma = 1$ pa je **elektromagnetsko polje vektorsko polje**, dok je paritet polja materije neodređen pa ga, u odsustvu drugih međudjelovanja, možemo postaviti na $\eta_m = 1$ $U(1)$ transformacijom. Zbog ovih zakona transformacija, struja $J_\mu^V = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ se naziva **vektorska struja**, dok se $J_\mu^A = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ naziva **aksijalna vektorska struja**. Treba uočiti da lagranžijanski član s aksijalnom vektorskom strujom **lomi paritet** čim je $\eta_A \neq -1$.

4.14.3 CP simetrija

Transformacije se naravno mogu komponirati i ako su dvije transformacije simetrija, njihova kompozicija je također simetrija. Koristeći diskretne simetrije koje smo razmatrali u ovom odjeljku, od posebne zanimljivosti je kombinacija CP na koju se čestična stanja transformiraju kao:

$$\begin{aligned} m > 0 & : CP |n, \mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta_n \xi_n |n^c, -\mathbf{p}, \sigma\rangle \\ m = 0 & : CP |n, \mathbf{p}, \sigma\rangle = \eta_n \xi_n |n^c, -\mathbf{p}, -\sigma\rangle \end{aligned}$$

Vidimo da CP transformira česticu desnog heliciteta u antičesticu lijevog heliciteta, i obratno, što primjenjeno na spinorna polja kaže da CP djeluje tako da $\psi_L \rightarrow \psi_L$ i $\psi_R \rightarrow \psi_R$. Drugim riječima:

CP je dobro definiran na Weylovim spin 1/2 poljima (i općenito kiralnim poljima).

Pod dojmom uspjeha tadašnje fizike i intuitivne ideje da svaka prostorno-vremenska simetrija treba biti simetrija prirodnih zakona, do sredine 20. stoljeća u fizici elementarnih čestica smatralo se da je paritet simetrija prirodnih zakona, i suprotna razmišljanja su se smatrala gotovo kao neka vrsta "bogohuljenja". Razlog je naravno bio to što je takav stav bio naizgled u skladu s tadašnjim eksperimentima. No, oko 1950. godine pojavili su se eksperimenti koji su dali neke "čudne" rezultate, poznate pod nazivom " $\Theta - \tau$ zagonetka". 1956. Lee i Yang su uočili da, iako je postojala jaka eksperimentalna potpora tvrdnji da je P simetrija u gravitacijskim, elektromagnetskim i jakim međudjelovanjima, prijašnji eksperimenti uopće nisu testirali paritet u **slabim** međudjelovanjima. Potom su pokazali da se zagonetka može objasniti ako se postulira da je **paritet jako narušen u slabim međudjelovanjima** i predložili eksperimentalni test svoje hipoteze.³⁵ Kratko nakon toga Wu je vrlo elegantnim pokusom pokazala da su Lee i Yang bili u pravu.³⁶ Ono što su novi eksperimenti pokazivali, unutar točnosti mjerenja, je da je CP simetrija unatoč narušenju P . Tadašnje opće razmišljanje se može svesti na izjavu: "Pa da, kad smo mislili na P u stvari smo mislili na CP . Možemo i dalje reći da je (nekakav) paritet simetrija." No, pravo iznenađenje je uslijedilo kad su 1964. Cronin i Fitch eksperimentalno pokazali da je CP ipak **slabo narušen** u slabim međudjelovanjima. Povijest narušenja pariteta i CP simetrije daje jednu jako dobro lekciju o tome kako treba odbacivati predrasude, tj. tvrdnje koje nisu zasnovane na eksperimentu.

4.14.4 Vremenska inverzija

Vremenska inverzija (T) je diskretna prostorno-vremenska transformacija koja spada u Lorentzovu grupu i definira se kao

$$x^\mu \xrightarrow{P} \mathcal{T}^\mu{}_\nu x^\nu = (-x^0, \mathbf{x})$$

Vidimo da je, u smislu djelovanja na prostor-vrijeme, $\mathcal{T} = -\mathcal{P}$, no ova formalna sličnost je varljiva. Vremenska inverzija radi izmjenu prošlost $\leftrightarrow$ budućnost što se ne može reprezentirati unitarnim operatorom na kvantnomehaničkom prostoru stanja. U stvari, kao što smo to već spomenuli, vremenska inverzija se reprezentira **antiunitarnim** operatorom T . Antiunitarni operator je ujedno **antilinearan**, što znači da kad "preskoči" preko kompleksnog broja automatski ga kompleksno konjugira, $Tz = z^*T$.

Običnim rječnikom rečeno, ukoliko su zakoni koji rukovode nekim sustavom simetrični na vremensku inverziju, tada možemo reći:

Ako snimate sustav kamerom i potom nekom tko nije bio prisutan prikazete film prvo normalno, a onda unatrag, on(a) neće moći zaključiti koja projekcija je koja.

³⁵Zanimljivo je da je Yang kao student želio postati eksperimentalni fizičar i tako je počeo svoje obrazovanje, no njegovu uspješnost u tome opisuje šala kojom su ga sprdale njegove tadašnje kolege studenti: "Where there was a bang, there was Yang." Yang je prešao na teorijsku fiziku i postao jedan od najznačajnijih teoretičara svog vremena.

³⁶Čak i nakon što su rezultati eksperimenta procurili u javnost, tadašnji velikani Pauli i Landau su smatrali da to mora biti krivo jer: "Prostor ne može biti asimetričan." (Landau).

Djelovanje T inverzije na asimptotska stanja je dano u (4.2.8) za masivne čestice i (4.2.10) za bezmasene čestice. Iz (4.2.8) slijedi da za masivne čestice spina s vrijedi:

$$T a_{n\mathbf{p}\sigma}^\dagger T^\dagger = \zeta_n (-1)^{s-\sigma} a_{n-\mathbf{p}-\sigma}^\dagger, \quad |\zeta_n| = 1 \quad (4.14.33)$$

gdje se ζ_n naziva T -paritet čestice tipa n . Koristeći to i antilinearnost T , dobijamo da se polje spina s transformira u skladu s:

$$\begin{aligned} \phi'_n(x) &= T \phi_n(x) T^\dagger = \sum_\sigma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(\mathbf{p}, \sigma)^* T a_{n\mathbf{p}\sigma} T^\dagger e^{ip \cdot x} + f(\mathbf{p}, \sigma)^* T a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^\dagger T^\dagger e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \sum_\sigma (-1)^{s-\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\zeta_n^* e(\mathbf{p}, \sigma)^* a_{n-\mathbf{p}-\sigma} e^{ip \cdot x} + \zeta_{n^c} f(\mathbf{p}, \sigma)^* a_{n^c -\mathbf{p}-\sigma}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right) \\ &= \zeta_n^* \sum_\sigma (-1)^{s+\sigma} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e(-\mathbf{p}, -\sigma)^* a_{n\mathbf{p}\sigma} e^{-ip \cdot (\mathcal{T}x)} + \frac{\zeta_{n^c}}{\zeta_n^*} f(-\mathbf{p}, -\sigma)^* a_{n^c \mathbf{p}\sigma}^\dagger e^{ip \cdot (\mathcal{T}x)} \right) \end{aligned} \quad (4.14.34)$$

gdje smo u zadnjem redu napravili supstitucije $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ i $\sigma \rightarrow -\sigma$, te potom iskoristili svojstvo $\mathcal{T}^2 = 1$ da prebacimo T operaciju s p na x u eksponentima. Sad prelazimo na analizu po spinovima.

Spin 0

Pošto su za spin 0 polje, $\varphi(x)$, tenzori polarizacije trivijalni, $e = 1$ i $f = 1$, i nema sume po σ $e = 1$ i $f = 1$, koristeći istu logiku kao u slučaju C i P simetrija iz (4.14.34) možemo zaključiti da je

$$\zeta_{n^c} = \zeta_n^* \quad (4.14.35)$$

i da je zakon transformacije na vremensku inverziju dan s:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{T} \varphi'(t, \mathbf{x}) = \zeta^* \varphi(-t, \mathbf{x})$$

Spin 1

Za spin 1 polje, $A_\mu(x)$, tenzori polarizacije su $e = \varepsilon_\mu$, $f = \varepsilon_\mu^*$, za koje se može pokazati da vrijedi:

$$(-1)^{1+\sigma} \varepsilon^\mu(-\mathbf{p}, -\sigma)^* = -\mathcal{T}^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, \sigma)$$

Koristeći ovu relaciju u (4.14.34) istom logikom kao prije zaključujemo da mora vrijediti (4.14.35), te da je zakon transformacije na vremensku inverziju dan s:

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{T} A^{\mu'}(t, \mathbf{x}) = -\zeta^* \mathcal{T}^\mu{}_\nu A^\nu(-t, \mathbf{x})$$

Očito je da za sva realna bozonska polja nužno mora vrijediti $\zeta = \pm 1$.

Spin 1/2

Tenzori polarizacije za spin 1/2 polje $\psi(x)$ su naši stari znanci spinori u i v , $e = u$ i $f = v$, za koje se može pokazati da zadovoljavaju.

$$(-1)^{\sigma+\frac{1}{2}} u^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = i\gamma_1\gamma_3 u(\mathbf{p}, \sigma), \quad (-1)^{\sigma+\frac{1}{2}} v^*(-\mathbf{p}, -\sigma) = i\gamma_1\gamma_3 v(\mathbf{p}, \sigma)$$

Primjenom ovim relacija u (4.14.34) istom logikom kao prije nije teško pokazati nužno vrijedi (4.14.35), i da je zakon transformacije spin 1/2 polja na vremensku inverziju dan s:

$$\psi(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{T} \psi'(t, \mathbf{x}) = \zeta^* i\gamma_1\gamma_3 \psi(-t, \mathbf{x})$$

Vidimo da Majorana polja moraju imati $\zeta = \pm 1$.

Iz gornjeg transformacijskog svojstva lako se pokaže:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{T} (\bar{\psi}\psi)(-t, \mathbf{x}) \\(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{T} -i(\bar{\psi}\gamma^5\psi)(-t, \mathbf{x}) \\(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{T} -\mathcal{T}^\mu{}_\nu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(-t, \mathbf{x}) \\(i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{T} -i\mathcal{T}^\mu{}_\nu (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)(-t, \mathbf{x}) \\(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)(t, \mathbf{x}) &\xrightarrow{T} \mathcal{T}^\mu{}_\alpha \mathcal{T}^\nu{}_\beta (\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi)(-t, \mathbf{x})\end{aligned}$$

Lako se provjeri da je za sve spinove slobodni lagranžijan invarijantan na transformaciju vremenske inverzije, pa je ova simetrija slobodnih teorija.

4.14.5 CPT teorem

Vidjeli smo da su C , P i T simetrije slobodnih relativističkih kvantnih teorija polja. Iako se u prvoj polovici 20. stoljeća smatralo da su C , P i T simetrije fundamentalnih međudjelovanja, pokazalo se da to nije tako. Slaba međudjelovanja eksplicitno perturbativno (tj. na klasičnoj lagranžijanskoj razini) lome sve ove tri simetrije za sebe, kao i bilo koji produkt dvije od njih.³⁷ No, sve ove teorije za sebe su simetrične na kombiniranu CPT simetriju. Sad ćemo pokazati da tu nema ništa čudno ni posebno, jer se može pokazati da je **CPT simetrija u svim relativističkim kvantnim teorijama polja**. Ova tvrdnja je poznata pod nazivom **CPT teorem**, jer se uz neke skromne pretpostavke može egzaktno matematički dokazati. Mi nećemo raditi taj (vrlo zahtjevn) dokaz nego ćemo se zadovoljiti jednostavnom demonstracijom na spin 0, 1/2 i 1 poljima, koja se može generalizirati na polja proizvoljnog spina.

Demonstraciju ćemo napraviti metodom "čiste sile" – u teorijama s poljima spina 0, 1/2 i 1 razmotrit ćemo transformacijska pravila za sve elementarne gradivne blokove i pokazati da su svi prihvatljivi članovi za gradnju lagranžijana, a to su oni koji su realni i skalari na prave Lorentzove transformacije, automatski i skalari na CPT transformacije što znači da je akcija za proizvoljnu relativističku teoriju polja invarijantna na CPT .

Dakle, krenimo redom i razmotrimo prvo elementarna polja spina 0, 1 i 1/2. Komponiranjem transformacija koje smo izveli pojedinačno, redom za T , P pa C na način

$$X \xrightarrow{CPT} X' = CPT X (CPT)^\dagger = CPT X T^\dagger P^\dagger C^\dagger = C[P(T X T^\dagger)P^\dagger]C^\dagger$$

dobijamo:

$$\varphi'(x) = (\zeta\eta\xi)^* \varphi^\dagger(-x) \quad , \quad A'_\mu(x) = -(\zeta\eta\xi)^* A_\mu^\dagger(-x) \quad , \quad \psi'(x) = -(\zeta\eta\xi)^* \gamma^5 \psi^*(-x) \quad (4.14.36)$$

Pošto nas zanima netrivialna situacija u kojoj je barem jedna od tri simetrije narušena (ako su sve simetrije onda je i kompozicija simetrija pa je stvar trivijalna), možemo slobodno odabrati faze za njen paritet tako da je

$$\zeta_n \eta_n \xi_n = 1 \quad (\text{sva polja})$$

za sva polja. U tom slučaju možemo zaključiti da će bilo koji tenzor koji formiramo od polja spina 0 i 1 i njihovih derivacija zadovoljavati pravilo transformacije:

$$\phi'_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = (-1)^s \phi_{\mu_1 \dots \mu_k}^\dagger(-x) \quad (4.14.37)$$

³⁷U stvari kvantna kromodinamika kaže da bi trebalo postojati narušenje P i CP i u jakim međudjelovanjima, proporcionalno tzv. θ_s kutu, zbog postojanja topološki netrivialnih konfiguracija koje se zovu *instantoni*. Činjenica da to narušenje nije izmjereno, odnosno da eksperimenti postavljaju granicu $|\theta_s| < 10^{-10}$, je poznata pod imenom "strong CP problem". "Problem" pod navodnicima zato jer se sastoji u tome da fizičari ne vole "bezrazložno" malene brojeve, princip poznat pod nazivom *prirodnost*.

Preostali gradivni elementi se sastoje od spinornih bilineara. Koristeći rezultate iz prethodnih odjeljaka lako se dobije da je:

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\psi)(x) &\xrightarrow{CPT} (\bar{\psi}\psi)(-x)^\dagger \\
(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)(x) &\xrightarrow{CPT} (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)(-x)^\dagger \\
(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(x) &\xrightarrow{CPT} -(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(-x)^\dagger \\
(i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)(x) &\xrightarrow{CPT} -(i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)(-x)^\dagger \\
(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)(x) &\xrightarrow{CPT} (\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)(-x)^\dagger
\end{aligned}$$

Ključno je za uočiti da kad se bilineari klasificiraju u skladu s Lorentz tenzorskim rangom, zakon transformacije je identičan onom u (4.14.37). Vidimo da svi Lorentz kovarijantni gradivni elementi (tenzori ranga k), se na CPT transformiraju u skladu s (4.14.37). Može se pokazati da se ova tvrdnja generalizira na polja proizvoljnog spina.

Sad je lako dokazati teorem. Članovi u lagranžijanskoj gustoći u relativističkim teorijama polja moraju biti skalari na prave Lorentzove transformacije i mogu biti izgrađeni samo množenjem i kontrahiranjem svih indeksa osnovnih gradivnih elemenata čiji zakon transformacije je dan u (4.14.37). Pošto indeksa u svakom produktu mora biti paran broj, iz (4.14.37) slijedi:

$$\mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}(-x) \quad (4.14.38)$$

To znači da za akciju vrijedi:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \xrightarrow{CPT} \int d^4x \mathcal{L}(-x) = \int d^4x \mathcal{L}(x) = S \quad (4.14.39)$$

Invarijantnost akcije garantira komutiranje hamiltonijana s CPT . Time smo dokazali CPT teorem:

CPT je simetrija u svim relativističkim kvantnim teorijama polja.

Fizikalne posljedice CPT teorema

CPT teorem vodi na neke izuzetno važne, direktno mjerljive predikcije, koje su posljedica toga da djelovanje CPT prebacuje čestice u antičestice u stanjima. Istaknimo sljedeće:

- **Čestice i antičestice imaju točno jednaku masu** – ovo je direktna posljedica komutativnosti CPT operatora s hamiltonijanom, $[CPT, H] = 0$.
- **Čestice i antičestice imaju točno jednak iznos naboja (ali suprotan predznak)** – slijedi iz $\{CPT, Q\} = 0$ gdje je Q operator električnog naboja.
- **Nestabilna čestica ima točno jednako vrijeme raspada kao i pripadna joj antičestica** – dokaz ovog je nešto malo zahtjevniji i nećemo ga raditi na satu.
- **Čestice i antičestice imaju točno jednak iznos magnetskog momenta**

Čak i samo jedno eksperimentalno narušenje bilo koje od ovih tvrdnji bi bio dokaz da opis prirodnih zakona putem relativističkih kvantnih teorija polja nije dobar. Takvo narušenje još nije opaženo. Na primjer, eksperimentalni rezultati mjerenje relativnih razlika u iznosu mase, naboja i magnetskog momenta između elektrona i pozitrona daju sljedeće rezultate:

$$\frac{|m_{e^-} - m_{e^+}|}{m_{e^-}} < 8 \times 10^{-9} \quad , \quad \frac{|q_{e^-} - q_{e^+}|}{e} < 4 \times 10^{-8} \quad , \quad \frac{|g_{e^-} - g_{e^+}|}{g_{e^-}} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$$

Rezultat za magnetski moment je izražen pomoću g -faktora, čije kvantne korekcije ćemo analizirati u odjeljku 5.7.

4.15 Feynmanova pravila za polja proizvoljnog spina

4.15.1 Generalizacija formalizma

U poglavlju 3.8 izveli smo Feynmanova pravila za polja spina 0, koja smo u odjeljku 4.7 proširili na situaciju u kojoj postoji i bezmaseno polje spina 1. U ovom odjeljku ukratko ćemo razmotriti generalizaciju na polja proizvoljnog spina, s tim da ćemo izvesti tvrdnji i primjenu na neke složenije teorije, poput ne-Abelovih baždarnih teorija polja, ostaviti za naprednije kolegije.

Formule koje smo koristili u izvodu Feynmanovih pravila u odjeljku 3.8, koje uključuju LSZ formulu (3.7.14), Gell-Mann–Low formula i Wickov teorem, prirodno se generaliziraju na polja proizvoljnog spina. U slučaju fermionskih polja radi očuvanja manifestne Lorentz kovarijantnosti Feynmanovih pravila pokazuje se spretnim koristiti polje $\bar{\psi}$ umjesto polja $\psi^\dagger$, što treba imati u vidu pri računu propagatora (kao što smo to napravili za Diracovo polje u odjeljku 4.12.3) i u određivanju doprinosa čvorova (u slučaju Diracovog polja γ^0 iz $\bar{\psi}$ se ne uključuje u doprinos čvora). Također treba imati na umu da u definiciji vremenskog i normalnog uređenja svaki član ima faktor $(-1)^P$, gdje je P parnost permutacije fermionskih operatora u produktu. Ovi faktori dovode do dodatnih Feynmanovih pravila u teorijama u kojima postoje fermionska polja.

4.15.2 Dodatna pravila za fermione – predznaci i petlje

Fermionska polja i pripadne linije daju dva dodatna Feynmanova pravila. Oba ova pravila su posljedica činjenice da u T -uređenom produktu zamjena mjesta polja dovodi do promjene predznaka ako je permutacija neparna, npr. kao što je to slučaj kod izmjene mjesta susjednih polja:

$$T\{\cdots \psi_j(x)\psi_l(y)\cdots\} = -T\{\cdots \psi_l(y)\psi_j(x)\cdots\}$$

Ovo dovodi do pojave nekih (-1) faktora koji ne postoje u bozonskim teorijama. U praksi se ovi ekstra faktori mogu u većini situacija opisati sljedećim jednostavnim pravilima:

1. Dodati (relativni) (-1) faktor između dijagrama koji se razlikuju za izmjenu dviju vanjskih linija koje pripadaju **identičnim fermionima**.
2. Dodati (-1) faktor za svaku **zatvorenu** fermionsku liniju (tzv. **petlju**).

4.15.3 Baždarna polja

U slučaju baždarnih teorija polja postoje dodatne finese koje su posljedica činjenice da u ovakvim teorijama postoje **veze prvog reda**.³⁸ Ovdje nećemo ulaziti u finese kvantizacije ovakvih teorija (za ovu svrhu je najspretnije koristiti formalizam integracije po stazama), već ćemo se zadovoljiti natuknicom da u slučaju elektrodinamike u kovarijantnom baždarenju Feynmanova pravila vrijede najnormalnije - sve što treba je koristiti kovarijantni propagator za fotonsko polje i sva pravila su standardna.

4.16 Yukawa teorija

Najjednostavniji netrivialni primjer relativističke kvantne teorije polja koji sadrži fermione je **Yukawa teorija**, u kojoj postoje dva fundamentalna polja, jedno Diracovo polje $\psi(x)$ mase M i jedno realno skalarno polje $\varphi(x)$ mase m , i čiji lagranžijan je dan s

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_0 - g_Y \bar{\psi}\psi\varphi \quad (4.16.1)$$

³⁸Za studente koji nisu upoznati s teorijom sustava u kanonskom formalizmu sustava s vezama, napomenimo samo da su veze drugog reda one koje se, bar u principu, mogu riješiti redefinicijom kanonskih varijabli (generaliziranih koordinata i impulsa). Veze prvog reda su one u kojima to nije moguće. Može se pokazati da su veze prvog reda uvijek povezane s baždarnim simetrijama. Primjer teorije polja s vezama prvog reda je elektrodinamika, gdje smo ih riješili nametanjem baždarnog uvjeta.

$\mathcal{L}_0$ je slobodni lagranžijan za polja ψ i φ ,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi \quad (4.16.2)$$

dok je g_Y konstanta vezanja. Obratite pažnju da međudjelovanje posjeduje simetriju na paritet ukoliko je polje φ skalar. U slučaju da smo umjesto $\bar{\psi}\psi$ stavili $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ isto bi vrijedilo ako bi φ bio pseudoskalar.

U Standardnom modelu fizike elementarnih čestica svi elementarni fermioni (kvarkovi i leptoni) se vežu na Higgsovo polje putem Yukawa međudjelovanja.

4.16.1 Feynmanova pravila za Yukawa teoriju

Iz (4.16.1) i (4.16.2) možemo očitati Feynmanova pravila:

Propagatori:

$$\begin{aligned} \psi &: \quad j \bullet \xrightarrow{p} \bullet l &= \quad \frac{i(\not{p} + M)_{lj}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\ \varphi &: \quad \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet &= \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Čvorovi:

$$j \xrightarrow{\quad} \bullet \begin{cases} \nearrow \text{---} \text{---} \text{---} \\ \searrow \xrightarrow{\quad} l \end{cases} = -ig_Y \delta_{lj}$$

Vanjske linije (on-shell):

$$\begin{aligned} \text{ulazna čestica } \psi &: \quad p, \sigma \xrightarrow{\quad} \bullet j &= \quad u_j(p, \sigma) \\ \text{ulazna antičestica } \bar{\psi} &: \quad p, \sigma \xleftarrow{\quad} \bullet j &= \quad \bar{v}_j(p, \sigma) \\ \text{izlazna čestica } \psi &: \quad j \bullet \xrightarrow{\quad} p, \sigma &= \quad \bar{u}_j(p, \sigma) \\ \text{izlazna antičestica } \bar{\psi} &: \quad j \bullet \xleftarrow{\quad} p, \sigma &= \quad v_j(p, \sigma) \\ \text{ulazni i izlazni skalar } \varphi &: \quad \bullet \text{---} \text{---} \text{---} &= \quad 1 \end{aligned}$$

Napomene:

- U čvorovima se sumira po spinornim ($j, l, \dots$) indeksima.
- Fermionska linija ne može nestati usred dijagrama niti se može razgranati. Strelice na liniji imaju konzistentan smjer. To znači da postoje samo dvije vrste linija: otvorene i zatvorene (petlje). Za petlje postoji jedno dodatno pravilo koje ćemo izreći malo kasnije.
- U računanju doprinosa neke fermionske linije u Feynmanovom dijagramu spretno je krenuti od kraja linije i ići prema početku, znači suprotno od smjera strelice – doprinos linije se dobije matričnim množenjem spinornih objekata s lijeva na desno. Ukoliko se radi o petlji (koja nema ni početak ni kraj), može se krenuti od proizvoljnog čvora i napraviti puni krug, iz čega slijedi da se u doprinosu svake petlje prirodno pojavljuje trag po spinornim indeksima.

4.16.2 Proces: elastično raspršenje dva fermiona ($\psi + \psi \longrightarrow \psi + \psi$)

Kao primjer procesa u Yukawa teoriji razmotrimo elastično raspršenje dva fermiona u drvastoj aproksimaciji.

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_t + i\mathcal{M}_u + O(g_Y^4)$$

Primjena Feynmanovih pravila, uključujući i dodatno pravilo za fermione koje daje relativni minus predznak između dva dijagrama, daje:

$$\mathcal{M} = -g_Y^2 \left[\frac{(\bar{u}'_1 u_1)(\bar{u}'_2 u_2)}{(p'_1 - p_1)^2 - m^2} - \frac{(\bar{u}'_2 u_1)(\bar{u}'_1 u_2)}{(p'_2 - p_1)^2 - m^2} \right] \quad (4.16.3)$$

gdje smo koristili kratice $u_1 = u(p_1, \sigma_1)$, $u'_1 = u(p'_1, \sigma'_1)$, $u_2 = u(p_2, \sigma_2)$ i $u'_2 = u(p'_2, \sigma'_2)$.

Zadatak 4.16.1: Izračunajte diferencijalni udarni presjek za nepolarizirano elastično raspršenje dva fermiona u Yukawa teoriji (nepolarizirano raspršenje znači da usrednjavamo po ulaznim spinovima i sumiramo po izlaznim spinovima.). Razmotrite UV limes ($E_{\text{CM}} \gg m, M$) i potom izračunajte totalni udarni presjek. (Naputak: U računu za $\sum |\mathcal{M}|^2$, gdje se sumira po svim ulaznim i izlaznim spinovima, koristite relacije (4.11.20).)

4.16.3 Yukawa potencijal

U odjeljku 3.6.4 pokazali smo da iz nerelativističkog limesa invarijantne amplitude za elastično raspršenje dvije čestice u CM sustavu možemo izračunati klasičnu potencijalnu energiju međudjelovanja. Primijenimo to sada na amplitudu raspršenja dva fermiona u Yukawa teoriji (4.16.3).

U nerelativističkom limesu u CM sustavu vrijedi

$$p_1 \approx (M, \mathbf{p}) \quad , \quad p_2 \approx (M, -\mathbf{p}) \quad , \quad p'_1 \approx (M, \mathbf{p}') \quad , \quad p'_2 \approx (M, -\mathbf{p}')$$

gdje su korekcije reda veličine $\mathbf{p}/m^2$. Iz toga slijedi

$$(p'_1 - p_1)^2 \approx -|\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1|^2 = -|\mathbf{k}|^2 \quad , \quad (p'_2 - p_1)^2 \approx -|\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1|^2$$

gdje smo uveli $\mathbf{k} \equiv \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$. Iz (4.16.3) slijedi da nam trebamo izvrijedniti $(\bar{u}'_j u_j)$, $j = 1, 2$. U nerelativističkom limesu možemo uzeti $u(\mathbf{p}, \sigma) \approx u(0, \sigma)$, pa iz (4.11.18), slijedi

$$(\bar{u}'_1 u_1) \equiv \bar{u}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1) u(\mathbf{p}_1, \sigma_2) \approx 2M \delta_{\sigma_1 \sigma'_1}$$

i analogan rezultat za $(\bar{u}'_2 u_2)$. Uvrštavanje gornjih izraza u (4.16.3) daje

$$\mathcal{M} \approx g_Y^2 \frac{4M^2}{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} \delta_{\sigma_2 \sigma'_2} - (1' \leftrightarrow 2')$$

Usporedbom gornjeg izraza s (3.6.27) vidimo da trebamo uzeti samo prvi član i ubaciti ga u formulu (3.6.29). Rezultat je

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = -\frac{g_Y^2}{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$$

Potencijalna energija u x-prostoru je Fourierov transformat gornjeg izraza:

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\frac{g_Y^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{(ikr)(k^2 + m^2)} = \frac{ig_Y^2}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 + m^2}$$

Integral se jednostavno izračuna metodom reziduuma, tako da se k produlji u kompleksnu ravninu, potom zatvori kontura po beskonačnoj polukružnici odozgo (tj. u gornjoj poluravnini), te uoči da se polovi podintegralne funkcije nalaze u $k = \pm im$. Pošto se samo pol $k = im$ nalazi unutar konture, teorem o reziduuumima nam daje konačni rezultat

$$V(r) = -\frac{g_Y^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (4.16.4)$$

koji se naziva **Yukawa potencijalna energija**.

Par napomena:

1. Sjetite se da se Yukawa potencijal, dan s

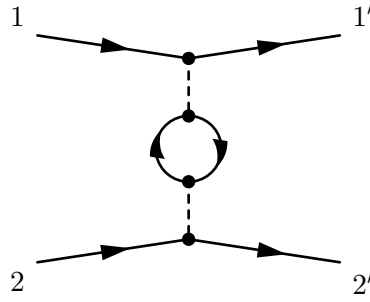
$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (4.16.5)$$

prvi put pojavio u jednadžbi (2.6.18) kao klasično rješenje Klein-Gordonovog polja vezanog za statični točkasti izvor naboja q . To, naravno, nije nikakvo iznenađenje ako uočimo da je međudjelovanje u Yukawa teoriji posredovano realnim skalarnim poljem i da najniži red u Feynmanovom razvoju daje klasičnu potencijalnu energiju, koja je pak jednaka (naboj) $\times$ (potencijal). Pošto je jednadžba gibanja za polje φ koja slijedi iz Yukawa lagranžijana (4.16.1) dana s

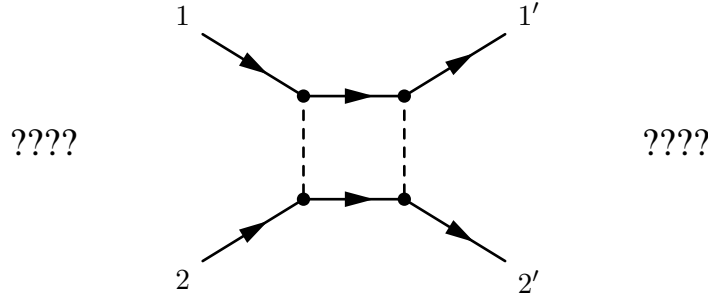
$$(\square + m^2)\varphi = j \quad , \quad j = -g_Y \bar{\psi}\psi$$

vidimo da $-g_Y$ ujedno igra ulogu "naboja". Predznak u izrazu za $V(r)$, koji određuje da li je sila privlačna ili odbojna, je određen detaljima teorije (posebno izrazom za struju $j(x)$).

2. Uočite da je Yukawa sila između dva fermiona **privlačna** i da to ne ovisi o predznaku od g_Y . Može se pokazati da je sila između fermiona i antifermiona **također privlačna**, što je suprotno od ponašanja Coulombovog zakona u elektrodinamici.
3. Pošto smo koristili najniži red u Feynmanovom računu, rezultat za potencijalnu energiju je klasičan. Ovaj rezultat ima kvantne korekcije koje dolaze od dijagrama s petljama na unutarnjoj skalarnoj liniji. Dijagram koji doprinosi potencijalnoj energiji u sljedećem redu u $\hbar$ je



i križani dijagram koji se dobije zamjenom $1' \leftrightarrow 2'$. Pošto ovaj dijagram daje doprinos s faktorom g_Y^4 , čitatelj se možda pita zašto nismo onda uzeli u obzir i sljedeći dijagram



koji također daje doprinos $\mathcal{M}$ s faktorom g_Y^4 ? Stvar je u tome da ovaj dijagram odgovara sljedećem redu u Bornovom razvoju (perturbativni razvoj u nerelativističkoj kvantnoj mehanici po jakosti vezanja), koji je kvadratičan u $V(\mathbf{x})$, pa stoga **ne doprinosi potencijalnoj energiji**. Bornov perturbativni razvoj, grafički prikazan, je razvoj po "prečkama", gdje svaka prečka daje faktor $\tilde{V}(\mathbf{k}_j)$. Za razliku od toga, prethodni dijagram s fermionskom petljom ima samo jednu "prečku" je korekcija kvantne teorije polja unutar najnižeg Bornovog doprinosa u kvantnoj mehanici, pa doprinosi potencijalnoj energiji (kvantno-korigirana potencijalna energija). Poanta je da u svakom redu Bornove aproksimacije postoji beskonačno mnogo pripadnih Feynmanovih dijagrama s petljama koji vode na razvoj u $\hbar$. Pošto još nismo naučili kako računati Feynmanove dijagrame s petljama, kasnije ćemo, na primjeru spinorne elektrodinamike, pokazati kako se računaju kvantne korekcije potencijalne energije (vidi odjeljak 5.5.3).

4.17 Spinorna kvantna elektrodinamika

Obično se pod kvantnom elektrodinamikom (eng. QED) podrazumijeva klasa teorija u kojoj postoji određeni broj Diracovih polja $\psi_n(x)$ ("materija") koja su **minimalno** vezana na realno bezmaseno spin 1 polje $A_\mu(x)$ ("elektromagnetsko polje") čiju pripadnu česticu ćemo zvati foton i označavati s γ . U smislu praktične primjene to je najvažnija vrsta kvantnih teorija polja. Lagranžijan je dan s

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_n \bar{\psi}_n (i\not{D} - m_n) \psi_n$$

gdje su

$$D_\mu \psi_n = \partial_\mu \psi_n - iq_n A_\mu \psi_n \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

i gdje je q_n "električni naboj" kojeg nosi polje ψ_n . Lagranžijan možemo raspisati u slobodni i interakcijski dio na standardni način

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

gdje su

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_n \bar{\psi}_n (i\not{D} - m_n) \psi_n$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = A_\mu \sum_n q_n \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n$$

Vrlo često se naziv QED koristi u užem smislu za teoriju u kojoj postoji samo jedno Diracovo polje. Pripadnu česticu ćemo nazivati "elektron" i označavati s e^- , a pripadnu antičesticu "pozitron" (ili antielektron) i označavati s e^+ . U situacijama kada uistinu mislimo na fizikalni elektron nećemo pisati navodnike i podrazumijevat ćemo da je naboj $q = -e$ gdje je $e = 1.60217657 \times 10^{-19} \text{ C}$ u SI sustavu jedinica. Za proučavanje najvažnijih teorijskih svojstava QED dovoljno je razmotriti ovu užu teoriju.

4.17.1 Feynmanova pravila za spinornu kvantnu elektrodinamiku

Imamo sve sastojke za napisati osnovne gradivne elemente u QED za Feynmanov račun, koje ćemo odmah napisati u p -prostoru. Kao i prije, izrazi za vanjske noge se odnose na račun za invarijantnu amplitudu $\mathcal{M}$ (on-shell dijagrami), dok se u računu off-shell dijagrama u kojima vanjske linije nisu na ljusci mase, $p_i^2 \neq m_i^2$, za vanjske linije koriste propagatori (primjeri su računanje korelacijskih funkcija ili poddijagrama).

Propagatori:

$$e : \quad j \bullet \xrightarrow{p} \bullet l = \frac{i(\not{p} + m)_{lj}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\gamma : \quad \mu \bullet \text{~~~~~} \bullet \nu \xrightarrow{p} = -\frac{i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Čvorovi:

$$j \xrightarrow{\quad} \bullet \begin{array}{l} \nearrow \text{~~~~~} \\ \searrow \text{---} l \end{array} \quad \mu = i q_e (\gamma^\mu)_{lj}$$

Vanjske linije (on-shell linije s $p^2 = m^2$, kao u $\mathcal{M}$):

ulazna čestica e^- :	$p, \sigma \xrightarrow{\quad} \bullet j$	$= u_j(p, \sigma)$
ulazna antičestica e^+ :	$p, \sigma \xleftarrow{\quad} \bullet j$	$= \bar{v}_j(p, \sigma)$
ulazni foton γ :	$k, \sigma \xrightarrow{\quad} \bullet \mu$	$= \varepsilon_\sigma^\mu(k)$
izlazna čestica e^- :	$j \bullet \xrightarrow{\quad} p, \sigma$	$= \bar{u}_j(p, \sigma)$
izlazna antičestica e^+ :	$j \bullet \xleftarrow{\quad} p, \sigma$	$= v_j(p, \sigma)$
izlazni foton γ :	$\mu \bullet \xrightarrow{\quad} k, \sigma$	$= \varepsilon_\sigma^\mu(k)^*$

Napomene:

- Pravila za fotonsko polje smo napisali u Feynmanovom baždarenju.
- Ukoliko postoji više Diracovih polja, svako ima svoj pridružene linije, propagator i čvor. Treba samo paziti da se svakom polju/čestici pridruži ispravna masa m_n i naboj q_n .
- Dvije fermionske linije u čvoru uvijek pripadaju istom polju/čestici (ne može u čvor ući mionska a izaći elektronska linija).
- U čvorovima se sumira po spinornim $(j, l, \dots)$ i prostorno-vremenskim $(\mu, \nu, \dots)$ indeksima.
- Fermionska linija ne može nestati usred dijagrama niti se može razgranati. Strelice na liniji imaju konzistentan smjer. To znači da postoje samo dvije vrste linija: otvorene i zatvorene (petlje). Za petlje postoji jedno dodatno pravilo koje ćemo izreći malo kasnije.
- U računanju doprinosa neke fermionske linije u Feynmanovom dijagramu spretno je krenuti od kraja linije i ići prema početku, znači suprotno od smjera strelice – doprinos linije se dobije matricnim množenjem spinornih objekata s lijeva na desno. Ukoliko se radi o petlji (koja nema ni početak ni kraj), može se krenuti od proizvoljnog čvora i napraviti puni krug, iz čega slijedi da se u doprinosu svake petlje prirodno pojavljuje trag po spinornim indeksima.

4.18 Primjeri procesa u spinornoj kvantnoj elektrodinamici

Razmotrimo sada neke najosnovnije procese tipa $2 \rightarrow 2$ u okviru spinorne kvantne elektrodinamike koje računamo u najnižem redu, tj. u drvastoj aproksimaciji.

4.18.1 $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Za početak razmotrimo anihilacijski proces tipa $2 \rightarrow 2$ u kojem par čestica-antičestica prelazi u par čestica-antičestica, s tim da su čestice u izlaznom stanju različite od onih u ulaznom. Ovaj proces uključuje najmanji broj Feynmanovih dijagrama u drvastoj aproksimaciji (samo jedan).

$$\begin{array}{c} e^+, p_2, s_2 \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ e^-, p_1, s_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu^+, p'_2, s'_2 \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \mu^-, p'_1, s'_1 \end{array} = \begin{array}{c} p_2, s_2 \\ \nearrow \\ \bullet \mu \\ \searrow \\ p_1, s_1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \bullet \nu \\ \searrow \\ p'_2, s'_2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ p'_1, s'_1 \end{array} + O(e^4)$$

Za navedene čestice naboj u čvorovima je $q_e = q_\mu = -e$. Također je očito da vrijedi $k = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$. Invarijantna amplituda se može napisati kao:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{tree}} + O(e^4)$$

gdje je drvasti doprinos dan prikazanim dijagramom koji je s -tipa. Primjena Feynmanovih pravila daje:

$$i\mathcal{M}_{\text{tree}} = (ie)^2 (\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} (\bar{u}'_1 \gamma^\nu v'_2)$$

gdje smo koristili skraćene oznake za spinore, $u_1 \equiv u(p_1, s_1)$ i slično za druge. Sređivanje daje

$$\mathcal{M}_{\text{tree}} = \frac{e^2}{s} (\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}'_1 \gamma_\mu v'_2) \quad (4.18.1)$$

gdje je $s = k^2$ Mandelstamova varijabla. Pošto želimo izračunati $|\mathcal{M}_{\text{tree}}|^2 = \mathcal{M}_{\text{tree}}^* \mathcal{M}_{\text{tree}}$ treba nam relacija

$$(\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1)^* = \psi_1^\dagger \gamma_\mu^\dagger \bar{\psi}_2^\dagger = (\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2) \quad (4.18.2)$$

koja vrijedi za bilo koja dva Diracova spinora čije komponente poprimaju vrijednosti u $\mathbb{C}$. U izvodu smo koristili $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ i $\gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu$. Primjenom (4.18.2) u (4.18.1) dobijamo

$$\mathcal{M}_{\text{tree}}^* = \frac{e^2}{s} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}'_2 \gamma_\mu u'_1)$$

pa je

$$|\mathcal{M}_{\text{tree}}|^2 = \frac{e^4}{s^2} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}'_2 \gamma_\mu u'_1) (\bar{v}_2 \gamma^\nu u_1) (\bar{u}'_1 \gamma_\nu v'_2) \quad (4.18.3)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{tree}}|^2 + O(e^6)$$

Nepolarizirano raspršenje

Razmotrimo sada **potpuno nepolarizirani proces**. Pod ovim podrazumijevamo situaciju u kojoj su (i) upadne čestice nepolarizirane, tj. upadno stanje je statistička mješavina (ansambl) dviju nezavisnih okomitih polarizacija s istom težinom, (ii) ne zanima nas polarizacija izlaznih čestica pa sumiramo po njima. Matematičkim rječnikom, moramo sumirati po polarizacijskim stanjima izlaznih čestica i usrednjiti po polarizacijskim stanjima upadnih čestica:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{2 \times 2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s'_1} \sum_{s'_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (4.18.4)$$

Primjena identiteta (4.11.20) daje

$$\begin{aligned} \sum_{s_1} \sum_{s_2} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_2 \gamma^\nu u_1) &= \text{tr}(\gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{p}_1 + m_e)) = \text{tr}(\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_1) - m_e^2 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 4(p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)) - 4m_e^2 \eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Na isti način dobije se

$$\sum_{s'_1} \sum_{s'_2} (\bar{u}'_1 \gamma^\nu v'_2) (\bar{v}'_2 \gamma^\mu u'_1) = 4(p_2'^\mu p_1'^\nu + p_2'^\nu p_1'^\mu - \eta^{\mu\nu} (p'_1 \cdot p'_2)) - 4m_\mu^2 \eta^{\mu\nu}$$

U gornjim relacijama m_e je masa elektrona a m_μ masa miona i koristili smo $p_1^2 = p_2^2 = m_e^2$ i $p_1'^2 = p_2'^2 = m_\mu^2$. Uvrštavanjem ovih izraza i (4.18.3) u (4.18.4) nakon sređivanja dobijamo

$$|\overline{\mathcal{M}_{\text{tree}}}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_1')(p_2 \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') + m_e^2(p_1' \cdot p_2') + m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_\mu^2]$$

Na ovom mjestu spretno je uvesti Mandelstamove varijable:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2 = 2m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2) = 2m_\mu^2 + 2(p_1' \cdot p_2') \\ t &= (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1 \cdot p_1') = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_2 \cdot p_2') \\ u &= (p_1 - p_2')^2 = (p_2 - p_1')^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1 \cdot p_2') = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_2 \cdot p_1') \end{aligned}$$

Uočimo da je $(p_1 \cdot p_1') = (p_2 \cdot p_2')$ i $(p_1 \cdot p_2') = (p_2 \cdot p_1')$. Uvrštavanje i sređivanje daje:

$$|\overline{\mathcal{M}_{\text{tree}}}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2] \quad (4.18.5)$$

Diferencijalni udarni presjek za nepolarizirano raspršenje

Razmotrimo raspršenje iz sustava centra masa. U tom slučaju možemo koristiti relaciju (3.6.21) koja glasi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \theta(E_{\text{CM}} - 2m_\mu^2) \quad (4.18.6)$$

gdje je

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad , \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' \quad , \quad E_{\text{CM}} = 2E \quad , \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2} = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_\mu^2}$$

Iz tih relacija slijedi da u sustavu centra masa vrijedi

$$\begin{aligned} s &= 4E^2 = E_{\text{CM}}^2 \\ t &= m_e^2 + m_\mu^2 - 2(E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \\ u &= m_e^2 + m_\mu^2 - 2(E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \end{aligned}$$

Uvrštavanje toga i (4.18.5) u (4.18.6) daje

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{\alpha_e^2}{16E^6} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} [E^4 + \mathbf{p}^2 \mathbf{p}'^2 \cos^2 \theta + E^2(m_e^2 + m_\mu^2)] + O(\alpha_e^3)$$

gdje je θ kut između $\mathbf{p}$ i $\mathbf{p}'$, što znači da je $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}'||\mathbf{p}| \cos \theta$.

Pošto je $m_e/m_\mu \approx 1/200$, što je manje od konstante fine strukture α_e , u okviru preciznosti drvaste aproksimacije (naniži red u $\alpha_e \approx 1/137$) možemo staviti $m_e = 0$. U toj aproksimaciji gornji izraz postaje

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} \approx \frac{\alpha_e^2}{16E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta\right]$$

U praktičnim primjenama često nas zanima ultrarelativistički (UV) limes u kojem je $m_\mu \ll E$. U tom slučaju gornji izraz postaje

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} \approx \frac{\alpha_e^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

U UV limesu možemo egzaktno izračunati totalni udarni presjek:

$$\sigma_{\text{CM}} \equiv \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} \approx \frac{\alpha_e^2}{4E^2} \int_{-1}^1 du (1 + u^2) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{3} \frac{\alpha_e^2}{E^2}$$

gdje smo uveli supstituciju $u \equiv \cos \theta$ i upotrijebili integral

$$\int_{-1}^1 du (1 + u^2) = \left(u + \frac{u^3}{3}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

4.18.2 $e^- + p^+ \rightarrow e^- + p^+$ (Rutherfordovo raspršenje)

Vidjeti u Schwartzovoj knjizi, odjeljak 13.4.

4.18.3 $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ (Comptonovo raspršenje)

Vidjeti u Schwartzovoj knjizi, odjeljak 13.5.

Zadatak 4.17.1: Za proces $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ (Møllerovo raspršenje) ponovite analizu koju smo napravili u slučaju $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ raspršenja. (Uočite da sad postoji više od jednog dijagrama.)

Zadatak 4.17.2: Za proces anihilacije para $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$ ponovite analizu koju smo napravili za slučaj $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ raspršenja. Također razmotrite slučaj u kojem su elektron i pozitron niskoenergetski, $E_{\text{CM}} \approx 2m_e$. Coulombovo međudjelovanje između e^- i e^+ ukazuje da bi mogla postojati vezana stanja, slična onima u atomu vodika (samo što umjesto protona imamo pozitron), koje se naziva pozitronij. Za razliku od atoma vodika čije najniže stanje je stabilno, uslijed procesa anihilacija para pozitronij je nestabilno vezano stanje. Uz pretpostavku da je vrijeme života pozitronija dovoljno veliko da ga se može približno tretirati kao spororaspadajuće stanje, izračunaj vrijeme života pozitronija ovisno o ukupnom angularnom momentu sustava (singlet naprama triplet). Iz dobijenog rezultata diskutiraj da li je aproksimacija sporog raspada zadovoljavajuća, tj. da li je dobijeni rezultat za vrijeme raspada smislen.

Poglavlje 5

Osnove teorije renormalizacije

5.1 Uvodne napomene

U razmatranjima Feynmanovog računa u dosadašnjem dijelu kolegija računali smo samo drvaste dijagrame, što je u stvari “klasičan” doprinos najnižeg reda u $\hbar$. Prava **kvantna fizika u Feynmanovom računu je sadržana u dijagramima s petljama** i to je ono čime ćemo se baviti od sad do kraja kolegija.

Postoje dva dijela ove “priče”, koja se često pakiraju zajedno no u stvari nisu nužno povezana:

(Re)normalizacija

Nakon dodavanja međudjelovanja, parametri u akciji prestaju imati isto fizikalno značenje koje su imali u teoriji slobodnih polja. Da bi razumijeli ovo, razmotrimo primjer φ^3 teorije u kojoj postoji jedno realno skalarno polje s lagranžijanom:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{3!}\varphi^3$$

U slobodnoj teoriji (kad je $g = 0$) parametar m ima fizikalno značenje mase čestice koja se pojavljuje kao pobuđenje u kvantiziranoj teoriji. Fizikalna masa je dana relacijom za 4-impuls fizikalne čestice $p^2 = m^2$. U kvantiziranoj teoriji masa određuje pol u propagatoru polja u p -prostoru. To se jasno vidi u propagatoru slobodne teorije koji glasi

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.1.1)$$

i gdje je očito da se pol nalazi u $p^2 = m^2$. LSZ formula nam kaže da se ta uloga fizikalne mase ne mijenja u interagirajućoj teoriji, tj. da je pol propagatora ponovo određen masom na isti način. No, uslijed postojanja interakcija propagator više nije isti kao u slobodnoj teoriji. Koristeći Feynmanove dijagrame možemo ga prikazati kao:

$$\begin{aligned}
 p \text{ --- } \text{shaded circle} \text{ --- } p &= \text{--- } p \text{ ---} + p \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } p + \\
 &+ p \text{ --- } \text{tadpole} \text{ --- } p + O(g^4)
 \end{aligned}$$

gdje prvi član (linija) daje (5.1.1). S obzirom na doprinos ostalih Feynmanovih dijagrama, ne postoji nikakav razlog zašto bi propagator u interagirajućoj teoriji morao imati pol na istom mjestu kao propagator u slobodnoj teoriji.¹

¹Postoje situacije u kojima simetrije mogu diktirati da kvantni doprinosi na korekciju mase iščezavaju, kao što je to slučaj mase fotona u elektrodinamici. No, to su izuzetne, a ne generičke situacije.

Stoga općenito očekujemo da se pol nalazi u $p^2 = m_{\text{fiz}}^2$, gdje je $m_{\text{fiz}} \neq m$. U tom slučaju, masa čestice u interagirajućoj teoriji nije m nego m_f . Vidimo kako se značenje parametra u lagranžijanu (m) mijenja kako mijenjamo međudjelovanje. Isto očekujemo da vrijedi i za ostale parametre u lagranžijanu (mase, konstante vezanja i konstante normalizacije polja). U tom smislu parametre u lagranžijanu (m , g u gornjem primjeru) i polja (φ) ćemo zvati **goli parametri**, a parametre i polja koji imaju jasno fizikalno značenje ćemo zvati **renormalizirani parametri i polja** i obično ih označavati s indeksom R , npr. m_R , g_R , φ_R i sl. Goli parametri se često označavaju indeksom B (eng. *bare*), npr. m_B , g_B , φ_B i sl.

Regularizacija

Pokazuje se da dijagrami koji sadrže petlje pojedinačno često daju **beskonačne** doprinose ako pretpostavimo da su goli parametri i polja konačni. Divergencije koje nas ovdje zanimaju su one koje dolaze iz područja integracije po neograničeno velikim impulsima (UV divergencije).² Npr. razmotrimo doprinos drugog dijagrama u gornjem razvoju za propagator (izostavljam faktore koji pripadaju vanjskim linijama jer su konačni):

$$g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Ovaj integral očito divergira u ultralubičastom (UV) području integracije kad $k \rightarrow \infty$, jer u području $k^\mu \gg p^\mu$ i $k^2 \gg m^2$ dijagram daje doprinos proporcionalan

$$\sim g^2 \int^\infty dk k^3 \frac{1}{k^4} = g^2 \int^\infty \frac{dk}{k} = g^2 \ln k \Big|^\infty \rightarrow \infty$$

Također se pokazuje da se divergencije ne pokrate kad zbrojimo doprinose svih dijagrama u danom redu. Ove beskonačnosti se pojavljuju u fizikalnim veličinama kao što su udarni presjeci, koje su po definiciji mjerljive i konačne i ako želimo da kvantne teorije polja imaju ikakvu fizikalnu primjenu moramo naći način kako se riješiti beskonačnosti.

No, prije toga logično je zapitati se odakle dolaze ovakve UV beskonačnosti? U stvari, jedan mogući uzrok je jasan. Vidjeli smo da su mjerljive veličine u teorijama polja (poput energije, impulsa, naboja, interakcijskog lagranžijana i dr.) definirane kao umnošci dvaju ili više elementarnih polja u istoj točki prostor-vremena. U klasičnoj teoriji, gdje su polja najobičnije funkcije koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, ovi umnošci su dobro definirani. No, u kvantnoj teoriji polja su operatorske distribucije i njihov umnožak u istoj točki prostora nije matematički dobro definiran iz istog razloga zbog kojeg umnožak dvije Diracove δ -funkcije u istoj točki, $(\delta(x))^2$, nije dobro definiran.³ Ukoliko napravite Fourierov transformat u p -prostor, vidi se da režim malih udaljenosti odgovara režimu velikog 4-impulsa, tj. $(x - y) \rightarrow 0$ odgovara limesu $p \rightarrow \infty$.

Kao što ćemo detaljno elaborirati, rješenje se nalazi kombiniranjem potrebe za renormalizacijom, tako da se beskonačnosti “utrpaju” u gole parametre (odnosno, postoje beskonačnosti u golim parametrima koje se krate, do na konačni dio, s beskonačnostima koje proizvode petlje u dijagramima). Ideja je da se za parametre teorije odaberu direktno mjerljive (“renormalizirane”) veličine i potom se sve druge fizikalne veličine napišu kao njihove funkcije, odnosno

Mjerljive veličine su konačne i u principu izračunljive funkcije drugih mjerljivih veličina.

Ukoliko je minimalni broj tih renormaliziranih parametara **konačan**, za teoriju se kaže da je **renormalizabilna** i u tom slučaju je kvantizirana renormalizirana teorija na isti način prediktabilna kao što je to u klasičnom režimu (u smislu da se svaka fizikalna veličina koju izračunamo u teoriji može napisati kao funkcija fiksnog konačnog skupa parametara).

Ukoliko je potrebno definirati **beskonačno** renormaliziranih parametara, za teoriju kažemo da je **nerenormalizabilna**. Takve teorije ne posjeduju prediktabilnost u standardnom smislu jer posjeduju beskonačnodimenzionalan

²U bezmasenim teorijama postoje još i divergencije koje dolaze od integracije po beskonačno malim impulsima (IR divergencije). One imaju sasvim drugo značenje i rješavaju se na sasvim drugi način.

³Diracova funkcija nije funkcija nego distribucija, tj. definirana je samo putem integrala po nekoj glatkoj testnoj funkciji $f(x)$, $\int dx f(x) \delta(x)$.

parametarski prostor, dok je broj svih mjerenja koje smo u povijesti napravili uvijek samo konačan. No, ako se ograničimo na **niskonenergetski (IR)** režim, tj. radimo perturbativni razvoj po $1/E$ (gdje je E energetska skala u procesu), može se pokazati da samo konačan broj parametara postaje relevantan i u tom režimu nerenormalizabilne teorije postaju prediktabilne. Nerenormalizabilne teorije mogu se koristiti kao **IR efektivne teorije polja**, tj. kao opis fizike na energijama puno nižim od neke masene skale M_c , $E \ll M_c$. Ovaj način razmišljanja se pokazao vrlo koristan, kako u fizici elementarnih čestica, tako i u fizici čvrstog stanja (koja je po definiciji efektivni niskoenergetski opis stanja materije).

Da zaključimo: U samoj renormalizaciji nema ništa misteriozno, s teorijskog stanovišta ona je potpuno očekivana. No, činjenica da račun proizvodi beskonačnosti koje se moraju regularizirati korištenjem “beskonačne” renormalizacije na “prljav” način (sa čisto matematičkog gledišta) nije ni očekivano ni željeno svojstvo. Među ekspertima postoje dva pogleda na pojavu beskonačnosti u kvantnim teorijama polja:

1. Beskonačnosti sugeriraju da teorije polja nisu dobar opis prirode na visokim energijama (odnosno, malim udaljenostima). Po tom shvaćanju, kvantne teorije polja, uključujući i Standardni model fizike čestica, su IR efektivne teorije. Argument u korist ove tvrdnje je da postoje problemi u opisu gravitacije koja, barem naivno, izgleda kao da je nerenormalizabilna teorija u kojoj je fundamentalna masena skala Planckova masa M_P . Po ovom pogledu, potpuno novu fiziku treba očekivati na energetskim skalama $E \gtrsim M_P$. Trenutno najpopularniji kandidat za opis ove nove fizike je teorija struna.
2. Još uvijek ne posjedujemo dovoljno dobro matematičko razumijevanje kvantne teorije polja. Beskonačnosti se pojavljuju jer Feynmanov razvoj nije dobro definiran matematički razvoj. Jednom kad naučimo ispravno, tj. matematički korektno, raditi račune u kvantnim teorijama polja, beskonačnosti se neće pojavljivati. U zadnje vrijeme se događa neka vrsta “revivala” ovog pogleda, nakon više desetljeća u kojima je u velikoj mjeri dominirao pogled (1).

5.2 Casimirov efekt

U stvari, mi smo se već susreli s beskonačnostima i to u kvantnoj teoriji slobodnih polja prilikom računa energije vakuuma, koja je formalno beskonačna. Ta beskonačnost se pojavila kao posljedica množenja polja u istoj točki prostor-vremena u izrazu za gustoću energije i vidjeli smo da se može “ubiti” definiranjem normalno uređenog produkta operatora stvaranja i poništenja. U stvari, to se može shvatiti kao specifična tehnika regularizacije beskonačnosti koja vodi na potpuno odbacivanje kvantne energije vakuuma kao nečega što se ne može mjeriti (ako zanemarimo gravitaciju). No, već tada smo napomenuli da postoje okolnosti kad se vakuum (stanje najniže energije) može mijenjati, a pripadna promjena energije vakuuma je u principu mjerljiva. To nas vodi na to da moramo ponovo razmotriti ovo pitanje i vidjeti kako ispravno renormalizirati kvantnu energiju vakuuma. Sad ćemo detaljnije razmotriti ovo pitanje na primjeru fenomena koji se naziva **Casimirov efekt**.

5.2.1 Energija vakuuma u “kutiji”

Prisjetimo se da slobodna relativistička kvantna polja daju sljedeći doprinos energiji vakuuma

$$\sum_{\sigma,r} (-1)^F E_0^{(r)} \quad , \quad E_0^{(r)} = \frac{1}{2} \delta^{(d-1)}(0) \int d^{d-1} \mathbf{p} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_r^2} \quad , \quad F = \begin{cases} 1 & \text{za fermione} \\ 0 & \text{za bozone} \end{cases}$$

gdje suma po r pobrojava različite čestice (uključujući i antičestice) a σ njihova spinska stanja, dok je d dimenzija prostor-vremena. Vidjeli smo da se ovaj izraz može djelomično regulirati tako da se sustav stavi u beskonačnu prostornu kutiju volumena $V = L^{d-1}$ (gdje se na koncu računa uzme $L \rightarrow \infty$) koja dopušta samo modove određenih frekvencija. U tom slučaju izraz za energiju postaje (3.2.42)

$$E_0^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} \sqrt{\mathbf{p}_{\mathbf{n}}^2 + m_r^2}$$

gdje impuls $\mathbf{p}$ može poprimiti samo diskretne vrijednosti na rešetki u prostoru, čije točke smo označili s $\mathbf{n}$. U slučaju kutije koja nameće da polja iščekavaju na stijenka valni vektori su ograničeni na

$$\mathbf{p} = \frac{\pi}{L} \sum_{j=1}^{d-1} n_j \hat{\mathbf{x}}^j, \quad n_j \in \mathbb{Z}$$

Radi jednostavnosti računa, uzmimo sada da se radi o teoriji s jednim bezmasenim realnim slobodnim skalarnim poljem u $d = 2$ prostorno-vremenske dimenzije. U tom slučaju je energija vakuuma

$$E_0(L) = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (5.2.1)$$

gdje na koncu računa moramo pustiti $L \rightarrow \infty$. Vidimo da $E_0 \rightarrow \infty$ za konačan L jer je $\sum n = \infty$, no da je $\sum n$ konvergentan red, u limesu $L \rightarrow \infty$ bi dobili $E_0 \rightarrow 0$, što je “naivno očekivani” rezultat. Ovako kako piše, dobili smo izraz ∞/∞ koji nije dobro definiran.

Razmotrimo sada situaciju u kojoj u ovom sustavu unutar beskonačne kutije L postoji konačna **fizička** kutija volumena a na čijem rubu vrijede jednaki (ili dovoljno slični) rubni uvjeti na polja kao za kutiju L . **Važno je shvatiti da i dalje razmatramo kvantizirano polje koje se nalazi u najnižem stanju (vakuumu) – ono što radimo je da “manipuliramo prostor” u kojem se nalazi polje.** Za potrebe računa najjednostavnije je zamisliti ovu situaciju tako da se kutija a nalazi na jednom kraju kutije L (konačni rezultat ne ovisi o položaju kutije a). U tom slučaju prostor se dijeli u dva dijela: kutija volumena a i ostatak prostora koji se efektivno ponaša kao kutija volumena $L - a$. Pošto je ukupna kvantna energija vakuuma aditivna (jer se radi o sumi po modovima), dobijamo ju kao sumu energija vakuuma u kutiji volumena a i kutiji volumena $L - a$, tj.

$$E_{\text{tot}}(a) = \lim_{L \rightarrow \infty} [E_0(a) + E_0(L - a)] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L - a} \right) = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (5.2.2)$$

gdje smo upotrijebili (5.2.1). Vidimo da je formalno $E_{\text{tot}}(a) = \infty$.

Pretpostavimo sada da stranicu konačne kutije možemo **pomicati**, tj. da je a fizikalna varijabla koju možemo mijenjati po volji. U tom slučaju zbog promjene energije u sustavu moramo vršiti rad, tj. savladavati silu na putu. Ova vrsta sile se naziva **Casimirova sila** i dana je s

$$F(a) = -\frac{dE_{\text{tot}}(a)}{da} = \frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \infty$$

Vidimo da bi se ploče trebale odbijati beskonačnom silom što je fizikalno potpuno neprihvatljiv rezultat. Potpuno isti zaključak bi dobili da smo razmotrili situaciju u $d = 4$, npr. za elektromagnetsko polje, a iz iskustva znamo da kutije ne eksplodiraju kad ih pokušamo složiti.

Što smo napravili krivo, odnosno što nam je promaklo u gornjem izvodu? *Odgovor je: Fizika!* Stvarne fizikalne kutije su izgrađene od materije koja se sastoji od atoma i molekula. Analogija s elektrodinamikom nam kaže da za valove dovoljno visokih frekvencija standardna materija postaje “prozirna” pa ne može postići poništavanje polja na stijenka kutije (npr. γ zrake izuzetno visokih energija prisutne u kozmičkom zračenju penetriraju duboko u standardnu materiju i potrebna je gusta i debela materija da ih zaustavi). To nas vodi na ideju da je za usporedbu s eksperimentom ispravnije izračunati doprinos sili koji dolazi samo od frekvencija koje su dovoljno malene tako da je rubni uvjet u dovoljnoj mjeri zadovoljen. Drugim riječima, trebamo nametnuti neku vrstu **odsjecanja** (engl. **cut-off**) u valnom vektoru tako da isključimo iz računa modove s $|p| \gg \Lambda$. Treba biti jasno da će dobijeni izraz biti fizikalno relevantan samo ako je veličina kutije a puno veće od duljinske skale odsjecanja $1/\Lambda$, što znači da je relevantni režim određen s $a\Lambda \gg 1$.

5.2.2 Regularizacija pomoću funkcije odsjecanja

Način na koji možemo uvesti odsjecanje je da pored skale odsjecanja Λ uvedemo funkciju odsjecanja f i definiramo energiju u kutiji kao

$$E_0(a) = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right) \quad (5.2.3)$$

gdje funkcija f posjeduje sljedeća općenita svojstva (koja zahtijevamo na temelju diskusije s kraja prošlog odjeljka):

- $f(0) = 1$ (kutija na vrlo malim impulsima poštiva rubni uvjet u potpunosti)
- $f(x)$ je glatka funkcija koja posjeduje derivacije svih redova,
- $f(x)$ i sve njene derivacije $f^{(j)}$ dovoljno brzo iščezavaju za $x \rightarrow \infty$, tako da vrijedi

$$f(\infty) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x f^{(j)}(x) = 0$$

(kutija postaje prozirna za asimptotski velike impulse na "gladak" način)

Osim ovih uvjeta f je inače proizvoljna funkcija. Fizikalno gledano funkcija f modelira odstupanje kutije od njenog "idealnog" ponašanja za valove s velikim valnim vektorima.

Primjenom (5.2.3) dobijamo:

$$E_0(L-a) = \frac{\pi}{(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} n f\left(\frac{n}{(L-a)\Lambda}\right) = \pi(L-a)\Lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(L-a)^2\Lambda^2} f\left(\frac{n}{(L-a)\Lambda}\right)$$

Ako napravimo limes $L \rightarrow \infty$ i napravimo standardni prijelaz na kontinuum putem relacije⁴

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b} f\left(\frac{n}{b}\right) = \int_0^{\infty} dx x f(x)$$

možemo pisati

$$\lim_{L \rightarrow \infty} E_0(L-a) = E_0(\infty) - \pi a \Lambda^2 \int_0^{\infty} dx x f(x) = E_0(\infty) - \frac{\pi}{a} \int_0^{\infty} dn n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right)$$

gdje je

$$E_0(\infty) = \lim_{L \rightarrow \infty} \pi L \Lambda^2 \int_0^{\infty} dx x f(x)$$

potpuno neovisno o a .

Sad imamo sve elemente da napišemo ukupnu energiju, regulariziranu funkcijom odsjecanja, za slučaj kad imamo fizikalnu kutiju a :

$$E_{\text{tot}}(a) = \lim_{L \rightarrow \infty} [E_0(a) + E_0(L-a)] = E_0(\infty) + \frac{\pi}{a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right) - \int_0^{\infty} dn n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right) \right] \quad (5.2.4)$$

Izraz koji smo dobili je točno u obliku u kojem možemo primijeniti Euler-MacLaurinovu formulu koja vrijedi za svaku dovoljno glatku funkciju F i koja glasi:

$$\sum_{n=1}^N F(n) - \int_0^N dn F(n) = \frac{1}{2} [F(N) - F(0)] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} [F^{(2j-1)}(N) - F^{(2j-1)}(0)]$$

⁴Ova relacija je samo jednodimenzionalna varijanta relacije (3.2.41).

gdje su B_k Bernoullijevi brojevi, kojih prvih nekoliko glasi:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \dots$$

Usporedbom s (5.2.4) vidimo da u Euler-MacLaurinovu formulu trebamo uvrstiti $N = \infty$ i

$$F(n) = n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right)$$

Primjenom Euler-MacLaurinove formule i svojstava koja smo zahtijevali od f dobijamo:

$$E_{\text{tot}}(a) = E_0(\infty) - \frac{\pi}{12a} + \frac{\pi}{240a^3\Lambda^2} + \frac{1}{a}O((a\Lambda)^{-4}) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} E_0(\infty) - \frac{\pi}{12a} \quad (5.2.5)$$

što vodi na sljedeću formulu za Casimirovu silu:

$$F(a) = -\frac{\pi}{12a^2} [1 + O((a\Lambda)^{-2})] \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{12a^2} \quad (5.2.6)$$

Vidimo da je Casimirova sila **konačna**, kao i razlika energija između kutija različite veličine $E_{\text{tot}}(a) - E_{\text{tot}}(a')$, što je **fizikalno smislen rezultat**. U izrazu za energiju i dalje postoji beskonačni član $E_0(\infty)$, koji se može interpretirati kao energija “čistog” vakuuma (praznog i neomeđenog prostora), no on se krati kad računamo fizikalno mjerljive veličine poput razlike energija i silu.

Napomene o Casimirovoj sili:

1. Sila je privlačna. No, pokazuje se da to nije univerzalno svojstvo Casimirove sile. Naime, za neke geometrije (u $d > 2$) se može dobiti i pozitivna, tj. odbojna, sila.
2. Sila ima **kvantno porijeklo**. Da smo radili u SI sustavu jedinica vidjeli bi da su izrazi za energiju i silu proporcionalni $\hbar$. Casimirov efekt je posljedica svojstava vakuuma kvantne teorije polja i kao takav ne postoji u klasičnoj teoriji polja u kojoj u vakuumu sva polja iščezavaju i stoga ne mogu ostvarivati fizikalne učinke.
3. U fizikalno relevantnom režimu $a\Lambda \gg 1$ vodeći doprinos u izrazu za silu ne ovisi o slobodi u izboru funkcije odsjecanja f niti o skali odsjecanja Λ , što znači da je on u potpunosti niskoenergetski (IR) efekt, tj. dolazi od modova za koje je $|p| \sim 0$. Svi drugi doprinosi u razvoju po $1/(a\Lambda)$ ovise o detaljnim svojstvima funkcije $f(x)$ oko $x = 0$. Npr. iz Euler-MacLaurinove formule se lako vidi da za f koja zadovoljava $f''(0) = 0$ prva korekcija u formuli (5.2.6), proporcionalna $(a\Lambda)^{-2}$, iščezava. U limesu $\Lambda \rightarrow \infty$, koji bi mogli zvati “uklanjanje odsjecanja” (jer smo ga poslali u beskonačnost), dobija se jednoznačan rezultat potpuno neovisan o funkciji odsjecanja. To je važan test, jer ukoliko bi se dogodilo da rezultat ovisi o izboru funkcije f bio bi fizikalno besmislen. **Rezultat za mjerljivu fizikalnu veličinu ne smije ovisiti o metodi regularizacije.**
4. Casimirov efekt je generičko svojstvo kvantnih teorija polja. Na primjer, može se pokazati da u elektrodinamici u $d = 4$ upotreba vodljivih ploča daje realizaciju efekta koja se može i eksperimentalno izmjeriti. Najjednostavnija konfiguracija je ako uzmemo dvije velike (“beskonačne”) vodljive ploče i stavimo ih paralelno na međusobnu udaljenost a . Primjenom kvantne elektrodinamike može se dobiti sljedeći izraz za tlak (sila po jedinici površine) uzrokovan Casimirovim efektom:

$$p(a) = -\frac{1}{A} \frac{dE_{\text{tot}}(a)}{da} \approx -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}$$

gdje je A iznos površine ploča. Ova predikcija je eksperimentalno testirana i izmjereni rezultat je u slaganju s teorijskim. Izvod formule se može naći u knjizi Itzykson i Zuber, *Quantum field theory*, odjeljak 3-2-4.

5. U izrazu za energiju postoji beskonačan konstantan doprinos $E_0(\infty)$. Ako nas kopka beskonačna energija, možemo je se lako riješiti tako da u Lagranžijan teorije dodamo tzv. **kontračlan** ρ_∞ na način

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \rho_\infty \quad , \quad \rho_\infty \equiv \frac{E_0(\infty)}{L}$$

Lako se provjeri da kontračlan točno poništi $E_0(\infty)$ u izrazu za energiju. To što je kontračlan formalno beskonačan ignoriramo jer nema fizikalni efekt (ako zanemarimo gravitaciju). Ovo je jednostavan primjer renormalizacije na djelu.

5.2.3 Regularizacija pomoću analitičkog produljenja

Spomenimo ukratko jedan naizgled egzotični način regularizacije koji se pokazuje vrlo efektivnim i ima široku primjenu. Ključ je uočiti da je red u (5.2.2) posebni slučaj $z = -1$ općenitije definiranog reda

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (5.2.7)$$

Ideja je da $\zeta(z)$ razmotrimo kao funkciju u kompleksnoj ravnini i primijenimo tehniku **analitičkog produljenja**. Ova tehnika se sastoji u tome da uzmemo da je funkcija $\zeta(z)$ definirana pomoću reda (5.2.7) samo u području kompleksne ravnine u kojem je red u (5.2.7) konvergentan, a na ostatku kompleksne ravnine $\zeta(z)$ definiramo ju analitičkim produljenjem. Može se pokazati da je red konvergentan i definira analitičku funkciju u poluravnini određenoj s $\Re z > 1$. Vidimo da je točka koja nas zanima ($z = -1$) izvan te poluravnine. Sad moramo naći način za analitički produljiti funkciju $\zeta(z)$ u poluravninu $\Re z \leq 1$.

Takvo produljenje je odavno poznato u matematici i postiže se definiranjem $\zeta(z)$ pomoću sljedećeg integrala:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \quad (5.2.8)$$

gdje je $\Gamma(z)$ Eulerova gama funkcija. Lako je dokazati da je za $\Re z > 1$ definicija (5.2.8) jednaka onoj u (5.2.7). Funkcija $\zeta(z)$ definirana kao u (5.2.8) se zove **Riemannova zeta funkcija**. Za razliku od (5.2.7) ona je analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini osim u točki $z = 1$ gdje ima jednostavni pol reziduuma jednakog 1. Ono što je za nas važno je da je Riemannova zeta funkcija dobro definirana u $z = -1$:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Sad možemo primijeniti ove spoznaje direktno u neregularanom izrazu za ukupnu energiju (5.2.2) i regulirati ga analitičkim produljenjem, tj. primjenom Riemannove zeta funkcije:

$$E_{\text{tot}}(a) = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n \longrightarrow \frac{\pi}{a} \zeta(-1) = -\frac{\pi}{12a} \quad (5.2.9)$$

Vidimo da je ovaj rezultat, do na irelevantnu ukupnu konstantu, u limesu micanja odsjecanja $\Lambda \rightarrow \infty$ točno jednak rezultatu (5.2.5). Interesantno je da ova vrsta regularizacije daje $E_0(\infty) = 0$, dakle usput nas odmah riješi i beskonačnog doprinosa kozmološkoj konstanti koji postaje problematičan nakon uvođenja gravitacije u igru.

5.3 Primjer renormalizacije konstante vezanja

Razmotrimo teoriju u kojoj postoje 3 bezmasena realna skalarna polja, φ_a , φ_b i φ_c , s lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=a,b,c} (\partial \varphi_j)^2 - \frac{\lambda}{4} (\varphi_a^2 \varphi_b^2 + \varphi_b^2 \varphi_c^2) \quad (5.3.1)$$

gdje je λ bezdimenzionalna konstanta vezanja. Razmotrimo $a + a \rightarrow c + c$ raspršenje:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a, p_1 \quad c, p'_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a, p_2 \quad c, p'_2 \end{array} = \begin{array}{c} a, p_1 \quad c, p'_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{dot} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a, p_2 \quad c, p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} a, p_1 \quad c, p'_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ a, p_2 \quad c, p'_2 \end{array} + O(\lambda^4) \\
 & i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_1 + i\mathcal{M}_2 + O(\lambda^4)
 \end{aligned}$$

Primjena Feynmanovog računa daje:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_1 &= -i\lambda \\
 i\mathcal{M}_2 &= \frac{1}{2}(i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p-k)^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

gdje je $p \equiv p_1 + p_2$, dok je $1/2$ u $\mathcal{M}_2$ faktor simetrije dijagrama.⁵ Već prije smo konstatalirali da je integral u $\mathcal{M}_2$ logaritamski UV divergentan, što znači da zahtijeva regularizaciju.

5.3.1 Regularizacija

Za početno zagrijavanje primijenit ćemo jednostavnu regularizaciju tako da naprosto odsječemo granicu integracije na $|k| = \Lambda$, gdje je Λ skala odsjecanja za koju ćemo na kraju priče uzeti $\Lambda \rightarrow \infty$. Pošto je $\mathcal{M}_2$ bezdimenzijska Lorentz invarijanta, može ovisiti samo o veličini s/Λ^2 , gdje je $s = p^2$, pa stoga možemo pretpostaviti

$$\mathcal{M}_2(s) \propto \ln \frac{s}{\Lambda^2}$$

gdje smo pretpostavili logaritamsku ovisnost zbog logaritamske prirode divergencije. Postoji brzi, iako naizgled pomalo “prljavi” trik, kojim možemo potvrditi gornju pretpostavku i izračunati konstantu proporcionalnosti. Sastoji se u tome da prije integriranja po k prvo deriviramo izraz za $\mathcal{M}_2(s)$ po s :

$$\frac{d}{ds} \mathcal{M}_2(s) = \frac{p^\mu}{2s} \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial p^\mu} = \frac{i\lambda^2}{2s} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{p \cdot (p-k)}{(p-k)^4}$$

Integral u gornjem izrazu je sada konvergentan i može se pokazati (kasnije ćemo naučiti kako se izvrijednjuju ovakvi integrali) da je jednak $i/(4\pi)^2$. To znači da je

$$\frac{d}{ds} \mathcal{M}_2 = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{s} \implies \mathcal{M}_2(s) = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln s + C$$

gdje je C nepoznata konstanta integracije. Pošto je integral u $\mathcal{M}_2$ divergentan, očekujemo da $C \rightarrow \infty$. Ako napišemo C kao

$$C = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \Lambda^2$$

dobijamo da je

$$\mathcal{M}_2(s) = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{\Lambda^2}$$

Ukupna amplituda je:

$$\mathcal{M} = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{\Lambda^2} + O(\lambda^3) \quad (5.3.2)$$

⁵Čitatelj se možda zapitao zašto smo za jednostavni primjer odabrali teoriju s 3 polja, a ne φ^4 teoriju sa samo jednim poljem. Razlog je što naš odabir teorije i procesa vodi na najjednostavniju amplitudu $\mathcal{M}_2$ kojoj doprinosi samo jedan Feynmanov dijagram (s tip). U teoriji s jednim poljem postojala bi još dva dijagrama (t i u tipovi) što bi potpuno nepotrebno zakompliciralo račun.

5.3.2 Renormalizacija

Prvo uočimo da iako $\mathcal{M}$ divergira kad $\Lambda \rightarrow \infty$, razlika

$$\mathcal{M}(s_1) - \mathcal{M}(s_2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_2}{s_1} + O(\lambda^3)$$

je konačna. No, za razliku od energije u Casimirovom efektu, invarijantna amplituda $\mathcal{M}(s)$ sama po sebi mora biti konačna jer daje udarni presjek, koji je mjerljiva veličina. Kako sada riješiti problem beskonačnosti?

Stvar je u tome da trebamo napisati $\mathcal{M}(s)$ kao funkciju **mjerljivih** parametara, što znači da golu konstantu vezanja λ trebamo izraziti kao funkciju nekog mjerljivog parametra. To je upravo smisao procesa renormalizacije. Iz klasičnog izraza za $\mathcal{M}$ koji je dan s $\mathcal{M}_{\text{tree}} = \mathcal{M}_1 = -\lambda$ možemo vidjeti da je **najprirodnije definirati renormaliziranu konstantu vezanja λ_R kao vrijednost od $-\mathcal{M}(s)$ za neki specifični (ali proizvoljni) $s = s_0$:**

$$\lambda_R \equiv -\mathcal{M}(s_0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_0}{\Lambda^2} + O(\lambda^3) \quad (5.3.3)$$

Trebamo invertirati ovu relaciju kako bi dobili $\lambda(\lambda_R, s_0)$. Perturbativno rješenje se dobije tako da se formalno napiše

$$\lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + O(\lambda^3)$$

i onda to uvrsti u (5.3.3). Nakon sređivanja dobijamo:

$$\lambda_R = \lambda_R + \left(a + \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{s_0}{\Lambda^2} \right) \lambda_R^2 + O(\lambda_R^3)$$

Pošto koeficijenti od $(\lambda_R)^n$ na dvije strane jednakosti moraju biti jednaki, dobijamo:

$$a = -\frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{s_0}{\Lambda^2}$$

odnosno

$$\lambda = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_0}{\Lambda^2} + O(\lambda_R^3) \quad (5.3.4)$$

Pošto mi na koncu priče puštamo $\Lambda \rightarrow \infty$ vidimo da gornji red ne samo da ne izgleda konvergentan za dovoljno veliki Λ nego nije niti dobro definiran u limesu (koeficijenti postaju beskonačni). Kako gola konstanta vezanja λ po sebi **nije mjerljiva veličina** praviti ćemo se da nas to ne brine i promatrati gornji red samo na formalan način.

Sad možemo uvrstiti (5.3.4) u (5.3.2) što daje

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{s_0} + O(\lambda_R^3) \quad (5.3.5)$$

Uočimo sljedeće:

- $\mathcal{M}(s)$ je **regularna** funkcija (za konačan λ_R) i **neovisna o regulatoru Λ** (pa možemo slobodno pustiti $\Lambda \rightarrow \infty$).
- Kvantna korekcija daje **mjerljiv učinak** (može se eksperimentalno testirati).
- Renormalizirana konstanta vezanja λ_R je mjerljiva veličina, jer se može dobiti mjerenjem udarnog presjeka za $s = s_0$.

- Razvoj $\mathcal{M}(s)$ u red nije samo po λ_R nego i po

$$\lambda_R^2 \ln \frac{s}{s_0}$$

što znači da ta veličina mora biti mala kako bi perturbativni razvoj imao smisla i bio praktično upotrebljiv. Stoga vidimo da postoje dva mehanizma pucanja Feynmanovog razvoja: (1) $\lambda_R \gtrsim 1$, (2) za $\lambda_R \ll 1$ ako gledamo $s \gg s_0$ ili $s \ll s_0$ tako da je $|\lambda_R^2 \ln(s/s_0)| \gtrsim 1$. To znači da se s fiksnom definicijom λ_R , perturbativno gledano, ne može pokriti čitavo energetske područje (sve s). Ovaj problem se rješava primjenom tehnike **renormalizacijske grupe**.

- Pojava logaritma je općenita karakteristika (kvantnih) doprinosa petlji – drvasti dijagrami ne mogu generirati logaritme.

5.3.3 Kontračlanovi

Drugi način za dobiti isti rezultat koji smo dobili u prošlom odjeljku je putem **dodavanja kontračlanova u lagranžijanu**:

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}(\lambda_R) + \mathcal{L}_c$$

gdje je $\mathcal{L}_c$ za teoriju s lagranžijanom (5.3.1) dan s

$$\mathcal{L}_c = \frac{\delta_\lambda}{4} (\varphi_a^2 \varphi_b^2 + \varphi_b^2 \varphi_c^2)$$

Obratite pažnju da se u $\mathcal{L}$ nalazi renormalizirana (dakle, konačna) konstanta vezanja. Sada račun za $\mathcal{M}$ daje

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda_R - \delta_\lambda - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s}{\Lambda^2} + O(\lambda_R^3)$$

Da bi dobili konačan izraz za $\mathcal{M}(s)$, δ_λ mora biti oblika:

$$\delta_\lambda = -\frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln \frac{s_0}{\Lambda^2}$$

Uvrštavanje gore daje potpuno isti rezultat kao (5.3.5). Vidimo da je u ovom pristupu cilj pomoću kontračlanova dobiti regularnu formulu za mjerljive veličine ($\mathcal{M}$), bez da razmišljamo unaprijed koje je fizikalno značenje renormalizirane konstante vezanja.

Ovaj način rada u kojem vršimo perturbativni razvoj direktno po renormaliziranoj konstanti vezanja i dodajemo kontračlanove se naziva **renormalizirana perturbativna teorija**. Prethodni način, u kojem renormalizirane parametre dobijamo iz fizikalnih veličina, se naziva **fizikalna (ili on-shell) perturbativna teorija**.

Naravno, dva načina su ekvivalentna i daju jednake rezultate za mjerljive veličine. U našem jednostavnom primjeru su i podjednako spretna. No, praksa pokazuje da je za kompliciranije teorije **renormalizirana perturbativna teorija često spretnija u primjeni**.

5.4 Regulariziranje i računanje integrala u dijagramima s petljama

Doprinosi Feynmanovih dijagrama s petljama vode na integrale koji su najčešće **divergentni**. Da bi se moglo pristupiti renormalizaciji, nužni **prvi korak** je učiniti te integrale konvergentnima kroz postupak regularizacije. Ovo je jedna važna stvar koju se isplati posebno istaknuti:

Prilikom postupka računanja dijagrama s petljama **prvi korak** uvijek treba biti regularizacija integrala.

Razlog je što se u postupku računanja vrlo često koriste postupci koji su dobro definirani samo za konvergentne integrale. Ti postupci uključuju redefinicije varijable integracije i zamjenu poretka integracija.

Postoji više metoda regularizacije integrala koji se javljaju u Feynmanovim dijagramima s petljama. Već smo spomenuli metodu čvrstog odsjecanja u impulsu, u kojoj se nametne konačna granica u integraciji po impulsu koji kruži u petlji ($|k| < \Lambda$). Pokazuje se da ova metoda ima ograničenu primjenu jer u nekim situacijama eksplicitno lomi simetriju u teoriji i to posljedično čini račun kompliciranim (primjer su baždarne simetrije). Postoje bolje metode, koje između ostalog čuvaju baždarnu invarijantnost, od kojih se posebno ističe **dimenzijska regularizacija**. Između ostalog, dimenzijska regularizacija se pokazala esencijalnom za dokaz renormalizabilnosti Standardnog modela fizike čestica. U ovom odjeljku razmotrit ćemo detaljno metodu dimenzijske regularizacije, te usput i standardne trikove pomoću kojih se integrali dovode u oblik koji je puno spretniji za računanje, neovisno o tome da li su divergentni ili konvergentni.

Radi preglednosti, za svrhu demonstracije koristit ćemo jednostavni integral s kojim smo se već susreli i koji se često pojavljuje u teorijama sa skalarnim poljima:

$$I_1(p^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (5.4.1)$$

Ovaj integral je divergentan i za početak potrebno ga je regularizirati. U dimenzijskoj regularizaciji to se radi na način da se stavi da je dimenzionalnost prostor-vremena jednaka $d \in \mathbb{R}$, što znači da u gornji izraz treba napraviti zamjenu

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad (5.4.2)$$

Kako se računaju integrali u prostoru s realnim (ili kompleksnim) i necjelobrojnim brojem dimenzija je detaljno objašnjeno ispod u odjeljku Sec. 5.4.3. Ono što je u ovom trenutno jedino bitno je da su integrali poput (5.4.1) **kovergentni**, tj. konačni, ukoliko d nije cjelobrojan. Na kraju računa, nakon što se napravi renormalizacija, se napravi limes $d \rightarrow 4$.

5.4.1 Feynmanov trik

Pri manipuliranju integrala kakvi se pojavljuju u petljama vrlo korisna stvar je uvesti dodatnu integraciju. Za integral tipa (5.4.1) koristi se elementarna formula:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2}$$

Kad imamo produkt N propagatora formula koja se koristi je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} &= (N-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \times \\ &\times [A_1 x_{N-1} + A_2 (x_{N-2} - x_{N-1}) + \dots + A_N (1 - x_1)]^{-N} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Primjenjen na (5.4.1) Feynmanov trik daje:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} &= \int_0^1 dx \{ (1-x)(k^2 - m^2 + i\epsilon) + x[(k - p)^2 - m^2 + i\epsilon] \}^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [k^2 - m^2 + i\epsilon - 2x k \cdot p + xp^2]^{-2} \\ &= \int_0^1 dx [(k - xp)^2 - m^2 + x(1-x)p^2 + i\epsilon]^{-2} \end{aligned}$$

Ako napravimo translaciju varijable integracije supstitucijom $k' = k - xp$ dobijamo:⁶

$$\int \frac{d^d k}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \int d^d k \int_0^1 dx [k^2 - m^2 + x(1-x)p^2 + i\epsilon]^{-2}$$

gdje smo izbrisali nepotrebnu crticu na k' . Sada uvrštavamo to u (5.4.1) i mijenjamo redoslijed integracija:

$$I_1(p^2) = \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [k^2 - m^2 + x(1-x)p^2 + i\epsilon]^{-2} \quad (5.4.4)$$

Usporedbom s (5.4.1) vidimo da je Feynmanov trik doveo do jednostavnijeg integrala po impulsu k .

5.4.2 Wickova rotacija

Razmotrimo prvo integraciju po k^0 . Podintegralna funkcija u (5.4.4) ima polove određene s:

$$(\tilde{k}_0)^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon$$

gdje $\sim$ označava da smo koordinatu k_0 proširili na kompleksnu ravninu. Pošto za $p^2 < 4m^2$ i $0 \leq x \leq 1$ vrijedi

$$\mathbf{k}^2 + m^2 - x(1-x)p^2 > 0 \quad ,$$

vađenjem korijena dobijamo da se polovi nalaze u točkama:⁷

$$\tilde{k}_0^{(\pm)} = \pm \left(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 - x(1-x)p^2} - i\epsilon \right)$$

Koristeći tehnike integracije po konturama u kompleksnoj ravnini, lako se vidi da u (5.4.4) integraciju po k_0 (koja ide po realnoj osi od $-\infty$ do ∞) možemo zatvoriti u konturu tako da dodamo polukružnicu beskonačnog radijusa u gornjoj poluravnini ($\text{Im } \tilde{k}_0 > 0$). Ova kontura očito obuhvaća pol $\tilde{k}_0^{(-)}$. Pošto deformiranje konture integracije ne mijenja rezultat integracije sve dok ne prelazimo konturom preko polova, lako se vidi da smijemo deformirati konturu tako da sadrži imaginarnu os (smjer od $-i\infty$ prema $i\infty$) i beskonačnu polukružnicu koja se nalazi u lijevoj poluravnini ($\text{Re } \tilde{k}_0 < 0$). Ponovo, integral po polukružnici daje iščezavajući doprinos i ono što preostaje je integral od $\tilde{k}_0$ po imaginarnoj osi. Sažeto matematičkim simbolima, dobili smo sljedeće:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0 f(\tilde{k}^0 = k^0) = i \int_{-\infty}^{\infty} dk_E^0 f(\tilde{k}^0 = ik_E^0)$$

gdje je $k^0 = \text{Re } \tilde{k}^0$ i $k_E^0 = \text{Im } \tilde{k}^0$, odnosno $\tilde{k}^0 = k^0 + ik_E^0$.

Ukratko riječima: Napravili smo rotaciju oko ishodišta u kompleksnoj ravnini $\tilde{k}^0$ za $\pi/2$ obrnuto od smjera gibanja kazaljke na satu i tako prebacili realnu os na imaginarnu os, $k^0 \rightarrow ik_E^0$. Ova rotacija se naziva **Wickova rotacija**.

Zašto je Wickova rotacija važna? Uočimo da smo time pomaknuli liniju integracije daleko od polova pa dobijamo regularnije integrale i kao posljedicu možemo izbaciti $i\epsilon$ članove.

Wickova rotacija ima posebno elegantan izričaj ako ju primijenimo na **sve impulse** (i druge tenzore). U našem primjeru to znači i na $p, p^0 \rightarrow ip_E^0$. Promotrimo skalarni produkt Wick zarotiranih vektora:

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \xrightarrow{\text{Wick rot.}} (ia_E^0)(ib_E^0) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = - \underbrace{(a_E^0 b_E^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}_{\text{Euklidski skal. prod.}} = -a_E \cdot b_E$$

gdje je $a_E = (a_E^0, \mathbf{a})$ 4-vektor u **Euklidskom prostoru**.

⁶Translacija varijable je matematički dobro definirana samo za konvergentne integrale i zato je bilo važno napraviti regularizaciju prije primjene Feynmanovog trika.

⁷Sjetite se da ϵ ima značenje samo kroz $\epsilon > 0$ i $\epsilon \rightarrow 0$, tako da bilo koju strogo pozitivnu veličinu koja ga množi možemo zanemariti.

Wickova rotacija je rotacija iz prostora Minkowskog u Euklidski prostor.

To znači da u računu možemo koristiti sve formule za Euklidski prostor, što je vrlo spretno. Na kraju računa samo napravimo suprotnu rotaciju, $p_E^0 \rightarrow -ip^0$, i tako se vratimo u fizikalni prostor Minkowskog.

U našem primjeru Wickova rotacija na izraz (5.4.4) daje:

$$I_E(p_E^2) = i \int_0^1 dx \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} [k_E^2 + m^2 + x(1-x)p_E^2]^{-2} \quad (5.4.5)$$

gdje su sada svi produkti standardni Euklidski produkti, npr. $k_E^2 = (k_E^0)^2 + \mathbf{k}^2$. To znači da se na kraju računa povratak u fizikalni prostor Minkowskog postiže s $p_E^2 \rightarrow -p^2$.

5.4.3 Dimenzijska regularizacija

Sad je konačno došao red da objasnimo suštinu metode dimenzijske regularizacije, tj. način kako se računaju integrali u prostoru koji ima necjelobrojnu dimenzionalnost d .

Osnova ideje kreće od opažanja da pitanje da li integral poput (5.4.1) konvergira ili divergira ovisi o dimenziji d prostor-vremena. Na primjer, lako se pokaže da u $d \leq 3$ dimenzionalnom prostor-vremenu integral (5.4.1) konvergira. To nas navodi na ideju da umjesto da odmah fiksiramo dimenziju prostor-vremena na $d = 4$, da pustimo da d može poprimiti bilo koju kompleksnu vrijednost. Staviti ćemo da je $d = 4 - \epsilon$, pa ćemo na koncu računa napraviti limes $\epsilon \rightarrow 0$.⁸

Prvo pitanje koje se može postaviti je kako uopće definirati integraciju ako dimenzionalnost nije cjelobrojna? Prvo treba uočiti da integrali relevantni za ovu problematiku imaju oblik (nakon Wickove rotacije i Feynmanovog trika)

$$I_{n,m}^{(d)}(\nu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^n}{(k^2 + \nu^2)^m} = \int_0^\infty dk \frac{k^{2n+d-1}}{(k^2 + \nu^2)^m} \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \quad (5.4.6)$$

gdje smo prešli na polarni sustav koordinata (podrazumijeva se da smo u Euklidskom prostoru iako, radi preglednosti, ne pišemo indeks E u k i ν). Integracija po prostornom kutu u cjelobrojnom broju dimenzija daje površinu $(d-1)$ -dimenzionalne sfere koja je jednaka

$$S_{d-1} = \int d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

gdje je $\Gamma(x)$ Eulerova gama funkcija. Uvrštavanje u (5.4.6) daje:

$$I_{n,m}^{(d)}(\nu) = \frac{2(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dk \frac{k^{2n+d-1}}{(k^2 + \nu^2)^m} \quad (5.4.7)$$

Izraz na desnoj strani jednakosti ima dobro definirano analitičko produljenje u $d \in \mathbb{C}$. Na taj način smo definirali integraciju u kompleksnom broju prostorno-vremenskih dimenzija za klasu integrala koja nam je interesantna.

Integral koji se pojavljuje u gornjem izrazu je poznat i može se naći u tablicama integrala:

$$\int_0^\infty dk \frac{k^{l-1}}{(k^2 + \nu^2)^m} = \frac{\Gamma(l/2) \Gamma(m-l/2)}{2 \Gamma(m)} \nu^{l-2m}$$

Uvrštavanje u (5.4.7) daje konačni izraz:

$$I_{n,m}^{(d)}(\nu) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^n}{(k^2 + \nu^2)^m} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n+d/2) \Gamma(m-n-d/2)}{\Gamma(d/2) \Gamma(m)} \nu^{2n+d-2m} \quad (5.4.8)$$

⁸Čitatelj treba paziti da ne pomiješa ovaj ϵ s onim koji se javlja u propagatorima polja.

Razmotrimo sad pitanje konvergencije integrala (5.4.8). Pošto Eulerova gama funkcija nema nul-točaka, očito se singularnosti u izrazu s desne strane mogu javljati samo tamo gdje su gama funkcije iz brojnika singularne. Singulariteti od $\Gamma(z)$ se nalaze u $z = 0, -1, -2, \dots$ i predstavljaju jednostavne polove. Pošto (i) integrali koji se javljaju u dijagramima s petljama imaju uvijek $m \geq 1$ i $n \geq 0$ i (ii) možemo se ograničiti na $\text{Re } d > 0$, slijedi da je $n + d/2 > 0$ pa $\Gamma(n + d/2)$ ne može doprinositi singularitetima. Ostaje samo za razmotriti $\Gamma(m - n - d/2)$. Iz toga slijedi da će relevantni integrali divergirati kada je

$$\frac{d}{2} + n - m + 1 \in \mathbb{N} \quad (5.4.9)$$

Vidimo da ako se iz cjelobrojne dimenzije prostor-vremena pomaknemo za (infinitesimalni) ϵ , divergentni integrali postaju konvergentni. To je osnova metode dimenzijske regularizacije. Pošto će nas na ovom kolegiju primarno zanimati teorije polja u četiri prostorno-vremenske dimenzije, pri regularizaciji integrala uzet ćemo da je $d = 4 - \epsilon$ i na kraju računa uzeti limes $\epsilon \rightarrow 0$.

Trebat će nam Laurentov razvoj Eulerove gama funkcije oko $z = 0$ koji ima oblik:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma_E + O(z) \quad , \quad \gamma_E = 0.577215 \dots$$

gdje je γ_E Euler–Mascheroni konstanta.

Sad možemo primijeniti naučeno na primjeru našeg integrala iz (5.4.5). Očito je u ovom slučaju

$$n = 0 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad \nu^2 = m^2 + x(1-x)p_E^2 \quad (5.4.10)$$

pa pošto za $d = 4$ imamo $d/2 + n - m + 1 = 1$ izraz (5.4.9) nam govori da je integral divergentan i traži regularizaciju. Ako stavimo da je $d = 4 - \epsilon$ i primijenimo (5.4.8) dobijamo

$$I_{0,2}^{(d)}(\nu) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2) \Gamma(2 - d/2)}{\Gamma(d/2) \Gamma(2)} \nu^{d-4} = (4\pi)^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \nu^{-\epsilon} \quad (5.4.11)$$

Pošto ćemo na koncu napraviti limes $\epsilon \rightarrow 0$, trebamo razviti gornji izraz po ϵ . Za to nam trebaju sljedeći razvoji:

$$\begin{aligned} (4\pi)^{-2+\epsilon/2} &= \frac{e^{\frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)}}{(4\pi)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)\right) \\ \Gamma(\epsilon/2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon) \\ \nu^{-\epsilon} &= e^{-\epsilon \ln \nu} = 1 - \epsilon \ln \nu + O(\epsilon^2) = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \nu^2 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Uvrštavanje gornjih relacija u (5.4.11) daje:

$$I_{0,2}^{(4-\epsilon)}(\nu) \equiv \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{(k^2 + \nu^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln \nu^2 + O(\epsilon) \right]$$

Izvrjednjavanje članova reda $O(\epsilon)$ je nevažno jer taj dio iščezava u limesu $\epsilon \rightarrow 0$. Stoga taj doprinos često nećemo ni pisati. Uvrstimo to sada nazad u (5.4.5) i upotrijebimo eksplicitan izraz za ν dan u (5.4.10). Dobijamo:

$$I_E(p_E^2) = i \int_0^1 dx I_{0,2}^{(4-\epsilon)}(\nu) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx \ln [m^2 + x(1-x)p_E^2] + O(\epsilon) \right\} \quad (5.4.13)$$

Integral u (5.4.13) zahtijeva poseban tretman za slučajeve $m \neq 0$ i $m = 0$. U slučaju $m \neq 0$ imamo:

$$\int_0^1 dx \ln [m^2 + x(1-x)p_E^2] = -2 + \ln m^2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_E^2}} \text{Arth} \left(1 + \frac{4m^2}{p_E^2} \right)^{-1/2}$$

što uvršteno u (5.4.13) daje

$$I_E(p_E^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + 2 - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{m^2} - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p_E^2}} \operatorname{Arth} \left(1 + \frac{4m^2}{p_E^2} \right)^{-1/2} + O(\epsilon) \right\}, \quad m \neq 0$$

Na koncu, trebamo napraviti rotaciju nazad iz Euklidskog prostora u prostor Minkowskog. U našem primjeru to znači $p_E^2 \rightarrow -p^2$, pa dobijamo kao konačan rezultat integracije:

$$I_1(p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + 2 - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{m^2} - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \operatorname{Arth} \left(1 - \frac{4m^2}{p^2} \right)^{-1/2} + O(\epsilon) \right\}, \quad m \neq 0$$

U bezmasenom slučaju $m = 0$ integral u (5.4.13) je trivijalan i rezultat je:

$$\int_0^1 dx \ln [x(1-x) p_E^2] = -2 + \ln p_E^2$$

što uvršteno u (5.4.13) daje:

$$I_E(p_E^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + 2 - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{p_E^2} + O(\epsilon) \right\}, \quad m = 0 \quad (5.4.14)$$

Rotacija nazad u prostor Minkowskog daje konačan rezultat:

$$I_1(p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + 2 - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{(-p^2)} + O(\epsilon) \right\}, \quad m = 0 \quad (5.4.15)$$

Integral je sada regulariziran. Limes $\epsilon \rightarrow 0$ se radi nakon renormalizacije.

5.4.4 Neka poopćenja

U podintegralnoj funkciji se osim kvadrata impulsa, poput k^2 u našem primjeru, mogu pojaviti produkti komponenti impulsa, npr. k^μ , $k^\mu k^\nu$ itd. Kako u tom slučaju napraviti Wickovu rotaciju?

Kao prvo, ukoliko imamo produkt neparnog broja komponenti impulsa, integral iščezava, npr.

$$\int d^d k f(k^2) k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_{2n-1}} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.4.16)$$

Razlog je neparnost podintegralne funkcije na $k^\mu \rightarrow -k_\mu$.

Ukoliko imamo produkt parnog broja komponenti impulsa, npr.

$$\int d^d k f(k^2, \{p_r^2\}) k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_{2n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje smo dopustili da funkcija f ovisi o nekim skalarima koji su konstantni u integraciji (što su obično kvadrati vanjskih impulsa, poput p^2 u našem primjeru, pa otud i notacija $\{p_r^2\}$), primjenjujemo sljedeći trik. Znamo da su integrali Lorentz kovarijantni i takav mora biti i rezultat. To znači da rezultat mora biti odgovarajući Lorentz tenzor izgrađen od tenzora sadržanih u integraciji. Ukoliko u integraciji nema prisutnih vanjskih tenzora osim skalara, znači da tenzorska struktura mora biti izgrađena isključivo pomoću metričkog tenzora. Koristeći simetrije u indeksima i dimenzionalnost integrala možemo jednoznačno konstruirati tu strukturu za svaki integral. Nakon te konstrukcije svaki integral se svodi na kombinaciju integrala oblika (5.4.6) pa možemo primijeniti proceduru koju smo objasnili.

Kao primjer razmotrimo integral oblika

$$\int d^d k f(k^2, \{p_r^2\}) k_\mu k_\nu = \frac{\eta_{\mu\nu}}{d} \int d^d k f(k^2, \{p_r^2\}) k^2 \implies k_\mu k_\nu \longrightarrow \frac{k^2}{d} \eta_{\mu\nu} \quad (5.4.17)$$

To da je tenzorska struktura dana s $\eta_{\mu\nu}$ je zato jer je to jedini simetrični tenzor ranga 2 na raspolaganju. Faktor proporcionalnosti $1/d$ se dobije tako da se napravi trag $\eta^{\mu\nu}$ od obje strane jednakosti i iskoristi $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta^\mu_\mu = d$.

Još jedan primjer koji se često susreće je

$$\int d^d k f(k^2, \{p_r^2\}) k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma = \frac{1}{d(d+2)} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \int d^d k f(k^2, \{p_r^2\}) k^4$$

što je ekvivalentno tvrdnji da unutar integrala možemo napraviti zamjenu

$$k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma \longrightarrow \frac{k^4}{d(d+2)} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})$$

Objašnjenje je ponovo slično. Imamo samo $\eta_{\mu\nu}$ na raspolaganju od kojeg moramo izgraditi potpuno simetrični tenzor ranga 4. Jedina takva kombinacija je ona koju smo napisali. Faktor $1/d(d+2)$ se ponovo dobije kontrahiranjem obje strane jednakosti, npr. s $\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}$.

Na sličan način se mogu dobiti formule koje uključuju produkte 6, 8, ... komponenti k_μ .

Napišimo neke integrale koji se često sreću u računima s petljama:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \Delta^{d/2-2} \quad (5.4.18)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2} = -\frac{d}{2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \Delta^{d/2-1} \quad (5.4.19)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = \frac{d}{4} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \Delta^{d/2-2} \quad (5.4.20)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = -\frac{i}{2(4\pi)^{d/2}} \Gamma(3 - d/2) \Delta^{d/2-3} \quad (5.4.21)$$

Za $d = 4$ prva tri integrala su divergentna dok je posljednji konvergentan. Integral (5.4.18) je upravo onaj koji smo imali u (5.4.4) što znači da smo ga izračunali u prethodnom odjeljku. Prva dva integrala se pojavljuju u petljama opisanih *mjehurnim* (eng. *bubble*) dijagramima koji imaju dvije vanjske linije. Donja dva integrala se pojavljuju u *trokutnim* dijagramima koji imaju tri vanjske linije.

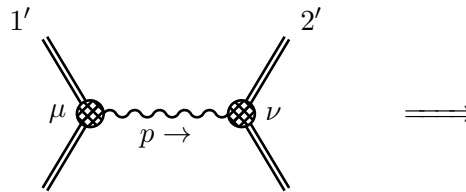
Zadatak 5.4.1: Dokažite (5.4.19)-(5.4.21).

5.5 Polarizacija vakuuma

5.5.1 Definicija i formalizam

Pojavu polarizacije vakuuma razmotrit ćemo na primjeru spinorne elektrodinamike, jer je to slučaj koji je istovremeno fenomenološki vrlo zanimljiv, a opet matematički dovoljno jednostavan. No, treba imati u vidu da je pojava **općenita**.

Razmotrimo dvije lokalizirane konfiguracije električnih naboja koje nose ukupne naboje q_1 i q_2 . Međudjelovanje između konfiguracija je u najnižem redu (e^2) određeno sljedećim drvastim dijagramom⁹



$$\Longrightarrow -\eta_{\mu\nu} \frac{q_1 q_2}{p^2} \quad (5.5.1)$$

⁹Izminno u ovom poglavlju crtat ćemo Feynmanove dijagrame tako da vrijeme ide odozdo prema gore umjesto s lijeva na desno. Razlog je ušteda prostora (i papira u slučaju printanja).

gdje nismo pisali doprinose vanjskih linija (na kojima može biti proizvoljan broj čestica spina 1/2) jer su irelevantni za razmatranja vakuumske polarizacije.

U nerelativističkom limesu imamo $|p^0| \ll |\mathbf{k}|$, pa je $p^2 \approx -\mathbf{p}^2$. Koristeći saznanja iz odjeljka 3.6.4 znamo da se ovakvo međudjelovanje u nerelativističkom limesu može ekvivalentno shvatiti pomoću efektivne potencijalne energije čiji Fourierov transformat se dobije direktno iz $\mathcal{M}$ pomoću (3.6.29) što u ovom slučaju daje:

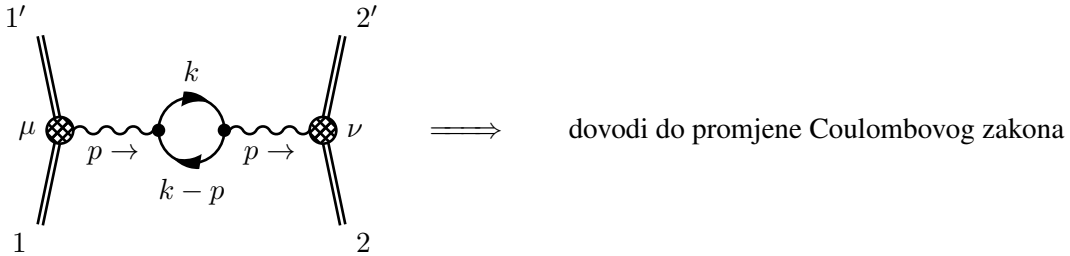
$$\tilde{V}(\mathbf{p}) = -\frac{q_1 q_2}{p^2} \approx \frac{q_1 q_2}{\mathbf{p}^2} \quad (5.5.2)$$

Potencijalna energija u drvastoj aproksimaciji je stoga dana s:

$$V(r) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tilde{V}(\mathbf{p}) = q_1 q_2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi r} \quad (5.5.3)$$

gdje je $r \equiv |\mathbf{x}|$. Po očekivanjima dobili smo **Coulombov zakon**. Ovo je primjer na kojem vidimo kako drvasti dijagrami reproduciraju klasičnu fiziku.

Razmotrimo sada prvu korekciju međudjelovanju koja je reda e^4 i dana je dijagramima oblika:



Ovaj dijagram sadrži petlju i daje prvu kvantnu korekciju. Sva fundamentalna polja prisutna u teoriji koja nose električni naboj doprinose svojim dijagramom u kojem u petlji kruži pripadna čestica. Radi jednostavnosti računa pretpostavit ćemo da postoji samo jedno polje, i to spina 1/2, čiji goli električni naboj, odnosno gola konstanta vezanja za elektromagnetsko polje (parametar koji piše u klasičnom lagranžijanu), je e_B . U slučaju više polja naprosto treba sumirati doprinose svih polja.

Vidimo da nam gornje razmatranje govori da je relevantna veličina koju trebamo razmotriti fotonska 2-točkasta T-uređena korelacijska funkcija

$$\begin{aligned} iG^{\mu\nu}(p) &\equiv p, \mu \text{ --- } \text{blob} \text{ --- } p, \nu \\ &= \mu \text{ --- } p \text{ --- } \nu + p, \mu \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } p, \nu + O(\alpha_e^2) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

gdje sumiramo po svim povezanim Feynmanovim dijagramima. Iz strukture gornjeg razvoja lako se zaključi da se gornji korelator može formalno napisati kao:

$$iG^{\mu\nu}(p) = -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{(-i)}{p^2} \eta^{\mu\rho} i\Pi_{\rho\sigma}(p) \eta^{\sigma\nu} \frac{(-i)}{p^2} = -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} - i \frac{\Pi^{\mu\nu}(p)}{p^4} \quad (5.5.5)$$

gdje je tenzor $\Pi_{\mu\nu}(p)$ definiran pomoću (off-shell) povezanih Feynmanovih dijagrama kao:

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \equiv p, \mu \sim \text{[diagram: a circle with a cross-hatch pattern]} \sim p, \nu \quad (\text{vanjske noge amputirane})$$

gdje ne uključujemo u račun fotonske noge koje izlaze iz dijagrama (tzv. **amputirani dijagrami**) i gdje se podrazumijeva da trivijalni dijagram (linija) ne doprinosi (što znači da $\Pi_{\mu\nu}$ isključivo opisuje međudjelovanje). Koristeći Lorentz kovarijantnost zaključujemo da $\Pi_{\mu\nu}(p)$ mora biti oblika:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -\eta_{\mu\nu} e_B^2 p^2 \Pi(p^2) + p_\mu p_\nu \bar{\Pi}(p^2)$$

gdje su Π i $\bar{\Pi}$ dvije funkcije koje treba izračunati, a e_B je gola konstanta vezanja (goli električni naboj).

Možemo iskoristiti Wardov identitet koji zahtijeva da $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p^2) = 0 = p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p^2)$, iz čega dobijamo

$$\bar{\Pi}(p^2) = e_B^2 \Pi(p^2)$$

što čini posao jednostavnijim jer trebamo izračunati samo jednu funkciju. Ako uvrstimo to natrag u izraz za $\Pi_{\mu\nu}(p)$ dobijamo

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -(p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) e_B^2 \Pi(p^2) \quad (5.5.6)$$

a uvrštavanje ovoga u (5.5.5) daje:

$$G_{\mu\nu}(p) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} [1 - e_B^2 \Pi(p^2)] - \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} e_B^2 \Pi(p^2) \quad (5.5.7)$$

Nadalje, možemo zaključiti da član proporcionalan $p_\mu p_\nu$ ne može doprinositi u amplitudama u kojima je $G_{\mu\nu}$ vezan na vanjske linije koje čine sačuvanu struju, kao što su fizikalna ulazna i izlazna stanja, tako da u fizikalnim procesima ne igra ulogu i možemo ga zanemariti. Ovdje ponovo vidimo moć Wardovih identiteta na djelu. Upotrebom toga vidimo da unutar dijagrama raspršenja možemo uzeti

$$G_{\mu\nu}(p) \longrightarrow -\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} [1 - e_B^2 \Pi(p^2)]$$

pa pošto se iz $G_{\mu\nu}$ računa Fourierov transformat potencijalne energije vezanja dobijamo

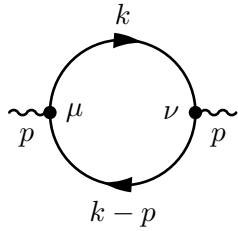
$$\tilde{V}(p) = -\frac{q_1 q_2}{p^2} [1 - e_B^2 \Pi(p^2)] \quad (5.5.8)$$

Zadatak 5.5.1: Dokažite (5.5.2).

Naputak: Izračunajte $\mathcal{M}$ za proces (5.5.1) u kojem, radi jednostavnosti, pretpostavite da je na vanjskim linijama samo po jedna spin 1/2 čestica. Potom napravite nerelativistički limes i primijenite (3.6.29).

5.5.2 Perturbativni račun – najniža kvantna korekcija

Sad prelazimo na konkretan račun u kojem ćemo izračunati $\Pi^{\mu\nu}$ u najnižem redu Feynmanovog razvoja. Najniži doprinos je reda e^2 , pa ćemo ga nazvati $\Pi_2^{\mu\nu}$, i dan je *amputiranim* dijagramom:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(p^2) = \text{diagram} = -(ie_B)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i^2 \text{tr} [\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]}$$


gdje smo primjenili dimenzijsku regularizaciju, što znači da je $d = 4 - \epsilon$.

Primjenom formula (4.10.32), (4.10.33) i (4.10.34) možemo izvrijedniti tragove γ matrica i dobiti:¹⁰

$$\begin{aligned} \text{tr} [\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)] &= (k_\sigma - p_\sigma) k_\rho \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho] + m^2 \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= 4\{2k^\mu k^\nu - p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + \eta^{\mu\nu} [m^2 - (k-p) \cdot k]\} \end{aligned}$$

Sjetimo se sada da nam je Wardov identitet dao da postoji samo jedna nepoznata funkcija, $\Pi(p^2)$, za račun koje je dovoljno razmotriti član u $\Pi^{\mu\nu}$ proporcionalan $\eta^{\mu\nu}$. Pošto tom članu sigurno ne mogu doprinositi članovi koji su proporcionalni p^μ ili p^ν , možemo ih zanemariti. Primjenom toga i uvrštavanjem gornjeg računa za trag dobijamo:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(p^2) = i4 e_B^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} (m^2 - k^2 + k \cdot p)}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} + p^\mu p^\nu (\dots) \quad (5.5.9)$$

Primjenom Feynmanovog trika i supstitucije $k^\mu \rightarrow k'^\mu = k^\mu + (1-x)p^\mu$ dobijamo

$$\Pi_2^{\mu\nu}(p^2) = i4 e_B^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k'^\mu k'^\nu - \eta^{\mu\nu} [k'^2 - x(1-x)p^2 - m^2]}{[k'^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\epsilon]^2} + p^\mu p^\nu (\dots)$$

Uočite da iz definicije u lagranžijanu slijedi da je konstanta vezanja e_B dimenzionalna veličina čija dimenzija (izražena u energiji) je jednaka $(4-d)/2$ (e_B je bezdimenzionalan samo za $d = 4$). Pošto se ispravan perturbativni razvoj uvijek radi po bezdimenzijskoj veličini, redefinirat ćemo e_B na način

$$e_B \longrightarrow e_B \mu^{\frac{4-d}{2}} = e_B \mu^{\frac{\epsilon}{2}} = e_B \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \mu + O(\epsilon^2) \right]$$

gdje je μ **proizvoljna energijska skala** (tj. proizvoljni parametar dimenzije energije), a "novi" e_B je bezdimenzionalan i stoga prihvatljiv perturbativni parametar. Dobijamo:

$$\Pi_2^{(d)\mu\nu}(p^2) = -e_B^2 \mu^{4-d} \eta^{\mu\nu} 4i \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) k^2 - [m^2 + x(1-x)p^2]}{[k^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\epsilon]^2} + p^\mu p^\nu (\dots)$$

Sad možemo iskoristiti (5.5.6) kako bi izvukli iz tog izraza funkciju $\Pi(p^2)$:

$$\Pi_2^{(d)}(p^2) = \mu^{4-d} \frac{4i}{p^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1 - \frac{2}{d}) k^2 - [m^2 + x(1-x)p^2]}{[k^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\epsilon]^2} \quad (5.5.10)$$

Sad možemo napraviti Wickovu rotaciju i provesti integracije. No, integrale koji se pojavljuju smo već tabelirali – integral koji ima k^2 u brojniku je oblika (5.4.19), dok preostali dio ima oblik integrala (5.4.18), gdje je

$$\Delta = m^2 - x(1-x)p^2$$

¹⁰Sjetite se da u blizini $d = 4$ gama-matrice tretiramo kao da su 4×4 matrice, pa je $\text{tr } 1 = 4$.

Uvrštavanje tih izraza i sređivanje daje:

$$\Pi_2^{(d)}(p^2) = \frac{4\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{p^2} \int_0^1 dx \left\{ \left[\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) - \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right] \Delta^{\frac{d}{2}-1} + 2x(1-x) p^2 \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \Delta^{\frac{d}{2}-2} \right\}$$

Ako u identitet $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ uvrstimo $z = 1 - d/2$ dobijamo da član u uglatoj zagradi identički iščezava. Ono što preostaje je

$$\Pi_2^{(d)}(p^2) = \frac{8\mu^\epsilon}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \Gamma(\epsilon/2) \int_0^1 dx x(1-x) [m^2 - x(1-x)p^2]^{-\epsilon/2}$$

gdje smo uvrstili $d = 4 - \epsilon$. Sad treba napraviti razvoj oko $\epsilon = 0$ na isti način kao što smo to napravili u (5.4.12). Rezultat je:

$$\Pi_2(p^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{[m^2 - x(1-x)p^2]} \right\}, \quad \bar{\mu} \equiv \sqrt{4\pi} e^{-\gamma_E/2} \mu \quad (5.5.11)$$

gdje smo odmah odbacili $O(\epsilon)$ doprinos jer iščezava u limesu $\epsilon \rightarrow 0$. Integral se, u stvari, može analitički napraviti, no rezultat nije nešto posebno transparentan pa ćemo to ostaviti čitatelju za zabavu. Umjesto toga, preći ćemo na analizu nekih važnijih fizikalnih posljedica gornjeg izraza.

Uočite pojavu proizvoljne skale μ . Sličnu stvar smo vidjeli prije kod regularizacije putem čvrstog odsjecanja Λ . Bez obzira koju vrstu regularizacije koristili, zaključak je uvijek isti:

Regularizacija uvijek unosi proizvoljnu skalu.

Pojava proizvoljne skale na prvi pogled može izgledati kao neko potencijalno problematično svojstvo, ako ne i nefizikalno. No, upravo obrnuto, ona se može okrenuti u našu korist. Pošto mjerljive veličine, reprezentirane operatorima $\mathcal{O}_j$, ne smiju ovisiti o proizvoljnoj skali, moraju zadovoljavati jednadžbu

$$\frac{d\mathcal{O}_j}{d\mu} = 0 \quad (5.5.12)$$

Ako upotrijebimo logiku u suprotnom smjeru, vidimo da ova jednadžba filtrira kandidate za mjerljive veličine u teoriji. Gornja jednadžba se naziva **jednadžba renormalizacijske grupe**, i njena analiza može dati važne podatke o svojstvima dane teorije. Renormalizacijska grupa se razmatra u odjeljku 5.6.

Zadatak 5.5.2: Dokažite da $G_2^{\mu\nu}$ zadovoljava (5.5.7), tako što ćete eksplicitno izračunati članove proporcionalne $p^\mu p^\nu$ bez korištenja Wardovog identiteta. To je važno jer pokazuje da petlje čuvaju Wardov identitet, i to u off-shell računu.

5.5.3 Fizikalni učinci polarizacije vakuuma. Efektivni naboj

Vratimo se sada na izraz za potencijalnu energiju (5.5.8). Kako je u prirodi električni naboj kvantiziran, možemo pisati $q_{1,2} = n_{1,2} e_B$, gdje su $n_{1,2} \in \mathbb{Z}$, pa (5.5.8) postaje

$$\tilde{V}(p^2) = -\frac{n_1 n_2}{p^2} e_B^2 [1 - e_B^2 \Pi(p^2)] \quad (5.5.13)$$

Sam po sebi e_B nije mjerljiva veličina, no potencijalna energija je. To znači da možemo definirati renormalizirani naboj e_R tako da odaberemo neki proizvoljni p_0^2 i definiramo

$$\tilde{V}(p_0^2) = -\frac{n_1 n_2}{p_0^2} e_R^2 \quad \implies \quad e_R^2 = -p_0^2 \tilde{V}_1(p_0^2) \quad , \quad \tilde{V}_1 \equiv \frac{\tilde{V}}{n_1 n_2}$$

To nam omogućava da izrazimo goli naboj e_B pomoću renormaliziranog naboja e_R :

$$e_R^2 = e_B^2 [1 - e_B^2 \Pi(p_0^2)] = e_B^2 - e_B^4 \Pi_2(p_0^2) + O(e_B^6)$$

Invertiranje gornjeg reda daje:

$$e_B^2 = e_R^2 + e_R^4 \Pi_2(p_0^2) + O(e_R^6) \quad (5.5.14)$$

Ponovo vidimo da redovi koji povezuju gole i renormalizirane konstante vezanja uopće nisu dobro matematički definirani jer koeficijenti (npr. Π_2) divergiraju za $d \rightarrow 4$. I, ponovo, pravit ćemo se da nas to ne zanima i promatrati ove redove samo formalno. Ponovo naglasimo da razlog zašto to nije nefizikalno je što goli naboj nije mjerljiva veličina.

Uvrštavanjem u (5.5.13) napravimo sad razvoj potencijalne energije između čestica naboja e :

$$\tilde{V}_1(p^2) = -\frac{1}{p^2} [e_B^2 - e_B^4 \Pi_2(p^2) + O(e_B^6)] = -\frac{1}{p^2} \{e_R^2 - e_R^4 [\Pi_2(p^2) - \Pi_2(p_0^2)] + O(e_R^6)\}$$

gdje smo u drugoj jednakosti upotrijebili (5.5.14). Ono što je važno uočiti je da je $\Pi(p^2) - \Pi(p_0^2)$ konačno jer se članovi s $1/\epsilon$ krate, tako da potencijalna energija ima regularan razvoj u renormaliziranom naboju (bar do reda e_R^4). Također uočite da je iz igre ispala i proizvoljna skala μ , što je očekivano svojstvo jer je razlika potencijalnih energija mjerljiva veličina pa mora zadovoljavati (5.5.12).

Jedan fizikalno važan odabir renormalizacijske skale je $p_0^2 = 0$, jer to određuje ponašanje $V(r)$ za $r \rightarrow \infty$. Pošto je standardan način mjerenja električnog naboja taj da se mjeri sila na velikim udaljenostima, to znači da je $e_R(0) = e$, gdje je e standardno definirani naboj npr. protona ili pozitrona. Za ovaj odabir renormalizacijske skale vrijedi:

$$\Pi(p^2) - \Pi(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right] + O(e^2)$$

pa je

$$\tilde{V}_1(p^2) = -\frac{e^2}{p^2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right] \right\} + O(e^6) \quad (5.5.15)$$

Potencijalna energija u x -prostoru, koja se dobije kao Fourierov transformat gornjeg izraza po $\mathbf{p}$ u režimu $|p^0| \ll |\mathbf{p}|$, je dana s:

$$V_1(r) = \frac{e^2}{4\pi r} \left(1 + \frac{e^2}{6\pi^2} \int_1^\infty dx \sqrt{x^2 - 1} \frac{2x^2 + 1}{2x^4} e^{-2mrx} \right) + O(e^6) \quad (5.5.16)$$

Ovaj izraz se naziva **Uehlingov potencijal**. U limesu $r \gg 1/m$ ("velike udaljenosti") svodi se na:

$$V_1(r) \approx \frac{\alpha_e}{r} \left[1 + \frac{\alpha_e}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right] + O(\alpha_e^3) \quad , \quad r \gg 1/m \quad (5.5.17)$$

Vidimo da prva korekcija Coulombovog potencijala brže nego eksponencijalno iščezava na velikim udaljenostima, i da je doseg tog člana $\sim 1/m$.

Iz (5.5.17) vidimo da kvantni doprinosi u teoriji polja mijenjaju potencijal formalno na sličan način kao što to radi polarizabilni medij u klasičnoj elektrodinamici. Kako ovdje nema medija nego se sve zbiva u vakuumu, ovaj efekt se naziva **polarizacija vakuuma**. Pojednostavljeni opis ove pojave je sljedeći: Kao što smo vidjeli, vakuum nije prazan jer u njemu postoje fluktuacije kvantnih polja. Ove fluktuacije mogu se reprezentirati stalnom tvorbom i anihilacijom virtualnih parova čestica-antičestica (npr. $e^- e^+$) u čitavom prostoru. Kada jedan takav par nastane u prostoru u blizini fizikalnih naboja, uslijed djelovanja elektromagnetskog polja orijentira se poput malenog dipola i stvori zasjenjenje fizikalnih naboja. Posljedica je narušenje Coulombovog zakona.

Koristan koncept je **efektivni naboj** ($e_{\text{eff}}(p^2)$) koji se definira na sljedeći način:

$$\tilde{V}_1(p^2) = -\frac{e_{\text{eff}}(p^2)^2}{p^2} \quad (5.5.18)$$

Logika je da $e_{\text{eff}}(p^2)$ igra istu ulogu na skali $|p^2|$ koju igra "standardni" naboj e na skali $p^2 \approx 0$. Kako u t -kanalnim on-shell procesima, poput (5.5.1), uvijek vrijedi $p^2 \leq 0$, spretno je uvesti pozitivnu veličinu $Q^2 \equiv -p^2 \geq 0$ i izraziti efektivni naboj pomoću nje, $e_{\text{eff}}(Q) \equiv e_{\text{eff}}(p^2)$.

U praksi se u razmatranjima umjesto naboja obično koristi **efektivna konstanta fine strukture** definirana kao

$$\alpha_{\text{eff}}(Q) = \frac{e_{\text{eff}}(Q)^2}{4\pi} \quad , \quad \alpha_{\text{eff}}(0) = \alpha_e \approx \frac{1}{137} \quad (5.5.19)$$

Koristeći (5.5.15) može se pokazati da je $\alpha_{\text{eff}}(Q)$ rastuća funkcija kako idemo od $Q = 0$. Račun u okviru Standardnog modela, koji uključuje doprinose svih nabijenih čestica, pokazuje da je $\alpha_{\text{eff}}(90 \text{ GeV}) \approx 1/128$ što je dovoljno različito od $\alpha_e \approx 1/137$ (razlika $\sim 7\%$) da u iole preciznijim računima moramo uzeti u obzir.

Na sličan način možemo definirati efektivni naboj i konstantu fine strukture u x -prostoru putem

$$\tilde{V}_1(r) = -\frac{\bar{\alpha}_{\text{eff}}(r)}{r}$$

Nije teško zaključiti da su ove dvije definicije povezane na način:

$$\alpha_{\text{eff}}(Q) \approx \bar{\alpha}_{\text{eff}}(1/Q)$$

Zadatak 5.5.3: Dokažite (5.5.16) i (5.5.17).

Nerelativistički režim. Doprimos Lambovom pomaku

Razmotrimo izraz za potencijalnu energiju u području impulsa $|p^2| \ll m^2$. U tom slučaju imamo:

$$\int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{p^2}{m^2} \right] \approx -\frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 = -\frac{1}{30} \frac{p^2}{m^2}$$

Uvrštavanje toga u (5.5.15), uz dodatno korištenje $|p^0| \ll |\mathbf{p}|$, daje

$$\tilde{V}_1(\mathbf{p}^2) \approx \frac{e^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{e^4}{60\pi^2 m^2}$$

Fourierov transformat prvog člana, kao što smo već pokazali, daje Coulombov zakon, dok je transformat drugog člana, koji je konstanta, naprosto Diracova delta funkcija. Slijedi da je potencijalna energija u ovom režimu približno dana s:

$$V_1(r) \approx \frac{e^2}{4\pi r} + \frac{e^4}{60\pi^2 m^2} \delta^3(\mathbf{x}) \quad (5.5.20)$$

Drugi član, koji je korekcija na Coulombov zakon, se obično naziva **Uehlingov član**. Usporedba s (5.5.17) pokazuje da je izraz (5.5.20) "grublji" od izraza (5.5.17), koji pokazuje da postoji eksponencijalni rep širine $1/m$ koji (5.5.20) ne vidi već daje potpunu lokalizaciju u ishodištu. Stoga treba biti oprezan u primjeni (5.5.20). S druge strane (5.5.20) je puno jednostavniji od (5.5.17), tako da su računi s njim bitno brži i lakši.

Obratite pažnju da dominantni doprinos daje najlakša nabijena čestica, što je u stvarnosti elektron. Pošto su sve ostale nabijene čestice bitno masivnije od elektrona u stvarnim primjenama možemo pisati $m = m_e$ i zanemariti doprinos ostalih polja.¹¹

Pretpostavke koje smo napravili se mogu napisati i kao

$$|p^0| \ll |\mathbf{p}| \quad , \quad |\mathbf{p}| \ll m$$

što je u stvari **nerelativistički režim**. To znači da se ovaj oblik kvantno-korigirane potencijalne energije može općenito koristiti u nerelativističkim računima, kao što je računanje utjecaja na **elektronske orbitale** u atomima. Primjena standardnog računa smetnje na Uehlingov član nam daje pomake energetske nivoa u najnižem redu kao:

$$\Delta E_{nl} \approx \langle n, l | V_{\text{Ueh}} | n, l \rangle = \int d^3\mathbf{x} |\psi_{nl}(\mathbf{x})|^2 V_{\text{Ueh}}(\mathbf{x}) = -\frac{4Z\alpha_e^2}{15m_e^2} |\psi_{nl}(0)|^2$$

gdje je Z redni broj atoma, a ψ_{nl} valna funkcija elektrona u stanju opisanog standardnim kvantnim brojevima $n = 1, 2, \dots$ i $l = 0, \dots, n-1 = s, p, d, \dots$. Pošto samo s -stanja ($l = 0$) imaju $\psi_{nl}(0) \neq 0$, to znači da samo ta stanja trpe pomake u energiji uzrokovane Uehlingovim članom. Vidimo da Uehlingov član stoga razbija degeneraciju u l tako da razdvaja s -stanja od onih s drugim $l \neq s$. Iz kursa kvantne mehanike znamo da je valna funkcija za ns stanje u nerelativističkoj aproksimaciji dana s

$$\psi_{ns} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z\alpha_e m_e}{n} \right)^{3/2}$$

Uvrštavanje gore daje da Uehlingov član vodi na pomake energija s -stanja ($l = 0$) dane približno s

$$\Delta E_{nl} \approx -\frac{4Z^4\alpha_e^5 m_e}{15\pi n^3} \delta_{l0} \quad (5.5.21)$$

Ovaj pomak se obično naziva **Uehlingov efekt**. Prije njegove ozbiljnije primjene moramo provjeriti je li, i u kojoj mjeri, (5.5.20) dobra aproksimacija potencijalne energije. Da bi to vidjeli, moramo usporediti skalu prostorne promjene valnih funkcija u atomima, koja je dana Bohrovim radijusom $a_B = (Zm_e\alpha_e)^{-1}$, sa skalom dosega Uehlingove korekcije $1/m$ (koja je aproksimirana s 0 u računu). Da bi eksponencijalni rep u (5.5.17) bio zanemariv, mora vrijediti

$$\frac{1/m_e}{a_B} = Z\alpha_e \ll 1 \quad \implies \quad Z \ll 137$$

Vidimo da za atom vodika ($Z = 1$) očekujemo da je to zadovoljeno s preciznošću $\sim 1\%$ što je sasvim dobro, a za lagane atome ($Z \sim 10$) s preciznošću $\sim 10\%$. Za teške atome $Z \sim 100$ aproksimacija (5.5.20) nije upotrebljiva.

Kao primjer primjene Uehlingovog efekta razmotrimo $n = 2$ stanja, $2s$ i $2p$, u vodikovom atomu ($Z = 1$). Prednost razmatranja ovih nivoa je što Diracova (relativistička) teorija vodikovog atoma daje njihovu egzaktnu degeneraciju, što znači da cijepanje u cjelini dolazi od korekcija koje daje kvantna teorija polja. Iz (5.5.21) slijedi da je cijepanje između ovih stanja:

$$\Delta E(2s-2p) \equiv E_{2s} - E_{2p} \approx -\frac{\alpha_e^5 m_e}{30\pi} \approx -1.122 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

Ako izrazimo to pomoću ekvivalentne frekvencije prijelaza i uvrstimo numeričke vrijednosti za $\alpha_e \approx 1/137$, masu elektrona m_e i π dobijamo (u SI sustavu)

$$\nu_{\text{Uehl}} \equiv \frac{\Delta E(2s-2p)}{2\pi\hbar} \approx -27 \text{ MHz}$$

¹¹Prva sljedeća nabijena čestica po masi je mion koji je približno 210 puta masivniji od elektrona. Pošto je Uehlingov član proporcionalan s $1/m^2$ to znači da je doprinos miona potisnut približno za faktor $(1/210)^2 = 2.3 \times 10^{-5}$.

Ovaj pomak, koji dolazi od Uehlingovog efekta, daje relativno mali doprinos tzv. **Lambovom pomaku**, koji je približno $\nu_{\text{Lamb}} \approx 1028 \text{ MHz}$, a koji uglavnom dolazi od drugih korekcija uslijed petlji u okviru kvantne elektrodinamike (tzv. **radijativne korekcije**) koje ćemo razmotriti u kasnijim poglavljima. Lambov pomak se može mjeriti dovoljno precizno tako da se testira i slabašan Uehlingov doprinos. Slaganje između teorije i eksperimenta je dovoljno dobro da možemo reći da daje nezavisnu potvrdu valjanosti kvantne elektrodinamike.

Zadatak 5.5.4: *Mionski atom.* Razmotrite atom u kojem oko protona umjesto elektrona orbitira mion (μ^-), čestica koja ima jednak električni naboj ($-e$) kao elektron i masu $m_\mu \approx 210 m_e$ (u ovom zadatku zanemarite nestabilnost miona). Koristeći rezultate dobijene iznad za obični vodikov atom napravite sljedeće:

- Izračunajte Uehlingov efekt za ovaj mionski atom. Izračunajte doprinos Uehlingovog efekta na energiju cijepanja i frekvenciju prijelaza između $2s$ i $2p$ stanja i usporedite rezultate s onima za običan atom vodika.
- Ostale radijativne korekcije koje doprinose Lambovom pomaku se uglavnom linearno skaliraju s masom čestice koja orbitira. Koristeći ovo i rezultate iz (a) dijela zadatka izvršite ukupno Lambovo cijepanje između $2s$ i $2p$ stanja i pokažite da u ovom slučaju Uehlingov efekt dominira u odnosu na ostale radijativne korekcije.
- Razmotrite valjanost primjene aproksimacije Uehlingovog potencijala s (5.5.20) za slučaj mionskog atoma. Koliko možete vjerovati rezultatima dobijenima u (a) dijelu zadatka?

Male udaljenosti – veliki impulsi. "Veliki logaritmi"

Razmotrimo sada suprotan limes velikih impulsa, $Q^2 \equiv -p^2 \gg m^2$, što odgovara $r \ll 1/m$. U ovom režimu (5.5.15) postaje

$$\tilde{V}_1(Q^2) \approx \frac{e^2}{Q^2} \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2} \right) + O(e^6)$$

Slijedi da je efektivna konstanta fine strukture, definirana u (5.5.18)-(5.5.19), dana s

$$\alpha_{eff}(Q) = \alpha_e \left(1 + \frac{\alpha_e}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} + O(\alpha_e^2) \right), \quad Q^2 \equiv -p^2 \gg m^2 \quad (5.5.22)$$

U pravilu perturbativni razvoj može biti smislen samo dok je korekcija manja od nultog člana, što za gornji izraz znači

$$Q \leq Q_{np} = m \exp \left(\frac{3\pi}{2\alpha_e} \right) \sim m \times 10^{280}$$

Za procese čija karakteristična energija je $E \gtrsim Q_{np}$ **ne bismo mogli koristiti perturbativni račun**. Iako ovo nije fundamentalna zapreka na teoriju, kako smo zasad u praktičnim računima uglavnom ograničeni na primjenu perturbativnog računa, ovo ipak čini ozbiljnu praktičnu zapreku jer onemogućava primjenu teorije na velikim energijama.

No, srećom stvari nisu jako problematične. Naime, ako za masu stavimo masu elektrona, $m = m_e = 511 \text{ keV}$, dobijamo da je skala na kojoj očekujemo "pucanje" perturbativnog razvoja $Q_{np} \approx 10^{286} \text{ eV}$, što je 273 redova veličine veće od trenutno eksperimentalno dostupnih energija (13 TeV na LHC sudaraču čestica) pa s čisto praktično-fenomenološke strane ne predstavlja problem.¹²

¹²Također je Q_{np} veće od Planckove skale za 257 redova veličine, tako da se pobornici mišljenja da kvantne teorije polja ne opisuju dobro prirodu na skalama iznad Planckove skale još manje moraju brinuti.

Aproksimacija vodećeg logaritma. Landauov pol

Ipak, iz čisto teorijskih razloga zanima nas kako se ponaša kvantna elektrodinamika na proizvoljno visokim energijama, $E \geq Q_{\text{np}}$. Gornja analiza pokazuje da u tom režimu vjerojatno nema smisla rezati perturbativni račun na nekom konačnom redu. No, pošto (zasad) ne znamo neperturbativno računati, na to pitanje ne možemo dati pouzdani odgovor.

No, ono što možemo je izračunati doprinos specifičnog tipa Feynmanovih dijagrama i sumirati ih u svim redovima. Iako ovaj račun ispušta beskonačan broj Feynmanovih dijagrama, postoji nada da rezultat možda ipak daje ispravno ponašanje teorije na visokim energijama, makar u najgrubljim crtama, jer uključuje doprinose koji potječu iz svih redova računa smetnje. U računu za $\Pi^{\mu\nu}$ jedan takav "toranj" Feynmanovih dijagrama je dan s:

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \quad (5.5.23)$$

Uzimanje samo ovakvih dijagrama se naziva **aproksimacija vodećih logaritama**.

Korištenjem Feynmanovih pravila i definicija za $\Pi_{\mu\nu}$ i $\Pi_{2\mu\nu}$ dobijamo:

$$\Pi^\mu{}_\nu(p^2) \approx \Pi_{2\nu}^\mu(p^2) + \frac{1}{p^2} \Pi_{2\rho}^\mu(p^2) \Pi_{2\nu}^\rho(p^2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2(n-1)}} (\Pi_2^n)^\mu{}_\nu$$

gdje Π_2^n označava matrični produkt n matrica Π_2^μ . Koristeći ovaj izraz može se pokazati da je potencijalna energija dana s:

$$\tilde{V}_1(Q) \approx -\frac{e^2}{Q^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2} \right)^n \right] = -\frac{1}{Q^2} \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{m^2}} \quad (5.5.24)$$

Uočite da smo doprinos ovog tornja Feynmanovih dijagrama, iako ih ima beskonačno, uspjeli sumirati u konačan analitički izraz. Sada vidimo da je efektivna konstantna fine strukture dana s:

$$\alpha_{\text{eff}}(Q) \approx \frac{\alpha_e}{1 - \frac{\alpha_e}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2}}, \quad Q^2 \equiv -p^2 \gg m^2 \quad (5.5.25)$$

Vidimo da u aproksimaciji vodećih logaritama efektivna konstanta vezanja u kvantnoj elektrodinamici postaje **beskonačna** za $Q = Q_L = Q_{\text{np}}$, što bi značilo da se teorija uopće ne može definirati na skalama iznad Q_L . To je razlog zašto se Q_L često naziva **Landauov pol**. Ukoliko uistinu postoji Landauov pol, kvantna elektrodinamika na skalama Q_L ima ozbiljniji problem od toga da postaje neperturbativna.

Koliko god gornji rezultat bio sugestivan, moramo se prisjetiti da dijagrami koje smo uzeli u (5.5.23) predstavljaju samo dio doprinosa $\Pi_{\mu\nu}$ jer postoji beskonačno drugih dijagrama koji također daju neiščezavajući doprinos, pa ne možemo biti sigurni da je formula (5.5.25) na skalama oko Q_L smisljena, uključujući predikciju Landauovog pola. Također treba biti skeptičan prema korištenju perturbativnog razvoja u neperturbativnom režimu, čak i kad znamo isumirati dijagrame. Stoga je ponašanje kvantne elektrodinamike na vrlo visokim energijama i dalje otvoreno pitanje na koje se ne zna odgovor.

Vidimo da problem u gornjoj analizi predstavlja činjenica da razvoj u (5.5.22) nije razvoj samo po α_e nego i po veličini $\alpha_e \ln(Q^2/m^2)$. Bez obzira kako α_e bio malen, za dovoljno visoke energije ova veličina će postati reda veličine jedan pa ovako definiran Feynmanov razvoj postaje neupotrebljiv. Pitanje koje se nameće je da li možemo definirati neku drugu vrstu razvoja u kojoj neće figurirati "**veliki logaritmi**". Odgovor je da postoji i zasnovan je na ideji **klizne skale** i metodama **renormalizacijske grupe**.

Zadatak 5.5.5: Dokažite (5.5.24).

5.6 Osnove renormalizacijske grupe*

5.6.1 Klizna skala

Razmotrimo sada pitanje kako preformulirati perturbativni razvoj tako da izbjegnemo velike logaritme, poput onog prisutnog u (5.5.22). Uočimo prvo da smo renormaliziranu konstantu vezanja $e_R = e$ definirali na skali $p^2 = 0$, dakle “daleko” od skale procesa koja za velike logaritme zadovoljava $Q \gg m$ (alternativno rečeno, zanemarujemo masu, $m \approx 0$). Tu se odmah rađa ideja **klizne skale**: ukoliko promatramo neki proces čija skala je dana s Q možda trebamo definirati renormalizirani naboj na skali E koja nije “daleko” od skale Q , tj. $e_R \rightarrow e_{\text{eff}}(E)$, $E \sim Q$. Ovako definirana konstanta vezanja $e_E \equiv e_{\text{eff}}(E)$, koju “kližemo” sa skalom procesa koji razmatramo, se naziva **klizno vezanje** (eng. **running coupling**).

Idemo sada pokazati da primjenom kliznog vezanja izbjegavamo velike logaritme. Radi jednostavnosti razmotrit ćemo režim $Q, E \gg m$. Pošto je po definiciji:

$$e_E^2 = e^2 \left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{E^2}{m^2} + O(e^4) \right)$$

invertiranje ove relacije daje

$$e^2 = e_E^2 \left(1 - \frac{e_E^2}{12\pi^2} \ln \frac{E^2}{m^2} + O(e_E^4) \right)$$

Uvrštavanje u (5.5.22) daje:

$$e_{\text{eff}}(Q)^2 = e_E^2 + \frac{e_E^4}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{E^2} + O(e_E^6) \quad (5.6.1)$$

Vidimo da ukoliko to uvrstimo u mjerljivu veličinu $\tilde{V}_1(Q)$, više nema velikih logaritama jer je $|\ln(Q/E)| \lesssim 1$ za $E \sim Q$, pa je konvergencija perturbativnog razvoja određena samo iznosom klizne konstante vezanja e_E .

5.6.2 Jednadžba renormalizacijske grupe

Ostaje pitanje kako izračunati konstantu vezanja e_E na proizvoljnoj skali E , ukoliko iz eksperimenta znamo njen iznos na nekoj specifičnoj skali E_0 . Npr. u elektrodinamici e se tradicionalno mjeri na makroskopskim udaljenostima, što odgovara $E_0 = 0$. Uočite prvo da se veza između dva klizna vezanja za dvije skale E i E' dobije iz (5.6.1) tako da stavimo $Q = E'$. Ako uzmemo da su skale infinitezimalno blizu, $E' = E + dE$, relacija (5.6.1) postaje:

$$d(e_E^2) = \frac{e_E^4}{12\pi^2} \ln \frac{E^2 + 2E dE}{E^2} = \frac{e_E^4}{12\pi^2} \ln \left(1 + 2 \frac{dE}{E} \right) = \frac{e_E^4}{6\pi^2} \frac{dE}{E}$$

Nakon uvrštavanja $d(e_E^2) = 2e_E de_E$ dobijamo

$$E \frac{de_E}{dE} \equiv \frac{de_E}{d(\ln E)} = \beta(e_E) \quad (5.6.2)$$

gdje je **beta funkcija** spinorne kvantne elektrodinamike dana s

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5) \quad (5.6.3)$$

(5.6.2) se općenito naziva **jednadžba renormalizacijske grupe**.¹³

¹³Renormalizacijska grupa nije grupa u standardnom matematičkom smislu, već **monoid**. No, iako se radi o matematički nepreciznom nazivu, toliko se udomaćio da je preživio u ovom obliku.

Par važnih napomena o **renormalizacijskoj grupi**:

1. Funkcija $\beta(e)$ ovisi samo o konstanti vezanja e_E , ali ne i o E eksplicitno, i može se pokazati da to vrijedi u svim redovima računa smetnje. Ovo je općenito svojstvo beta funkcija u svim teorijama polja. Beta funkcija se može dobiti Feynmanovim računom za proizvoljni red, s tim da svaki sljedeći red uključuje dijagrame s jednom nezavisnom petljom više, što znači bitno povećanje komplikacije računa.
2. Pitanje računanja klizne konstante vezanja za proizvoljnu skalu μ je svedeno na rješavanje obične autonomne diferencijalne jednačbe prvog reda. Za jednoznačno rješenje trebamo jedan početni uvjet, npr. $e_0 \equiv e_{E_0}$, dakle samo trebamo izmjeriti iznos od e za jednu vrijednost od E .
3. Kvantne teorije polja obično imaju više parametara u lagranžijanu, označimo ih s $g^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$. U tom slučaju za svaki nezavisni parametar postoji pripadna jednačba pa jednačbe renormalizacijske grupe čine vezani autonomni sustav običnih diferencijalnih jednačbi s n beta funkcija:

$$E \frac{dg_E^{(j)}}{dE} = \beta^{(j)}(g_E^{(1)}, \dots, g_E^{(n)}) \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

QED u kojoj se materija sastoji od jedne masivne čestice ($m \neq 0$) ima dva parametra, e i m . Razlog zašto smo u (5.6.2) dobili zasebnu jednačbu za e je jer smo u izvodu nametnuli $E \gg m$, što je formalno ekvivalentno kao da smo uzeli $m \rightarrow 0$ držeći konačan $E \neq 0$.

4. Činjenica da je koeficijent najnižeg člana u perturbativnom razvoju beta funkcije za QED pozitivan znači da je e_E strogo rastuća funkcija od E . Ovo vrijedi sve dok je e_E dovoljno malen tako da je aproksimacija prvim članom u (5.6.3) dovoljno dobra.

Sada ćemo demonstrirati tehnike perturbativnog rješavanja i analize rješenja jednačbe renormalizacijske grupe na dva primjera: (1) kvantna elektrodinamika u kojoj renormalizacijska grupa ne daje neku suštinsku prednost u odnosu na standardni perturbativni razvoj s fiksnom skalom, (2) kvantna kromodinamika u kojoj dolazi do izražaja puna snaga klizne skale i renormalizacijske grupe.

5.6.3 Primjeri rješavanja jednačbe renormalizacijske grupe

Kvantna elektrodinamika

Pređimo sada na eksplicitno rješavanje jednačbe renormalizacijske grupe. Kao prvi primjer razmotrimo QED u režimu $E \gg m$, koja je dana s (5.6.2)-(5.6.3). Pretpostavit ćemo da je e_E dovoljno malen da možemo aproksimirati beta funkciju prvim članom u (5.6.3). Diferencijalna jednačba se može lako riješiti tehnikom separacije varijabli i opće rješenje je:

$$\alpha_e(E) = \frac{\alpha_e(E_0)}{1 - \frac{\alpha_e(E_0)}{3\pi} \ln \frac{E^2}{E_0^2}} \quad , \quad \alpha_e(E) \equiv \frac{e_E^2}{4\pi}$$

gdje smo prešli na “prirodnu” konstantu vezanja u QED, tj. (kliznu) konstantu fine strukture $\alpha_e(E)$. Ponovo vidimo naznaku Landauovog pola, no ponovo napomenimo da je ovo rješenje smisleno samo dok su $\alpha_e(E)$ i $\alpha_e(E_0)$ dovoljno mali da je aproksimacija beta funkcije zadovoljavajuća, što znači daleko od lokacije pola.

Kvantna kromodinamika

Za drugi primjer uzet ćemo kvantnu kromodinamiku (eng. *quantum chromodynamics* ili kraće QCD), teoriju koja opisuje jako međudjelovanje. Ponovo ćemo razmotriti skale koje su puno veće od masa (relevantnih) kvarkova, $\mu \gg m_q$.

Može se pokazati (dokaz nije sasvim jednostavan¹⁴) da je beta funkcija za QCD dana s:

$$\beta_s(g) = -\eta \frac{g^3}{16\pi^2} + O(g^5) \quad , \quad \eta = 11 - \frac{2n_f}{3} \quad (5.6.4)$$

gdje je g QCD konstanta vezanja, a n_f je broj kvarkovskih okusa. U Standardnom modelu je ukupni broj okusa $n_f = 6$, što daje $\eta = 7 > 0$. Odmah vidimo da je u slučaju $\eta > 0$ (što vrijedi za $n_f < 17$) koeficijent ispred vodećeg člana u perturbativnom razvoju beta funkcije **negativan**, za razliku od QED. Sad ćemo pokazati da to ima dramatične posljedice. Jednadžba renormalizacijske grupe je sada:

$$\frac{dg_E}{d(\ln E)} = \beta(g_E) \approx -\eta \frac{g_E^3}{16\pi^2} \quad (5.6.5)$$

gdje ponovo pretpostavljamo da je rješavamo u režimu u kojem je g_E dovoljno malen da možemo aproksimirati beta funkciju vodećim članom u perturbativnom razvoju. Separacija varijabli vodi na opće rješenje

$$\alpha_s(E) = \frac{\alpha_s(E_0)}{1 + \eta \frac{\alpha_s(E_0)}{2\pi} \ln \frac{E}{E_0}} \quad , \quad \alpha_s(E) \equiv \frac{g_E^2}{4\pi} \quad (5.6.6)$$

Vidimo da sve dok je $\eta > 0$ dobijamo da je $\alpha_s(E)$ strogo padajuća funkcija i da je

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \alpha_s(E) = 0 \quad (5.6.7)$$

Uočite odmah moć renormalizacijske grupe: iako za $E \gg E_0$ logaritam postaje velik, što, kao što smo prije vidjeli, znači da standardni perturbativni račun s fiksnom renormaliziranom konstantom vezanja puca, **rješenje jednadžbe renormalizacijske grupe i dalje vrijedi jer je njegova valjanost u potpunosti određena iznosom $\alpha_s(E)$ i ne ovisi eksplicitno o veličini logaritma** (dapače, u ovom slučaju kako raste E tako je rješenje (5.6.6) sve točnije jer je g_E sve manji). Eksperimenti pokazuju da je u QCD-u

$$\alpha_s(m_Z) = 0.1184 \quad , \quad m_Z = 91.1876 \text{ GeV} \quad (5.6.8)$$

što znači da je za $E \gtrsim 100 \text{ GeV}$ aproksimacija koju smo napravili za beta funkciju sasvim zadovoljavajuća. Za energije $E \sim m_Z$ u QCD-u u formuli (5.6.4) treba koristiti $n_f = 5$ (što znači $\eta = 23/3$) jer masa top kvarka ($m_t = 173 \text{ GeV}$) ne zadovoljava $m_t \ll E$ već $m_t \gg E$ pa se doprinos top kvarka može zanemariti bez da se unese velika pogreška.

Ponašanje klizne skale kao u (5.6.7) se naziva **asimptotska sloboda** jer u takvim teorijama *međudjelovanje slabi kako čestice prilaze bliže jedna drugoj, tj. čestice postaju efektivno slobodne kad su vrlo blizu*. To znači da pri dovoljno velikim izmjenjenim impulsima, kad je $\alpha_s \ll 1$ **možemo primjenjivati Feynmanov razvoj**. No, kako se E smanjuje, klizno vezanje raste što znači da se međudjelovanje pojačava kako se čestice udaljavaju.

Ovo svojstvo QCD klizne skale razjašnjava ponašanje kvarkova. S jedne strane oni se vežu u jako vezana stanja (hadrone), koja imaju vrlo mali volumen ($r \sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), iz kojih ih zasad nitko nije uspio “izvući vani” bez obzira na uloženu energiju (tzv. **kvarkovsko zatočenje**). S druge strane u eksperimentima u kojima se napucavaju visokoenergetske čestice u hadrone tako da dođe do velike izmjene impulsa¹⁵ čestica metak “vidi” hadron kao da se sastoji od **komada (tzv. partona) koji međusobno vrlo slabo međudjeluju**.

Zanimljivo je da (5.6.6) sugerira postojanje Landauovog pola, koji bi mogao biti naznaka traženog faznog prijelaza koji vodi na kvarkovsko zatočenje. Skala Λ_s na kojoj formula (5.6.6) formalno predviđa $\alpha_s(\Lambda_s) = 1$, što znači pucanje perturbativnog razvoja, je dana s

$$\Lambda_s = E \exp \left\{ -\frac{2\pi}{\eta} \left[\frac{1}{\alpha_s(E)} - 1 \right] \right\} \quad (5.6.9)$$

¹⁴Za izvod ove relacije dobijena je Nobelova nagrada. Danas je ovaj račun sastavni dio gradiva na kolegijima iz napredne kvantne teorije polja.

¹⁵Što znači da čestica-metak “uđe duboko u hadron i opipa ga iznutra” a preneseni impuls napravi dar-mar u kojem se kreiraju posve nove čestice pa se ovi procesi nazivaju *duboko neelastično raspršenje*.

Uvrštavanje (5.6.8) i $\eta = 23/3$ ($n_f = 5$) daje za QCD $\Lambda_s \approx 205 \text{ MeV}$. Ovaj rezultat je u potpunosti u skladu s eksperimentima koji ukazuju da je skala jakih međudjelovanja reda veličine 100 MeV .¹⁶ Naravno, račun kojim smo dobili Λ_s nije matematički korektan jer jednažba (5.6.6) više ne vrijedi kad je $\alpha_s(E) \sim 1$. To nam govori da gornji argument, kako god bio sugestivan, ne možemo uzeti kao dokaz da QCD objašnjava kvarkovsko zatočenje. Iako postoji puno naznaka da QCD ispravno opisuje jaka međudjelovanja, potpuni teorijski dokaz kvarkovskog zatočenja je još uvijek otvoren problem i efektivno čini jedan od *Millennium Prize Problems* u matematici za čije rješenje se nudi milijun dolara.¹⁷

Za kraj ove kratke analize renormalizacijske grupe u QCD-u, uočimo da (5.6.6) možemo napisati na posebno jednostavan način ako μ_0 izrazimo pomoću položaja Landauovog pola Λ_{QCD} , za koji se lako dobije da je dan s

$$\Lambda_{\text{QCD}} = E_0 \exp \left[-\frac{2\pi}{\eta \alpha_s(E_0)} \right]$$

Primjena ove relacije u (5.6.6) daje

$$\alpha_s(E) = \frac{2\pi}{\eta \ln \frac{E}{\Lambda_{\text{QCD}}}} \quad (5.6.10)$$

Iz (5.6.8) slijedi $\Lambda_{\text{QCD}} = 90 \text{ MeV}$. Točniji račun beta funkcije, koji uključuje doprinose do 4 petlje (red α_s^5), daje $\Lambda_{\text{QCD}} = 213 \text{ MeV}$.

Izraz (5.6.10) ima jednu interesantnu posljedicu vezanu uz činjenicu da se u izrazu ne pojavljuje (bezdimenzijska) konvencionalno renormalizirana konstanta vezanja već samo skala Λ_{QCD} , koja ima dimenziju energije. To znači da će sve veličine u kvantiziranoj teoriji, koje opisuju neka svojstva ili procese, ovisiti o dimenzionalnom parametru umjesto o bezdimenzijskoj veličini (kako je to slučaj u klasičnoj teoriji). Ova pojava se naziva **dimenzijska transmutacija**.

5.6.4 Fiksne točke i scenariji klizanja

Ukoliko teorija posjeduje samo jednu konstantu vezanja g (ako postoje mase, pretpostavljamo da su zanemarive u odnosu na skalu E), koja je skalirana tako da je bezdimenzionalna, tada je renormalizacijska grupa opisana običnom autonomnom diferencijalnom jednažbom prvog reda

$$\frac{dg_E}{d(\ln E)} = \beta(g_E)$$

Primjenom metode separacije varijabli jednažbu možemo formalno integrirati i dobiti:

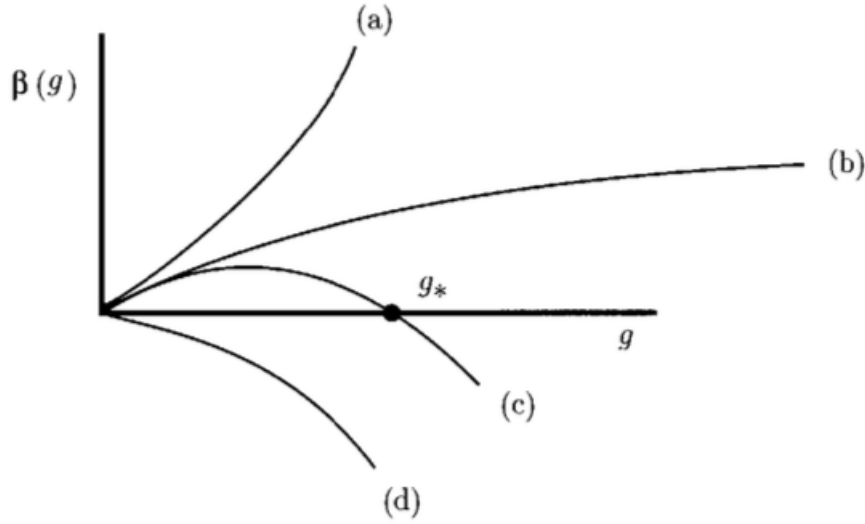
$$\ln \frac{E}{E_0} = \int_{g_0}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)} \quad , \quad g_0 \equiv g_{E_0} \quad (5.6.11)$$

Iz teorije diferencijalnih jednažbi znamo da je ponašanje rješenja u potpunosti određeno osnovnim svojstvima funkcije $\beta(g)$, točnije položajem nul-točaka i pozitivnosti po intervalima (što je dovoljno da se nacrtaju tzv. fazni pravci diferencijalne jednažbe). Kao što je poznato, posebno su važne nul-točke g_* , za koje je $\beta(g_*) = 0$, koje daju posebnu klasu konstantnih rješenja $g_E = g_* = \text{konst}$ i koje dijele fazni prostor u potprostore unutar kojih sva rješenja izgledaju jednako (razlikuju se samo za translaciju po E osi). Iz tog razloga se g_* nazivaju **fiksne točke** i njihovo pronalaženje čini prvi korak u analizi ovakvih diferencijalnih jednažbi.

Na slici 5.1 je skicirano nekoliko tipičnih oblika beta funkcije koji se javljaju u praksi a koji vode na različite scenarije renormalizacijske grupe. U svim scenarijima pretpostavili smo da je $\beta(0) = 0$ jer pretpostavljamo da je

¹⁶Pojednostavljeni argumenti iz kojih možemo razumjeti zašto je skala jakog međudjelovanja 100 MeV su sljedeći. Masa najlakšeg hadrona (π), koja u najvećoj mjeri dolazi od energije jakog vezanja, je približno 135 MeV . S druge strane, radijus najlakših hadrona, koji je mjera dosega jake sile, je $l_s \sim 1 \text{ fm}$, što odgovara energijskoj skali od $\sim 200 \text{ MeV}$ (po formuli $l = \hbar/mc$).

¹⁷U stvari, dotični Millennium Prize Problem samo traži odgovor na pitanje da li čista Yang-Mills teorija (QCD bez kvarkova), koja naivno izgleda kao da je bezmasena, posjeduje *maseni procjep* (eng. *mass-gap*), tj. da li je razlika energija vakuuma i prvog pobuđenog stanja konačna i različita od nule.



Slika 5.1: Neke osnovne varijante ponašanja beta funkcije.

slobodna teorija (opisana s $g = 0$) rješenje, te da je $g > 0$.¹⁸ Razmotrimo sada ponašanje rješenja za kliznu konstantu vezanja unutar svakog scenarija. Koristeći rezultate za primjere koje ćemo razraditi može se razumjeti ponašanje renormalizacijske grupe za svaki odabir beta funkcije.

(a) Singularitet na konačnoj energiji (Landauov pol)

Uzimamo da je $\beta(g) > 0$ i pretpostavimo da beta funkcija dovoljno brzo raste kad $g \rightarrow \infty$ tako da integral

$$\int^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} < \infty$$

konvergira. Iz $\beta(g) > 0$ slijedi da g_E raste kako povećavamo E što znači da će na nekoj konačnoj skali Q_{np} perturbativni razvoj postati neupotrebljiv. Iz (5.6.11) pak direktno slijedi da je $g_E = \infty$ za konačan $E = Q_{\infty}$ dan s

$$Q_{\infty} = E_0 \exp \left(\int_{g_0}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} \right)$$

Vidimo da ovakva teorija posjeduje Landauov pol u Q_{∞} . Primjer ovakve teorije je kvantna elektrodinamika u aproksimaciji vodećih logaritama.

(b) Stalni rast

Sada pretpostavimo da $\beta(g)$ ne raste brzo s g tako da je integral

$$\int^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)} = \infty$$

divergentan. Sada g_E raste kako povećavamo E i teži beskonačnosti kad $E \rightarrow \infty$. Interesantno svojstvo u ovom scenariju je da je vodeći član u limesu $E \rightarrow \infty$ nezavisan od konvencionalno renormalizirane konstante vezanja. Na primjer, ako se za veliki g beta funkcija ponaša kao $\beta(g) \approx b g^k$, gdje su $b > 0$ i $k < 1$ (za $k > 1$ imali bi scenarij (a)), tada iz (5.6.11) slijedi da je rješenje dano s:

$$g_E = g_0 \left[1 + (1 - k)b g_0^{k-1} \ln \frac{E}{E_0} \right]^{1/(1-k)}, \quad g_0 \equiv g_{E_0}$$

¹⁸Kvantne teorije polja s jednom konstantom vezanja su najčešće dobro definirane samo za jedan predznak efektivnog vezanja, koji odabirom konvencije možemo uvijek postaviti da je $g > 0$. To vrijedi kako za konstantu vezanja λ u ϕ^4 teoriji tako i za konstantnu fine strukture α u kvantnoj elektrodinamici.

U limesu u kojem je E toliko velik da je u uglatoj zagradi jedinica zanemariva u odnosu na drugi član, dobijamo

$$g_E \approx \left[(1-k)b \ln \frac{E}{E_0} \right]^{1/(1-k)}$$

Vidimo da se g_0 ne pojavljuje u vodećem članu na visokim energijama, no postoji skala E_0 . Ovo je pojava **dimenzij-ske transmutacije**, koju smo zapazili na primjeru kvantne kromodinamike.

(c) Fiksna točka

Fiksna točka implicira postojanje specifičnog konstantnog rješenja $g_E = g_*$. Ovakva rješenja predstavljaju izuzetni slučaj u kojem renormalizacija ne uvodi energijsku skalu u teoriju pa se za pripadne teorije kaže da su **skalno invarijantne**. U svim poznatim slučajevima skalna invarijantnost implicira postojanje veće grupe prostorno-vremenskih simetrija koja se naziva **konformna simetrija** i čini proširenje Poincaréove grupe. Konformne teorije polja su izuzetno važne u opisu kritičnih pojava i faznih prijelaza, te u perturbativnom opisu teorije struna.

Postojanje fiksne točke dijeli fazni prostor u dva dijela, $g < g_*$ i $g > g_*$. Predznak beta funkcije u ovim intervalima određuje ponašanje renormalizacijske grupe. Na primjer, za slučaj prikazan na slici 5.1, gdje je $\beta(g) > 0$ za $g < g_*$ i $\beta(g) < 0$ za $g > g_*$ možemo zaključiti da u UV limesu ($E \rightarrow \infty$) $g_E \rightarrow g_*$ u oba intervala, pa kažemo da je fiksna točka UV stabilna. Obrnuto, u IR limesu (E se smanjuje) g_E se udaljava od g_* u oba intervala.

Ukoliko je g_* jednostavna nul-točka, tada u okolini fiksne točke ($g \approx g_*$) u najnižem redu vrijedi

$$\beta(g) \approx a(g - g_*) \quad \implies \quad g_E \approx g_* + (g_0 - g_*) \left(\frac{E}{E_0} \right)^a \quad (5.6.12)$$

U primjeru sa slike 5.1 vrijedi da je $a < 0$. Parametar a je jedan od **kritičnih eksponenata** teorije.

(d) Asimptotska sloboda

U ovom slučaju beta funkcija je negativna, što znači da se g_E stalno smanjuje kako E raste. To znači da bez obzira na početni uvjet, tj. iznos od g_0 za neki E_0 , za dovoljno veliki E vrijedit će da je $g_E \ll 1$. Pretpostavimo da je u tom režimu beta funkcija u vodećem redu dana s

$$\beta(g) \approx -b g^n, \quad b > 0$$

Pošto je u praksi vodeći član određen Feynmanovim dijagramima najnižeg reda koji doprinose beta funkciji, slijedi da je $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$ (u većini teorija $n = 2$). Uvrštavanje u (5.6.11) i integriranje daje rješenje:

$$g_E = g_0 \left[1 + (n-1)b g_0^{n-1} \ln \frac{E}{E_0} \right]^{-1/(n-1)}, \quad g_0 \equiv g_{E_0}$$

U limesu $E \rightarrow \infty$ dobijamo

$$g_E \longrightarrow \left[(n-1)b \ln \frac{E}{E_0} \right]^{-1/(n-1)} \quad (5.6.13)$$

Sve dok je $g_E \ll 1$ možemo koristiti ovu aproksimaciju, neovisno o iznosu logaritma. Vidimo da vrijedi

$$\lim_{E \rightarrow \infty} g_E = 0 \quad (5.6.14)$$

što je pojava **asimptotske slobode**. Također vidimo da se u (5.6.13) ne pojavljuje konvencionalno renormalizirana konstanta vezanja g_0 već samo pripadna skala μ_0 , što je pojava **dimenzijske transmutacije**. Obje ove pojave smo vidjeli na primjeru kvantne kromodinamike.

5.7 Anomalni magnetski moment

U odjeljku 4.10.10 pokazali smo da se u nerelativističkom limesu Diracova jednadžba u vanjskom stacionarnom elektromagnetskom polju svodi na jednočestični hamiltonijan:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) - \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \quad , \quad \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad , \quad g = 2$$

gdje je $\mathbf{L}$ orbitalni angularni moment, a $\mathbf{S}$ spin. Parametar g je tzv. g -faktor čestice, koji reprezentira relativnu jakost intrinzičnog magnetskog dipolnog momenta u odnosu na jakost spin-orbita vezanja. Kao što smo već analizirali, iz izraza za hamiltonijan možemo očitati da je jedna posljedica spina postojanje unutrašnjeg magnetskog momenta čestice danog s:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{gq}{2m} \mathbf{S}$$

Vrijednost $g = 2$ je dobijena u klasičnoj aproksimaciji, i, kao što ćemo uskoro vidjeti, postoje korekcije kvantne teorije polja (**radijativne korekcije**) koje čine da iznos od g nije točno 2. Ove korekcije nisu univerzalne i generalno ovise o detaljima kvantne teorije polja koji uključuju i kinetičke parametre (spin i iznosi masa čestica) i dinamičke parametre (vrste međudjelovanja i vrijednosti konstanti vezanja). U ovom odjeljku izračunat ćemo korekciju g za elektron u najnižem redu Feynmanovog računa, koja dolazi od dijagrama s jednom petljom u elektrodinamici. Napomenimo da je ovaj račun u literaturi napravljen u petom redu i da je slaganje teorije i eksperimenta na 11 signifikantnih decimala (što je ujedno i točnost i eksperimenta i teorijskog računa). Ovakvo impresivno slaganje teorije i eksperimenta je unikatno u znanosti i pokazuje koliko je Standardni model fizike elementarnih čestica, a posebno kvantna elektrodinamika, dobar model za opis fundamentalnih prirodnih zakona.

5.7.1 Ekstrahiranje magnetskog momenta

Zbog složenosti računa koji nam slijedi, potrebno je maksimalno pojednostavniti i skratiti sve dijelove računa, kako se ne bi gubilo nepotrebno vrijeme i energija. To znači da je dobra ideja naći način kako direktno izračunati g -faktor bez da moramo raditi nerelativistički limit. Da bi ovo postigli, prisjetimo se kako smo izvukli unutarnji magnetski moment iz Diracove jednadžbe u odjeljku 4.10.10. Ključ je da je on došao od člana $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ u jednadžbi (4.10.46) i da je $g = 2$ bila posljedica toga da je faktor ispred ovog člana $q/2$. Da je faktor bio $g'q/4$, gdje je g' neki realni broj, dobili bi da je $g = g'$. Stoga je spretan i ujedno Lorentz kovarijantan način za izvući doprinose g -faktoru pronaći veličinu za koju drvasti dijagrami daju doprinos proporcionalan veličini $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ i potom izračunati faktor koji se javlja nakon što se uračunaju kvantne korekcije koje dolaze od dijagrama s petljama. Uobičajeno je da se od tog faktora odbije jedinica, koja čini klasični doprinos, i tako dobije veličina koja se naziva **anomalija magnetskog momenta** a koja je povezana s g -faktorom putem relacije:

$$a = \frac{g - 2}{2} \quad (5.7.1)$$

Ova veličina sadrži samo radijativne korekcije unutarnjem magnetskom momentu čestice i stoga predstavlja spretnu parametrizaciju za naš račun.

Najjednostavnija veličina sa svojstvima koja tražimo je 3-točkasta funkcija, koju ćemo označiti s $\mathcal{M}^\mu(p_1, p_2)$, u kojoj dvije on-shell noge pripadaju ulaznom i izlaznom elektronu 4-impulsa p_1 i p_2 , a jedna noga je off-shell foton za koju ćemo uzeti da je amputirana. U drvastoj aproksimaciji ova amplituda je dana s:

$$i\mathcal{M}_0^\mu(p_1, p_2) = \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with two fermion lines (p1, p2) and one photon line (p)} \end{array} = -iq \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \quad (5.7.2)$$

gdje je 4-impuls fotona fiksiran zakonom sačuvanja 4-impulsa pa glasi $p = p_2 - p_1$. On-shell uvjet na fermionske noge znači da su čestice na njima fizikalne što podrazumijeva

$$p_1^2 = m^2 = p_2^2 \quad , \quad (\not{p}_1 - m)u(p_1) = 0 = \bar{u}(p_2)(\not{p}_2 - m) \quad (5.7.3)$$

Ako sad upotrijebimo **Gordonov identitet** koji glasi:

$$\bar{u}(p_2)(p_1 + p_2)^\mu u(p_1) = 2m \bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) + i \bar{u}(p_2)\sigma^{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu u(p_1) \quad (5.7.4)$$

i koji vrijedi za proizvoljne on-shell spinore, vidimo da vrijedi:

$$\mathcal{M}_0^\mu(p_1, p_2) = -q \left(\frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2m} \right) \bar{u}(p_2) u(p_1) - i \frac{q}{2m} \bar{u}(p_2) \sigma^{\mu\nu} p_\nu u(p_1)$$

Prvi član je rezultat koji bi nam dao $(D_\mu)^2$ član (koji bi dobili u skalarnoj elektrodinamici), dok je drugi posljedica toga da imamo spin 1/2 polje. Obratite pažnju da iz antisimetričnosti tenzora $\sigma^{\mu\nu}$ slijedi da možemo pisati:

$$\sigma^{\mu\nu} p_\nu = \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} p_\nu - \sigma^{\nu\mu} p_\nu) \longleftrightarrow \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)|_{\text{amp}} = \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}|_{\text{amp}} \quad (5.7.5)$$

gdje smo koristili korespondenciju $p_\mu \leftrightarrow i\partial_\mu$, koja postoji između amplituda u **p** i **x** prostoru, i gdje "amp" znači da moramo amputirati polje A_μ . Pošto drvasti rezultat mora dati $g = 2$, vidimo da g možemo identificirati s $-4m/q$ puta koeficijent člana $ip_\nu \bar{u}\sigma^{\mu\nu}u$ u izrazu za $\mathcal{M}^\mu$.

Zadatak 5.7.1: Dokažite Gordonov identitet (5.7.4).

Naputak: Koristite (5.7.3).

Koristeći Lorentz kovarijantnost egzaktna amplituda $\mathcal{M}^\mu$ se može raspisati korištenjem form-faktora na sljedeći način:

$$i\mathcal{M}^\mu(p_1, p_2) = \begin{array}{c} p \downarrow \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \nearrow \text{~~~~~} \text{~~~~~} \searrow \\ p_1 \quad \text{~~~~~} \text{~~~~~} p_2 \end{array} = -iq \bar{u}(p_2) \left[f_1 \gamma^\mu + \frac{f_2}{m} p_1^\mu + \frac{f_3}{m} p_2^\mu \right] u(p_1) \quad (5.7.6)$$

Tri bilineara su jedini nezavisni Lorentz 4-vektori (sjetite se da je $p = p_2 - p_1$), a f_j moraju biti skalari pa mogu ovisiti samo o skalarima p^2 , $p_1 \cdot p_2$ i m^2 . No, pošto je $p^2 = 2(m^2 - p_1 \cdot p_2)$ vidimo da se $p_1 \cdot p_2$ može izraziti pomoću p^2 . Pošto je izraz normaliziran tako da su veličine f_j bezdimenzionalne, ove očito mogu ovisiti samo o bezdimenzionalnom omjeru p^2/m^2 .

Sljedeća stvar koju možemo iskoristiti je Wardov identitet:

$$\begin{aligned} 0 = p \cdot \mathcal{M} &= f_1 \bar{u}(p_2) \not{p} u(p_1) + f_2 \frac{(p \cdot p_1)}{m} \bar{u}(p_2) u(p_1) + f_3 \frac{(p \cdot p_2)}{m} \bar{u}(p_2) u(p_1) \\ &= (f_2 - f_3) \frac{(p \cdot p_1)}{m} \bar{u}(p_2) u(p_1) \end{aligned}$$

gdje smo u drugom redu koristili (5.7.3). Rezultat je $f_2 = f_3$. Primjenom toga i Gordonovog identiteta u (5.7.6) slijedi da možemo pisati:

$$\mathcal{M}^\mu(p_1, p_2) = -q \bar{u}(p_2) \left[F_1(p^2/m^2) \gamma^\mu + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2(p^2/m^2) \right] u(p_1) \quad (5.7.7)$$

gdje su F_1 i F_2 tzv. **form faktori**. U izvodu ove formule koristili smo samo Lorentz kovarijantnost i simetriju na paritet za koju znamo da postoji u kvantnoj elektrodinamici.¹⁹ Drvasta aproksimacija (5.7.2) daje $F_1 = 1$ i $F_2 = 0$.

Koji od dva form faktora može doprinositi anomalnom magnetskom momentu? Očito je da F_1 modificira $q\bar{\psi}\not{A}\psi$ vezanje. U stvari, može se zaključiti da se čitav učinak promjene F_1 svodi na renormalizaciju električnog naboja,

¹⁹Da smo ovaj izvod radili u teoriji u kojoj je paritet narušen, pojavila bi se još dva form faktora povezana s bilinearima $\bar{u}\gamma^5 u$ i $\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u$.

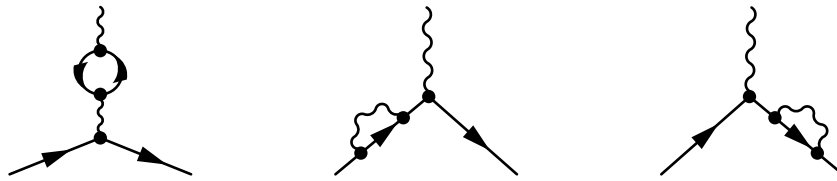
koja, kao što smo vidjeli pri analizi polarizacije vakuuma, čini naboj ovisan o renormalizacijskoj skali. To znači da će taj član uvijek davati doprinos $g = 2$. Anomalni magnetski moment dolazi isključivo od F_2 . Možemo zaključiti da će magnetski moment na skali danoj s p^2 imati g faktor dan s $g = 2 + 2F_2(p^2/m^2)$. Pošto se u eksperimentima obično mjeri magnetski moment na nerelativističkim skalama na kojima je $p^2 \ll m^2$, g faktor koji se uspoređuje s podacima se dobije iz:

$$g = 2 + 2F_2(0) \quad \Longrightarrow \quad a = F_2(0) \quad (5.7.8)$$

gdje je a anomalija magnetskog momenta koju smo definirali u (5.7.1). Dakle, naš zadatak se svodi na izračun form faktora $F_2(0)$.

5.7.2 g -faktor na jednoj petlji

Sada želimo izračunati prvu korekciju anomaliji magnetskog momenta spin 1/2 čestice naboja q i mase m , koja dolazi od dijagrama s jednom petljom. Postoje četiri različita dijagrama ovog tipa. Tri su:



Ovi dijagrami mogu dati samo doprinos proporcionalan γ^μ . To se lako zaključi iz činjenice da ovi dijagrami samo korigiraju propagatore na vanjskim nogama. Stoga ovi dijagrami mogu doprinijeti samo F_1 form faktoru pa ih možemo ignorirati. Preostali dijagram je:

$$i\mathcal{M}_2^\mu(p_1, p_2) = \text{diagram} \quad (5.7.9)$$

i to je jedini dijagram relevantan za račun F_2 . Primjena Feynmanovih pravila na (5.7.9) daje:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2^\mu(p_1, p_2) &= (-iq)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\nu\alpha}}{(k-p_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}(p_2) \gamma^\nu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u(p_1) \\ &= -q^3 \bar{u}(p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\alpha}{[(k-p_1)^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} u(p_1) \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

Proceduru za izvrjednjavanje ovakvih integrala smo objasnili u odjeljku 5.4. Prvi korak je Feynmanov trik (5.4.3) u kojem se dodaje dodatna integracija kako bi se dobila jednostavnija integracija po impulsu u petlji. U ovom slučaju Feynmanov trik se svodi na korištenje

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [yA + (x-y)B + (1-x)C]^{-3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) [xA + yB + zC]^{-3} \end{aligned} \quad (5.7.11)$$

gdje je u našem slučaju

$$A = k^2 - m^2 + i\epsilon, \quad B = (p+k)^2 - m^2 + i\epsilon, \quad C = (k-p_1)^2 + i\epsilon$$

Kratki račun daje:

$$\begin{aligned} xA + yB + zC &= k^2 + 2k \cdot [yp - zp_1] + zp_1^2 + yp^2 + (x + y)m^2 \\ &= [k + yp - zp_1]^2 - \Delta + i\epsilon \end{aligned}$$

gdje je

$$\Delta = (1 - z)^2 m^2 - xy p^2 \quad (5.7.12)$$

i gdje smo koristili on-shell uvjete $p_1^2 = m^2$ i $2p \cdot p_1 = -p^2$. Vidimo da je spretno translirati varijablu integracije na način $k \rightarrow k - yp + zp_1$ tako da nazivnik u razlomku (5.7.11) postaje jednostavno $(k^2 - \Delta)^3$, što je poanta Feynmanovog trika.

Brojnik razlomka u (5.7.10) je pak:

$$\begin{aligned} B^\mu &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu u(p_1) \\ &= -2 \bar{u}(p_2) [\not{k} \gamma^\mu \not{p} + \not{k} \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)] u(p_1) \end{aligned}$$

Translacija $k \rightarrow k - yp + zp_1$, te potom korištenje (5.4.16) i (5.4.17) tako da unutar integrala možemo primijeniti $k_\mu k_\nu = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} k^2$ i odbaciti članove linearne u k , te primjena Gordonovog identiteta nakon nešto duljeg računa daju

$$\begin{aligned} B^\mu &= [k^2 - 2(1 - x)(1 - y)p^2 - 2(1 - 4z + z^2)m^2] \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \\ &\quad - i2mz(1 - z)p_\nu \bar{u}(p_2) \sigma^{\mu\nu} u(p_1) + 2m(2 - z)(x - y)p^\mu \bar{u}(p_2) u(p_1) \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

Dobili smo tri nezavisna člana umjesto dva jer nismo koristili Wardov identitet. S druge strane, Wardov identitet bi račun morao dati sam po sebi bez da ga namećemo kao dodatni uvjet. Idemo sad pokazati da je to stvarno tako. U tu svrhu uočite da posljedni član u (5.7.13) daje sljedeći doprinos 3-točkastoj funkciji:

$$i4q^3 m p^\mu \bar{u}(p_2) u(p_1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) \frac{(2 - z)(x - y)}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3}$$

Koristeći (5.7.12) vidimo da je u integraciji po Feynmanovim parametrima podintegralna funkcija antisimetrična na zamjenu $x \leftrightarrow y$, pa integral iščezava. Dakle, možemo obrisati treći član u (5.7.13).

U skladu s diskusijom iz prošlog odjeljka, za potrebe računanja anomalnog magnetskog momenta treba nam samo član proporcionalan $p_\nu \sigma^{\mu\nu}$. Uvrštavanjem dobijenih rezultata za brojnik (5.7.13) i nazivnik u (5.7.10) dobijamo:

$$\mathcal{M}_2^\mu = 4q^3 m p_\nu \bar{u}(p_2) \sigma^{\mu\nu} u(p_1) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) z(1 - z) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} + \dots$$

gdje je Δ dan u (5.7.12). Koristeći (5.7.7) iz gornje relacije možemo očitati doprinos form faktoru F_2 na jednoj petlji:

$$F_2(p^2) = i \frac{2m}{q} (4q^3 m) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) z(1 - z) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} + O(q^4)$$

Integral po k možemo izvrjedniti primjenom tehnika iz odjeljka 5.4. No, taj integral je već bio dan za domaću zadaću i rezultat je dan u (5.4.21). Pošto je integral konvergentan, možemo odmah uzeti $d = 4$:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = -\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta}$$

Uvrštavanje u formulu iznad daje:

$$F_2(p^2) = n^2 \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) \frac{z(1 - z) m^2}{(1 - z)^2 m^2 - xy p^2} + O(\alpha^2)$$

gdje smo naboj čestice napisali kao $q = ne$, imajući u vidu da je za elementarne čestice n reda veličine 1. Posebno nas zanima iznos u $p^2 = 0$. U tom slučaju gornja integracija postaje trivijalna:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= n^2 \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(x+y+z-1) \frac{z}{1-z} + O(\alpha^2) \\ &= n^2 \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} + O(\alpha^2) = n^2 \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^z dy \frac{z}{1-z} + O(\alpha^2) \\ &= n^2 \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

Uvrštavanje ovog rezultata u (5.7.1) i (5.7.8) daje konačni rezultat za anomaliju magnetskog momenta i g -faktor u prvom redu računa smetnje:

$$a = F(0) = n^2 \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) \quad \Longleftrightarrow \quad g = 2 + n^2 \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2) \quad (5.7.14)$$

U slučaju elektrona, koji ima $n = -1$, u prvom redu računa smetnje anomalija magnetskog momenta je

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001161 \dots$$

Ovaj rezultat je prvi točno izračunao Schwinger 1948. godine. Njegov rezultat je bio u izvrsnom slaganju s tada najtočnijim (indirektnim) mjerenjima (Kusch i Foley, 1947.) koja su davala $a_e = 0.00118(3)$.

Zbivanja vezana oko računanja anomalnog momenta elektrona nude izuzetno važnu povijesnu lekciju. U vrijeme Schwingerovog računa tehnike računanja (i općenito razumijevanje) kvantne teorije polja, bile su još u povojima. Još uvijek se koristila "staromodna" perturbativna teorija u kojoj su računi grozomorno komplicirani i postojalo je puno grešaka u tadašnjim izračunima i objavljenim radovima, što je unosilo dodatnu konfuziju u već konfuzno okruženje. Teorija renormalizacije još nije postojala i UV beskonačnosti su predstavljale veliku zapreku za razvoj teorije. To je dovelo do toga da je većina razvikanih teoretičara odbacila ideju da se problemi mogu riješiti unutar kvantne teorije polja i krenula u potragu za potpuno novim idejama. Schwingerov rezultat, skupa s nekim drugim koji su se dogodili u isto vrijeme (izračun Lambovog pomaka, razvoj ideje teorije renormalizacije, metoda Feynmanovih dijagrama i dr.) vratio je vjeru znanstvene zajednice u kvantnu teoriju polja što se pokazalo kao pravi put. Interesantno je da je tu vjeru vratila nova generacija fizičara (Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson i dr.) koja je nastavila raditi na unapređivanju metoda kvantne teorije polja, i čiji "znanstveni konzervativizam" se pokazao ispravnom filozofijom.

5.7.3 Usporedba teorije i eksperimenta. Testovi preciznosti teorije

Feynmanovo otkriće tehnike Feynmanovih dijagrama omogućilo je strahovito olakšavanje i ubrzavanje računanja i uvelike doprinijelo ovom razvoju. Što se anomalije magnetskog momenta elektrona tiče, i eksperimenti i teorija su se brzo razvijali i danas daju najtočnija mjerenja i izračune u fizici uopće. Važnost preciznih eksperimenata je da testiraju postojeće teorije i, u slučaju neslaganja teorije i eksperimenta, indirektno ukazuju na postojanje nove fizike izvan Standardnog modela. Obrnuto, slaganje između teorije i eksperimenta ograničava moguća proširenja teorije novom fizikom. Poanta je da zakoni kvantne mehanike omogućavaju da testiramo fiziku vrlo visokih energija tako da vrlo precizno mjerimo pojave na niskim energijama.

Trenutni najprecizniji rezultati direktnih mjerenja magnetskog momenta elektrona (iz 2011.g.) kažu da je

$$(a_e)_{\text{eksp}} = 0.001\,159\,652\,180\,73 \quad (28)$$

Teorijski izračun je napravljen do reda α_e^5 u računu smetnje (tj. do 5 petlji) i glasi:

$$(a_e)_{\text{teor}} = 0.001\,159\,652\,181\,78 \quad (77)$$

Slaganje između teorije i eksperimenta je spektakularno, u **11 signifikantnih znamenki** (što je ujedno i preciznost oba rezultata)!!! U teorijskom rezultatu, na ovoj preciznosti, osim elektrodinamike moraju se uključiti i kvantne

korekcije koje dolaze od jakih i slabih sila, za izračun kojih se koristi Standardni model fizike čestica.²⁰ Stoga možemo zaključiti:

Ovo slaganje predstavlja ne samo izuzetno snažnu potvrdu opisa elektromagnetskih pojava putem kvantne elektrodinamike već i potvrdu Standardnog modela fizike čestica u širokom rasponu energija i pojava.

Magnetski momenti drugih čestica su također predmet stalnog teorijskog i eksperimentalnog istraživanja. U tom smislu, nakon elektronskog, najtočnije je poznat iznos magnetskog momenta miona (također leptonska čestica, slična elektronu). Najprecizniji eksperimentalni rezultat (BNL, 2001.) daje:

$$(a_\mu)_{\text{eksp}} = 0.001\,165\,920\,91 \quad (54)(33)$$

S druge strane, najnoviji teorijski izračun (HLMNT, 2011.), koristeći Standardni model, daje:²¹

$$(a_\mu)_{\text{teor}} = 0.001\,165\,918\,04 \quad (51)$$

Čitatelja može iznenaditi zašto teorijski rezultat ima bitno veću pogrešku od onoga za elektron, a radi se o "sličnim" česticama koje na jednak način ulaze u lagranžijan Standardnog modela. Razlog je u tome što je mion ipak bitno masivniji od elektrona, $m_\mu/m_e \approx 210$, pa su hadronski i slabi doprinosi znatno veći, a to unosi i veću pogrešku.

Ono što treba uočiti je da postoji neslaganje između predikcije Standardnog modela i eksperimenta:

$$\Delta a_\mu = (28 \pm 10) \times 10^{-10} \quad (5.7.15)$$

koje je 3.4σ . Ovo neslaganje je izazvalo veliko zanimanje jer sugerira postojanje nove fizike izvan Standardnog modela. No, treba odmah reći da se u fizici čestica tvrdnje koje imaju statističku težinu manju od 5σ ne uzimaju kao konkluzivni dokazi, tako da je ovo pitanje još "u zraku". Upravo su u tijeku pripreme za novi eksperiment koji će točnije izmjeriti magnetski moment miona (Mion $g - 2$, FNAL), a u tijeku su i eksperimenti koji trebaju smanjiti grešku u određivanju hadronskih doprinosa koji ulaze u teorijski izračun. Napomenimo da je informacija koja se dobija iz anomalije magnetskog momenta miona komplementarna mjerenjima na LHC sudaraču.

Demonstracija procedure izvlačenja zaključaka o novoj fizici predmet je sljedećeg zadatka (koji nije jednostavan).

Zadatak 5.7.2: $g_\mu - 2$ anomalija. U **supersimetričnim teorijama** (SUSY) svaki fermion ima svog skalarnog partnera, a svaki baždarni bozon spin 1/2 fermionskog partnera. Na primjer, partner elektrona (e) je *selektron* ($\tilde{e}$), miona (μ) *smion* ($\tilde{\mu}$), dok je partner fotona (A_μ) *foto* ($\tilde{A}$). Pretpostavite da lagranžijan dobija sljedeće dodatne članove:

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{2}(D_\nu \tilde{e})^2 + m_{\tilde{e}} \tilde{e}^2 + q \tilde{e} \tilde{e} \tilde{A} + \tilde{A}(\not{\partial} + m_{\tilde{\gamma}})\tilde{A} + \frac{1}{2}(D_\nu \tilde{\mu})^2 + m_{\tilde{\mu}} \tilde{\mu}^2 + q \tilde{\mu} \tilde{\mu} \tilde{A}$$

čiji oblik i konstante vezanja su diktirani supersimetrijom. S q smo označili naboj elektrona (koji smo označavali s $(-e)$), ali sada izbjegavamo zbog moguće konfuzije s elektronskim poljem e). Kovarijantna derivacija je $D_\nu = \partial_\nu + iqA_\nu$. Egzaktna SUSY bi zahtijevala da su mase partnerskih čestica jednake, $m_{\tilde{e}} = m_e$, $m_{\tilde{\mu}} = m_\mu$, $m_{\tilde{\gamma}} = 0$, no ovdje dopuštamo da to nije nužno tako (tzv. **meki lom** SUSY, kojeg zahtijeva fenomenologija).

- Izračunajte doprinos magnetskom momentu miona na jednoj petlji u kojoj kruži smion.
- Koristeći rezultat iz (a) podzadatka i (5.7.15) pronađite ograničenje na masu smiona u okviru gornjeg proširenja Standardnog modela.
- Pretpostavite da su mase svih supersimetričnih partnera koje smo dodali istog reda veličine, $m_{\tilde{\gamma}} \sim m_{\tilde{\mu}} \sim m_{\tilde{e}} \sim M_{\text{SUSY}}$, gdje je M_{SUSY} supersimetrična skala. Koje ograničenje na M_{SUSY} postavlja (5.7.15)?

²⁰Glavni dio pogreške u teorijskom izrazu dolazi od eksperimentalne pogreške u poznavanju konstante fine strukture (koja je potrebna za dobivanje numeričke vrijednosti) i neodređenosti u poznavanju veličina u sektoru jakih sila. U stvari, danas se rezultat za $g - 2$ uzima da bi se definirala vrijednost konstante fine strukture, $\alpha^{-1} = 137.035\,999\,139(31)$.

²¹Postoji nekoliko teorijskih izračuna koji svi, osim jednoga, daju vrlo sličan rezultat.

5.8 Renormalizacija mase elektrona*

Sad ćemo se vratiti na pitanje s kojim smo počeli analizu renormalizacije, a to je kako međudjelovanje čestice "sa samom sobom" utječe na svojstva čestice, kao što je masa. Ponovo ćemo se fokusirati na primjer spinorne kvantne elektrodinamike i ograničiti se na račun na jednoj petlji, što znači da nas zanima utjecaj sljedećeg dijagrama:



koji je poznat kao **vlastita energija elektrona**. Ovaj dijagram korigira propagator elektrona na sličan način kao što vlastita energija fotona korigira fotonski propagator. Vidjeli smo da korekcija fotonskog propagatora može biti promatrana kao efekt polarizacije vakuuma koji utječe na efektivni potencijal kojim međudjeluju dvije električki nabijene čestice i čini da on odstupa od Coulombovog na malim udaljenostima. Razlog je da se međudjelovanje u kvantnoj teoriji polja može shvatiti kao izmjena virtualnih čestica, što u kvantnoj elektrodinamici znači virtualnih fotona.

Na sličan način treba očekivati da će vlastita energija elektrona utjecati na procese koji se u Feynmanovom računu zbivaju uslijed izmjene spin 1/2 fermiona. No, ovaj učinak se u elektrodinamici ne može interpretirati kao efektivni potencijal pa treba naći drugu mjerljivu veličinu koja se može iskoristiti za potrebe renormalizacije. Jedna takva mjerljiva veličina bi mogla biti **Lambov pomak**, koji smo spomenuli u odjeljku 5.5.3. No, iako je povezivanje sa specifičnim direktno mjerljivim veličinama fizikalno interesantno jer se specifični učinci onda mogu eksperimentalno provjeravati, ovaj pristup ima teoretskih manjkavosti. Najvažnija zamjerka je da mi želimo biti sigurni da nakon renormalizacije dobijamo teoriju koja daje **konačne** predikcije za **sve** fizikalno mjerljive veličine, što ne možemo biti ako smo se u početku ograničili na nekoliko specifičnih mjerljivih veličina. U tu svrhu treba u startu postupka renormalizacije imati na umu dovoljno široku klasu mjerljivih veličina. Jedna takva klasa je S-matrica koja sadrži informaciju o ishodu svih mogućih raspršenja čestica unutar dane teorije.²²

U stvari, u procesu renormalizacije najspretnije rješenje je odmaknuti se od korištenja direktno mjerljivih veličina i razmotriti fundamentalne gradivne elemente teorije. U slučaju kvantnih teorija polja najspretnije je uzeti vremenski uređene korelacijske funkcije polja, koje sadrže informaciju o S-matrici, ali i puno više od toga:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \cdots \phi_n(x_n) \} | \Omega \rangle$$

gdje su $\phi_r(x)$ proizvoljna renormalizirana polja u teoriji. Ove korelacijske funkcije, koje se često nazivaju **Greenove funkcije**, u pravilu nisu mjerljive i u pravilu nisu ni baždarno invarijantne. Ono što želimo pokazati je da se **sve** UV divergencije mogu maknuti iz **svih** Greenovih funkcija putem procesa renormalizacije. Jednom kad se to postigne, automatski slijedi da su S-matrica i sve druge mjerljive veličine koje se mogu dobiti iz Greenovih funkcija slobodne od UV divergencija.

Ogromna prednost korištenja Greenovih funkcija postaje jasna kad se sjetimo da su one u Feynmanovom računu reprezentirane off-shell dijagramima, što znači da se Greenove funkcije nalaze kao unutarnji poddijagrami u dijagramima koji pripadaju Greenovim funkcijama s većim brojem nogu. Ovo ima dvije važne posljedice: (i) U proceduri renormalizacije možemo se ograničiti na doprinos **1-čestično ireducibilnih dijagrama** (1PI) koji se definiraju tako da se ne mogu razdvojiti na dva dijela brisanjem bilo koje linije. Dijagrami koji nisu 1PI se dobiju jednostavnim spajanjem 1PI dijagrama, a to ne može proizvesti novu klasu beskonačnosti. (ii) Regularizacija nižih Greenovih funkcija automatski radi djelomičnu ili potpunu regularizaciju viših Greenovih funkcija. U stvari, vidjet ćemo da postoji klasa kvantnih teorija polja, u koje spada i kvantna elektrodinamika, u kojoj su sve beskonačnosti generirane konačnim brojem Greenovih funkcija, koje kad se jednom riješe ostavljaju sve Greenove funkcije slobodnima od UV beskonačnosti.

U ostatku odjeljka oznaka $\langle \cdots \rangle$ označava $\langle \Omega | T \{ \cdots \} | \Omega \rangle$.

²²U teorijama s bezmasenim česticama, S-matrice sadrže tzv. infracrvene (IR) divergencije, što smo već uočili na primjeru elektrodinamike. No, ove divergencije imaju sasvim drugu prirodu od ultraljubičastih (UV) divergencija, stoga i svoj način rješavanja. Zainteresirani čitatelj može naći više o infracrvenim divergencijama u dopunskoj literaturi (npr. Weinberg II).

5.8.1 Vakuumske očekivane vrijednosti polja

Za početak razmotrimo najjednostavniju vrstu Greenovih funkcija sa samo jednim poljem poput:

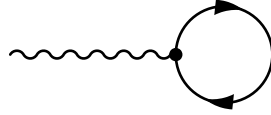
$$\langle \varphi(x) \rangle, \quad \langle A_\mu(x) \rangle, \quad \langle \psi(x) \rangle$$

koje se nazivaju **vakuumske očekivane vrijednosti** polja. Ove veličine su kvantna varijanta iznosa polja u vakuumu u klasičnoj teoriji. Po definiciji, drvasta aproksimacija mora davati klasične vrijednosti. Slobodne teorije polja smo definirali tako da klasične vakuumske vrijednosti polja iščezavaju, pa u drvastoj aproksimaciji vrijedi

$$\langle \varphi(x) \rangle_0 = \langle A_\mu(x) \rangle_0 = \langle \psi(x) \rangle_0 = 0$$

Lako je vidjeti da to isto vrijedi za kvantizirana slobodna polja zbog $a_{\mathbf{p}\sigma}|0\rangle = 0 = \langle 0|a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$.

Uvođenje međudjelovanja može dovesti do dva efekta: (1) promjena svojstava vakuuma u klasičnoj teoriji, (2) kvantni doprinosi višeg reda unose korekcije i u vakuumske očekivane vrijednosti. Što se (1) tiče mi smo do sada, implicitno ili eksplicitno, pretpostavljali da međudjelovanja ne dovode do promjene svojstava vakuuma u klasičnoj teoriji, tj. da vakuum ostaje jedinstven i da možemo definirati elementarna polja koja zadovoljavaju $\phi(x)_{\text{vac}} = 0$. To ćemo zasad i dalje pretpostavljati. Ostaje pitanje (2). Na primjer, u kvantnoj elektrodinamici postoji dijagram s jednom petljom:



Dijagrami ove vrste se nazivaju **punoglavci** (eng. *tadpole*). Pitanje je mogu li ovakvi dijagrami, i slični višeg reda, učiniti neke od vakuumskih očekivanih vrijednosti neiščezavajućima?

O ovom pitanju puno toga za reći imaju simetrije. Ako upotrijebimo simetriju na translacije u prostor-vremenu dobijamo:

$$\langle \Omega | \phi_r(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \phi_r(0) e^{-iP \cdot x} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \phi_r(0) | \Omega \rangle$$

gdje smo pretpostavili da je $P_\mu | \Omega \rangle = 0$, odnosno da je vakuum invarijantan na translacije u prostor-vremenu što je standardna pretpostavka koju smo koristili puno puta tokom kolegija (vakuum uvijek "izgleda isto"). Ukoliko je teorija relativistička, možemo upotrijebiti simetriju na Lorentzove transformacije i dobiti:

$$\langle \phi_r(0) \rangle = \langle U(\Lambda) \phi_r(0) U(\Lambda)^\dagger \rangle = \sum_s \mathcal{D}_{rs}(\Lambda) \langle \phi_s(0) \rangle$$

gdje su $\mathcal{D}_{rs}$ matrice koje reprezentiraju Lorentzove transformacije na poljima, i gdje smo ponovo pretpostavili da je vakuum invarijantan na Lorentzove transformacije, $U(\Lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$. Za polja koja se transformiraju netrivialno, što znači sva polja osim onih spina 0, gornja relacija implicira da vakuumske očekivane vrijednosti iščezavaju. To na primjer znači da za spin 1 i spin 1/2 polja vrijedi:

$$\langle A_\mu(x) \rangle = 0 = \langle \psi(x) \rangle$$

i slično za polja spina $s > 1$. Posljedica je da znamo da punoglavčev dijagram za foton iščezava, bez da smo morali računati. Uočite da su te relacije egzaktna i stoga vrijede u svim redovima računa smetnje.

Što se tiče skalarnih polja (spin 0), situacija je složenija jer Poincaréova simetrija ne daje ograničenja i *a priori* sve je moguće. Naravno, mogu postojati dodatne simetrije koje daju nova ograničenja. Na primjer, u teorijama u kojima postoji kontinuirana **ne-Abelova** grupa unutarnjih simetrija G reprezentirana unitarnim operatorima $U(g)$, $g \in G$, vrijedi

$$\langle \varphi_r(x) \rangle = \langle U(g) \varphi_r(x) U(g)^\dagger \rangle = \sum_s \mathcal{U}_{rs}(g) \langle \varphi_s(x) \rangle$$

gdje matrice $\mathcal{U}_{rs}(g)$ reprezentiraju grupu G na poljima i gdje smo ponovo pretpostavili da je **vakuu invarijantan** na djelovanje simetrija, $U(g)|\Omega\rangle = 0$. Gornja relacija implicira da sva skalarna polja za koja su matrice $\mathcal{U}_{rs}(g)$ netrivialne (nisu jednake 1) moraju imati iščezavajuće vakuumske očekivane vrijednosti, $\langle\varphi_r\rangle = 0$.

Napomenimo ovdje da se pojava u kojoj vakuum nije jedinstven jer nije invarijantan na djelovanje svih simetrija teorije naziva **spontani lom simetrije**. Treba reći da je spontani lom unutarnjih simetrija izuzetno važna tema. Spontani lom prostorno-vremenskih simetrija (točnije, rotacijske simetrije) je prisutan u pojavi **feromagnetizma**, dok se spontani lom lokalnih unutarnjih simetrija javlja u sektoru slabih sila Standardnog modela (**Higgsov mehanizam**) i u pojavi **supravodljivosti**.²³ Spontani lom simetrije najčešće ima klasično porijeklo, no postoje situacije u kojima može biti generiran kvantnim efektima (**Coleman-Weinberg mehanizam**).

Pošto ćemo se ovdje baviti spinornom elektrodinamikom, u kojoj postoje samo polja spina 1/2 i 1, (neslomljena) Poincaréova simetrija implicira da vakuumske očekivane vrijednosti elementarnih polja iščezavaju i stoga nema nikakvih UV divergencija o kojima bi trebalo brinuti. Stoga treba preći na Greenove funkcije višeg reda, a prve sljedeće su one s dvije noge. Pošto smo već prije renormalizirali fotonski propagator na jednoj petlji, i pošto propagator $\langle\psi A_\mu\rangle$ očito iščezava²⁴, preostaje nam da razmotrimo samo elektronski propagator.

5.8.2 Vlastita energija elektrona

Kao i prije, praktičnije je raditi analizu u p -prostoru, pa definiramo Fourierov transformat:

$$\langle\Omega|T\{\psi(x)\psi(y)\}|\Omega\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{G}(p) \quad (5.8.1)$$

gdje smo upotrijebili činjenicu da Lorentz kovarijantnost i paritet, koje su simetrije u QED, garantiraju da se p u gornjem izrazu može pojaviti samo u kombinaciji $\not{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$. Na drvastoj razini G je jednak propagatoru za slobodna polja:

$$i \tilde{G}_0(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv \frac{i}{\not{p} - m}$$

Korekcija jedne petlje dolazi od dijagrama vlastite energije, za koji Feynmanova pravila daju:

$$i \tilde{G}_2(p) = \text{diagram} = i \tilde{G}_0(p) [i \Sigma_2(p)] i \tilde{G}_0(p) \quad (5.8.2)$$

gdje je, koristeći Feynmanovo baždarenje:

$$i \Sigma_2(p) = (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \gamma_\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{-i}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (5.8.3)$$

Prije prelaska na računanje ovog dijagrama, uočimo zanimljivo svojstvo koje nije bilo prisutno u slučaju fotonskog propagatora. Ukupni elektronski propagator je:

$$i \tilde{G}(p) \equiv \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + O(e^4) = \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \Sigma_2(p) \frac{i}{\not{p} - m} + O(e^4) \quad (5.8.4)$$

²³Za relativističke teorije u kojima vakuum nije Lorentz invarijantan kažemo da je Lorentzova simetrija spontano slomljena. Ovakve teorije zasad nisu igrale neku važniju ulogu u fizici.

²⁴Ova tvrdnja se može argumentirati na dva načina. Jedan je da ne postoje dijagrami koji bi doprinosili ovoj Greenovoj funkciji, pa ona perturbativno mora iščezavati. Drugi koristi Poincaré kovarijantnost, i oslanja se na činjenicu da operator ψA_μ nije skalar.

Ako razmotrimo neki S-matrični element, ova korekcija se može pojaviti na vanjskoj nogi elektrona i po LSZ formuli treba biti pomnožena s inverzom slobodnog propagatora $(\not{p} - m)$. Iz (5.8.4) ispada kao da bi nakon tog množenja S-matrika trebala biti singularna u $p^2 = m^2$, što je besmislica. Kao što ćemo vidjeti, odgovor leži u renormalizaciji parametara teorije – m koji se pojavljuje u (5.8.4) je **gola masa** koja se pojavljuje u lagranžijanu, dok je m koji se javlja u LSZ formuli **fizikalna masa**, i te dvije veličine se razlikuju. Ubrzo ćemo se vratiti na ovo pitanje.

Vlastita energija na jednoj petlji

Vratimo se sada na izraz (5.8.3) koji ćemo izračunati primjenom tehnika iz odjeljka 5.4. Primjena Feynmanovog trika daje

$$\begin{aligned} i\Sigma_2(\not{p}) &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2\not{k} - 4m}{[(k - xp)^2 - (1-x)(m^2 - xp^2) + i\epsilon]^2} \\ &= e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx [(d-2)x\not{p} - dm] \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} [k^2 - \Delta + i\epsilon]^{-2} \end{aligned} \quad (5.8.5)$$

gdje smo u drugom redu napravili translaciju u varijabli integracije $k \rightarrow k + xp$, odbacili potom članove neparne u k i definirali Δ kao:

$$\Delta \equiv (1-x)(m^2 - xp^2) \quad (5.8.6)$$

Integral po k je očito divergentan, i to logaritamski, pa ga treba regularizirati. Ponovo ćemo upotrijebiti dimenzij-sku regularizaciju i čitatelj koji je pažljivo prošao kroz račun za polarizaciju vakuumu bi bez većih problema trebao dobiti sljedeći rezultat:

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2-\epsilon)x\not{p} - (4-\epsilon)m] \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{(1-x)(m^2 - xp^2)} \right\} \quad (5.8.7)$$

gdje je, kao i prije, $\epsilon = 4 - d$ i $\bar{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu$, gdje je μ proizvoljna skala koja se pojavljuje uslijed toga što lagranžijanska konstanta vezanja e nije bezdimenzionalna u $d \neq 4$, pa se reparametrizira u bezdimenzionalnu na način $e^2 \rightarrow e^2 \mu^\epsilon$. Uočite da je struktura UV divergencije oblika:

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\not{p} - 4m}{2\epsilon} + (\text{konačni dio}) \right) \quad (5.8.8)$$

Renormalizacija

Kao što smo spomenuli, mi želimo Greenovu funkciju (5.8.1) učiniti konačnom. To znači da kroz renormalizaciju moramo ukloniti beskonačnost koju smo upravo izračunali. Da bi to postigli, moramo razmotriti lagranžijan teorije i istražiti koje parametre u teoriji treba renormalizirati za poništenje beskonačnosti u izrazu za vlastitu energiju. Sjetimo se da je lagranžijan spinorne kvantne elektrodinamike dan s:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m_B\bar{\psi}\psi - e_B\bar{\psi}\not{A}\psi \quad (5.8.9)$$

U računu za vakuumsku polarizaciju vidjeli smo da je e_B , kojeg smo zvali **goli naboj**, potrebno renormalizirati kako bi se poništila beskonačnost koja dolazi od dijagrama s jednom petljom na način da se uvede konačan **renormalizirani naboj** e_R takav da je:

$$e_B^2 = e_R^2 + e_R^4 \Pi_2(p_0^2) + O(e_R^6) = e_R^2 \left(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots \right)$$

gdje je p_0^2 renormalizacijska skala, a $\Pi_2(p_0^2)$ je formalno beskonačan. Pošto je e_B već renormaliziran, ne možemo ga koristiti ponovo u te svrhe. Sljedeći parametar koji imamo na raspolaganju je **gola masa**, m_B . U stvari, pošto je u (5.8.4) $m = m_B$, vidimo da (beskonačna) redefinicija $m_B = m_R + \Delta m$ s Δm proporcionalan e^2 može kompenzirati

beskonačnost reda e^2 u $\tilde{G}_2$. Nažalost, iz (5.8.8) je očito da Σ_2 posjeduje dva tipa beskonačnosti, jednu neovisnu o p i jednu proporcionalnu $\not{p}$. Renormalizacija mase može ukloniti samo jednu od ove dvije beskonačnosti. Treba nam dakle (bar) još jedan renormalizacijski parametar, no nije očito gdje ga naći jer parametara u lagranžijanu naizgled više nema.

U stvari to je samo privid jer postoji još jedan parametar u lagranžijanu, koji je doduše skriven, a to je **normalizacija polja**. Polje ψ u lagranžijanu (5.8.9) je **golo polje**, $\psi = \psi^B$ koje je kanonski normalizirano tako da je kinetički član pomnožen faktorom 1. Kao i u slučaju parametara u lagranžijanu, ništa nam ne garantira da je ovo polje konačno, tj. postoji mogućnost da kvantne korekcije (tj. petlje) zahtijevaju definiciju **renormaliziranog polja** ψ_R na način:

$$\psi^R(x) = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \psi^B$$

gdje beskonačnosti u koeficijentu Z_2 krata beskonačnosti u golom polju.²⁵ Usput, ova relacija je povijesno dovela do naziva *renormalizacija*.

Na drvastoj razini, vidjeli smo u računima da je $Z_2 = 1$. Uključivanje radijativnih korekcija vodi na odstupanje koje ćemo označiti s δ_2 :

$$Z_2 = 1 + \delta_2$$

i nazivati ga **kontračlan**. Očekujemo da je δ_2 proporcionalan s e^2 . Na sličan način ćemo pisati:

$$m_B = Z_m m_R, \quad Z_m = 1 + \delta_m$$

gdje je δ_m maseni kontračlan. Vidimo da će vrijediti:

$$m_B = m_R + m_R \delta_m$$

Korištenje kontračlanova će se pokazati ekstremno učinkovitim u računu.

Kada računamo Greenove funkcije, moramo voditi računa da polja koja ulaze u njih budu renormalizirana, a ne gola. Stoga moramo razlikovati gole i renormalizirane Greenove funkcije:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \psi^B(x) \bar{\psi}^B(y) \} | \Omega \rangle &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}^B(\not{p}) \\ \langle \Omega | T \{ \psi^R(x) \bar{\psi}^R(y) \} | \Omega \rangle &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}^R(\not{p}) \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

i očekujemo da je $\tilde{G}^R(\not{p})$ konačna. Iz gornjih definicija slijedi:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^R(\not{p}) &= \frac{1}{Z_2} \tilde{G}^B(\not{p}) = \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - m_B} + (\text{petlje}) \\ &= \frac{1}{1 + \delta_2} \frac{i}{\not{p} - m_R - \delta_m m_R} + (\text{petlje}) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_R} + \frac{i}{\not{p} - m_R} i [\delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m) m_R] \frac{i}{\not{p} - m_R} + (\text{petlje}) + O(e^4) \end{aligned} \quad (5.8.11)$$

Nakon što izvučemo iz doprinosa petlji onaj s jednom petljom, koji je dan s:

$$\tilde{G}_2^R(\not{p}) = \frac{1}{Z_2} \tilde{G}_2^B(\not{p}) = \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - m_B} [i \Sigma_2(\not{p})] \frac{i}{\not{p} - m_B}$$

(5.8.11) možemo napisati kao:

$$\tilde{G}^R(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_R} + \frac{i}{\not{p} - m_R} i [\delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m) m_R + \Sigma_2(\not{p})] \frac{i}{\not{p} - m_R} + O(e^4)$$

²⁵Indeks 2 u nazivu Z_2 nema nikakve veze s redom u perturbativnom razvoju, to je samo ime ove veličine.

Uvrštavanje (5.8.8) u gornji izraz pokazuje da možemo maknuti sve beskonačnosti iz G^R pametnim odabirom δ_2 i δ_m . Točnije, ako odaberemo:

$$\delta_2 = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{2}{\epsilon}, \quad \delta_m = -\frac{3\alpha}{4\pi} \frac{2}{\epsilon} \quad (5.8.12)$$

beskonačnosti će se poništiti i $\tilde{G}^R(p)$ će biti konačna za svaki izbor impulsa p do reda α (do jedne petlje).

Naravno, osim (5.8.12) δ_2 i δ_m mogu sadržavati i članove koji su konačni. Odabir konačnih doprinosa u parametrima renormalizacije se naziva **recept za oduzimanja** (eng. *subtraction scheme*). Mjerljive veličine ne ovise o izboru recepta, no svejedno postoje spretniji i manje spretni izbori tako da se u praksi obično koristi samo nekoliko različitih prijepisa. Dva recepta za oduzimanja koja se najčešće koriste u literaturi su **on-shell recept** i **recept minimalnog oduzimanja**, ili kraće MS recept (eng. *minimal subtraction*).

MS je najjednostavniji recept i stoga se i najčešće primjenjuje u praksi. Definira se na način da konačni članovi u oduzimanju ne postoje, tako da su formule (5.8.12) napisane u MS receptu. Postoji podvarijanta MS prijepisa, koja se naziva $\overline{\text{MS}}$ recept, u kojoj se uključeni i konačni članovi koji točno poništavaju 4π i γ_E doprinose (koje smo u (5.8.7) utrpali u $\bar{\mu}$) tako da u regulariziranim amplitudama umjesto $\bar{\mu}$ imamo μ .

U on-shell receptu renormalizirana masa m_R se identificira s fizikalnom masom čestice m_{fiz} , određenom mass-shell uvjetom $p^2 = m_{\text{fiz}}^2$ koji zadovoljavaju 4-impulsi svih mjerenih čestica dane vrste. Iz LSZ formule znamo da će se fizikalna masa manifestirati kao pol u Greenovim funkcijama u p prostoru i to je najlakši način za njeno računanje.²⁶

5.8.3 Pol masa – fizikalna masa

Razmotrimo sada Greenovu funkciju $\tilde{G}(p)$ sumiranu u svim redovima perturbativnog računa, što znači sumu svih Feynmanovih dijagrama koji joj doprinose. Ovdje se isplati upotrijebiti koncept koji smo spomenuli na početku ovog odjeljka, a to je 1-čestično ireducibilni (1PI) dijagrami. 1PI dijagram je onaj koji se ne može razdvojiti u dva odvojena dijela rezanjem neke unutarnje linije. Na primjer, od dva sljedeća dijagrama koji doprinose $\tilde{G}(p)$ na tri petlje:



lijevi je 1PI, ali desni nije jer rezanje fermionske linije označene s x cijepa dijagram u dva dijela. Definiramo 1PI Greenovu funkciju Σ kao zbroj 1PI dijagrama, s tim da su vanjske noge amputirane. 1PI Greenove funkcije označavat ćemo kao:

$$\Sigma = \text{(1PI)}$$

Koristeći 1PI Greenovu funkciju $\Sigma(p)$, tj. vlastitu energiju, možemo Greenovu funkciju (5.8.4) napisati kao:

$$\begin{aligned} i\tilde{G}^B(p) &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{(1PI)} \xrightarrow{p} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{(1PI)} \xrightarrow{p} \text{(1PI)} \xrightarrow{p} \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_B} + \frac{i}{\not{p} - m_B} i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_B} + \frac{i}{\not{p} - m_B} i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_B} i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_B} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_B} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\Sigma(p)}{\not{p} - m_B} \right)^n = \frac{i}{\not{p} - m_B} \left(1 + \frac{\Sigma(p)}{\not{p} - m_B} \right)^{-1} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_B + \Sigma(p)} \end{aligned} \quad (5.8.13)$$

²⁶U stvari, zbog bezmasenosti fotona u QED točna tvrdnja je da $p^2 = m_{\text{fiz}}^2$ nije pol već *točka grananja*, no u našim računima to neće igrati ulogu. U teorijama u kojima nema bezmasenih čestica fizikalna masa određuje položaj pola u Greenovim funkcijama.

Vidimo da smo uspjeli egzaktno sumirati i dobiti zatvoreni izraz za Greenovu funkciju koji vrijedi u svim redovima računa smetnje. Uzbuđenje ovim rezultatom malo spušta činjenica da vlastitu energiju $\Sigma(\not{p})$ znamo računati samo perturbativno. U stvari, mi smo je već izračunali na nivou jedne petlje i rezultat je dan u (5.8.7). Iz (5.8.13) slijedi da se renormalizirana Greenova funkcija može napisati kao:

$$\begin{aligned} iG^R(\not{p}) &= \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - m_B + \Sigma(\not{p})} = \frac{1}{1 + \delta_2} \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - m_B + \Sigma_2(\not{p}) + O(\alpha^2)} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_R + \delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m)m_R + \Sigma_2(\not{p}) + O(\alpha^2)} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_R + \Sigma_R(\not{p})} \end{aligned} \quad (5.8.14)$$

gdje smo definirali renormaliziranu vlastitu energiju kao

$$\Sigma_R(\not{p}) = \Sigma_2(\not{p}) + \delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_m)m_R + O(\alpha^2) \quad (5.8.15)$$

Ovaj rezultat mogli smo dobiti brže i jednostavnije da smo odmah raspisali lagranžijan koristeći renormalizirane veličine i kontračlanove. Ako u slobodni Diracov lagranžijan (koji je dio lagranžijana teorije (5.8.9))

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}^B \not{\partial} \psi^B - m_B \bar{\psi}^B \psi^B$$

uvrstimo

$$\psi^B = (1 + \delta_2)\psi^R, \quad m_B = (1 + \delta_m)m_R$$

dobijamo

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^R \not{\partial} \psi^R - m_R \bar{\psi}^R \psi^R + i\delta_2 \bar{\psi}^R \not{\partial} \psi^R - m_R(\delta_2 + \delta_m)\bar{\psi}^R \psi^R \quad (5.8.16)$$

Vidimo da kontračlanovi vode na nove članove u lagranžijanu, koje možemo uzeti da daju dva nova čvora u računu s Feynmanovim dijagramima. Nije teško pokazati da novi čvorovi točno daju doprinos kontračlanova u (5.8.15). Ova tehnika razvijanja lagranžijana pomoću renormaliziranih veličina i korištenje kontračlanova kao novih čvorova u perturbativnom računu se naziva **renormalizirana perturbativna teorija**. Kasnije ćemo se vratiti na ovo pitanje, gdje ćemo razmotriti i međudjelovanje s elektromagnetskim poljem.

On-shell recept oduzimanja

Jedan način definicije mase, koji ne ovisi o receptu oduzimanja, je dobiti je iz lokacije pola propagatora, tzv. **pol masa**. Za polja koja stvaraju fizikalne čestice koje postoje u asimptotskim Fockovim prostorima stanja LSZ formula nam kaže da je pol masa jednaka fizikalnoj masi.²⁷ Točnije rečeno, u $\not{p} = m_{\text{fiz}}$ propagator mora imati obični pol s reziduom jednakim i . Iz (5.8.15) slijedi da je položaj pola određen s

$$\Sigma_R(m_{\text{fiz}}) = m_R - m_{\text{fiz}} \quad (5.8.17)$$

Za razliku od m_{fiz} , sam m_R ovisi o receptu za oduzimanje. Npr. u minimalnom oduzimanju očito vrijedi $m_R \neq m_{\text{fiz}}$.

Zahtjev da je reziduom jednak i implicira:

$$i = \lim_{\not{p} \rightarrow m_{\text{fiz}}} (\not{p} - m_{\text{fiz}}) \frac{i}{\not{p} - m_R + \Sigma_R(\not{p})} = \lim_{\not{p} \rightarrow m_{\text{fiz}}} \frac{i}{1 + \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_R(\not{p})}$$

²⁷Kontraprimjer postoji u QCD-u u kojem elementarna fermionska polja, kvarkovska polja, ne stvaraju fizikalne čestice uslijed mehanizma kvarkovskog zatočenja.

gdje smo koristili L'Hospitalovo pravilo. Dobijamo uvjet:

$$\left. \frac{d}{d\tilde{p}} \Sigma_R(\tilde{p}) \right|_{\tilde{p}=m_{\text{fiz}}} = 0 \quad (5.8.18)$$

Uvjeti (5.8.17) i (5.8.18) implicitno definiraju fizikalnu masu i normalizaciju polja, neovisno o receptu oduzimanja.

U **on-shell receptu oduzimanja** za renormaliziranu masu se uzima fizikalna masa, $m_R = m_{\text{fiz}}$, pa uvjet (5.8.17) postaje

$$\Sigma_R(m_{\text{fiz}}) = 0 \quad (\text{on-shell recept oduzimanja})$$

Uvrštavanje (5.8.15) u gornju relaciju daje:

$$\delta_m m_{\text{fiz}} = \Sigma_2(m_{\text{fiz}}) + O(\alpha^2) \quad (5.8.19)$$

dok uvrštavanje u (5.8.18) daje:

$$\delta_2 = -\left. \frac{d}{d\tilde{p}} \Sigma_2(\tilde{p}) \right|_{\tilde{p}=m_{\text{fiz}}} + O(\alpha^2) \quad (5.8.20)$$

Sad možemo iskoristiti rezultat za Σ_2 izrečen u (5.8.7). Uvrštavanje u (5.8.19) daje:²⁸

$$\delta_m = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{3}{\epsilon} + \frac{3}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_{\text{fiz}}^2} + 2 \right) + O(\alpha^2)$$

Uvrštavanje u (5.8.20) vodi na sljedeći problem. Kratki račun daje:

$$\delta_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_{\text{fiz}}^2} + 2 + \ln(1-x) \Big|_0^1 \right) + O(\alpha^2)$$

Posljednji član u zagradi je očito divergentan! To je naizgled čudno jer smo se potrudili regularizirati UV divergencije koristeći dimenzionalnu regularizaciju. No, ove divergencije su u stvari IR divergencije, koje dolaze od integracije po "malenom" impulsu u petlji, tj. oko $k^\mu = 0$. To se najlakše vidi ako u računu fotonu umjetno dodamo malenu masu (u propagatoru zamjenimo $k^2 + i\epsilon \rightarrow k^2 - m_\gamma + i\epsilon$), gdje m_γ samo služi kao privremeni IR regulator. Nakon što se ispravno definiraju mjerljive veličine može se slobodno pustiti $m_\gamma \rightarrow 0$. No, kako 2-točkasta funkcija nije mjerljiva, zasad moramo držati regulator konačnim.

Ubacivanje neišchezavajuće mase u propagator fotona dovodi samo do promjene $\Delta \rightarrow \Delta + x m_\gamma^2$ u odnosu na (5.8.6), što znači da umjesto (5.8.7) imamo:

$$\Sigma_2(\tilde{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[(2-\epsilon)x\tilde{p} - (4-\epsilon)m_{\text{fiz}} \right] \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m_{\text{fiz}}^2 - x\tilde{p}^2) + x m_\gamma^2} \right\} \quad (5.8.21)$$

Korištenje ovog izraza u (5.8.20) daje:

$$\delta_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_{\text{fiz}}^2} + 2 + \ln \frac{m_\gamma^2}{m_{\text{fiz}}^2} \right) + O(\alpha^2)$$

Iako su renormalizacijske konstante polja formalno UV beskonačne, omjeri konstanti dobijenih za dva različita recepta odbijanja su UV konačni. Na primjer, omjer renormalizacijskih konstanti Z_2 dobijenih u MS i on-shell receptu je:

$$\frac{Z_2^{(\text{on-shell})}}{Z_2^{(\text{MS})}} = 1 + \delta_2^{(\text{on-shell})} - \delta_2^{(\text{MS})} + O(\alpha^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_{\text{fiz}}^2} + 2 + \ln \frac{m_\gamma^2}{m_{\text{fiz}}^2} \right) + O(\alpha^2) \quad (5.8.22)$$

²⁸Uočite da je razlika između m_B , m_R i m_{fiz} proporcionalna α .

dok je veza između renormaliziranih masa $m_R^{(\text{MS})}$ i m_{fiz} dana s

$$m_R^{(\text{MS})} = m_{\text{fiz}} + \Sigma_R^{(\text{MS})}(m_{\text{fiz}}) = m_{\text{fiz}} \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(4 + 3 \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_{\text{fiz}}^2} \right) + O(\alpha^2) \right] \quad (5.8.23)$$

Pošto za fizikalnu masu po definiciji vrijedi $dm_{\text{fiz}}/d\mu = 0$ iz gornje relacije slijedi

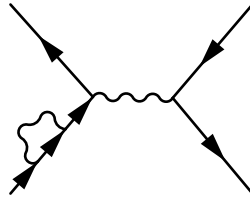
$$\frac{dm_R^{(\text{MS})}}{d\mu} \neq 0$$

iz čega slijedi da renormalizirana masa u MS receptu odbijanja nije mjerljiva veličina jer ovisi o skali μ . To je naprosto cijena koju se plaća za to da se radi s vrlo jednostavnim receptom.

Amputacija u S-matrici

Vrijeme je da se vratimo na izračun S-matrice u kontekstu teorije renormalizacije, i to na pitanje kvantnih korekcija na vanjskim nogama. Kako ovo pitanje zna biti zbunjujuće za novajlije, prvo ćemo ga razmotriti na specifičnom primjeru računa elektron-pozitron raspršenja nakon čega će generalizacija biti očita.

Razmotrimo sljedeće pitanje. Kad računamo S-matricu, odnosno invarijantnu amplitudu $\mathcal{M}$ za raspršenje $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$ koristeći Feynmanove dijagrame, da li trebamo u račun uključiti i dijagrame u kojima se petlje u potpunosti nalaze na vanjskim nogama, poput:



Odgovor je **ne**, a smisao ovog odjeljka je da to objasnimo.

Da bi razumjeli ovaj odgovor moramo se vratiti na LSZ redukcijску formulu (3.7.10), koja je bila ishodišna točka za izvod Feynmanovih pravila, i njen izvod. Ključ leži u tome da se sjetimo da su polja koja ulaze u LSZ formulu normalizirana tako da vrijedi

$$\langle \Omega | \psi(x) | e^- \mathbf{p} \sigma \rangle = e^{-ip \cdot x} u(\mathbf{p}, \sigma) \quad , \quad \langle \Omega | \psi(x) | e^+ \mathbf{p} \sigma \rangle = e^{ip \cdot x} v(\mathbf{p}, \sigma) \quad (5.8.24)$$

Tvrdimo da ovo zadovoljava renormalizirano polje u on-shell receptu odbijanja. To se može zaključiti iz strukture singulariteta 2-točkaste funkcije:

$$\tilde{G}_R^{(\text{on-shell})}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m} + \alpha \times (\text{konačni dio}) \quad (5.8.25)$$

Ako se vratimo na pojednostavljeni opis u kojem je međudjelovanje "uključeno" samo dok su čestice u zoni međudjelovanja, vidimo da limes $\alpha \rightarrow 0$ pri kojem držimo fiksnim renormalizirane konstante vodi na:

$$\tilde{G}_R^{(\text{on-shell})}(\not{p}) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{i}{\not{p} - m}$$

što odgovara 2-točkastoj funkciji slobodnog polja normaliziranog na "kanonski način", tj. onog koje zadovoljava (5.8.24).

LSZ formula kaže da invarijantna amplituda za $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$ raspršenje ima sljedeći oblik:

$$i\mathcal{M} = (-i)^4 u(p_1) \bar{u}(p'_1) \bar{v}(p_2) v(p'_2) (\not{q}_1 - m)(\not{q}_2 - m)(\not{q}'_1 - m)(\not{q}'_2 - m) \times \\ \times \tilde{G}_R^{(\text{on-shell})}(q_1, q_2, -q'_1, -q'_2) \Big|_{q=p, q'=p'} \quad (5.8.26)$$

Greenova funkcija u p -prostoru može se reprezentirati pomoću Feynmanovih dijagrama na sljedeći način:

gdje se podrazumijeva da središnji mjehur definira **amputiranu** Greenovu funkciju, kojoj po definiciji doprinose samo oni Feynmanovi poddijagrami u kojima se ne može rezanjem jedne unutarnje linije odvojiti samo jedna vanjska noga čitavog dijagrama. Treba uočiti da poddijagram:

nije ništa drugo nego 2-točkasta Greenova funkcija $\tilde{G}_R^{(\text{on-shell})}(\not{p})$. Primjena (5.8.26) i (5.8.25) kaže da se $\mathcal{M}$ može zapisati pomoću amputirane Greenove funkcije na jednostavniji način:

$$i\mathcal{M} = u(p_1) \bar{u}(p'_1) \bar{v}(p_2) v(p'_2) \tilde{G}_{R, \text{amp}}^{(\text{on-shell})}(p_1, p_2, -p'_1, -p'_2)_{\text{amp}}$$

Očito je da se ova formula na prirodan način generalizira na procese s proizvoljnim brojem čestica proizvoljnih spinova i masa, pa dolazimo do sljedećeg zaključka:

U računu za S-matricu ne treba uključivati dijagrame s kvantnim korekcijama (petljama) na vanjskim linijama.

5.8.4 Lambov pomak

Računi za QED koje smo napravili do sada nam omogućavaju da izračunamo **Lambov pomak** na jednoj petlji, tj. razliku energija nivoa $2S_{1/2}$ i $2P_{1/2}$ u atomu vodika koja dolazi od radijativnih korekcija na jednoj petlji. Iako je račun manje-više direktan (koristeći naučeno iz prethodnih poglavlja), prilično je dugačak pa ga ovdje nećemo napraviti. Spomenimo samo da dominantni doprinos dolazi upravo od radijativnih korekcija propagatora elektrona, koje smo upravo izračunali. Potpuni račun prvi su napravili Feynman, Schwinger i Tomonaga 1948. godine, potpuno nezavisno, i dobili različite rezultate. Točan rezultat,

$$\Delta E_L \equiv E(2S_{1/2}) - E(2P_{1/2}) = 1051 \text{ MeV} \quad (5.8.27)$$

je izvorno izvijestio samo Tomonaga, dok su Feynman i Schwinger naknadnom provjerom pronašli greške u svojim računima i pokazali da je rezultat Tomonage u stvari točan. Ova trojka je kasnije podijelila Nobelovu nagradu za fiziku, za doprinos razvoju teorijskih metoda kvantne teorije polja. Mjerenja daju rezultat $\Delta E_L = 1054 \text{ MeV}$, što je u slaganju s gornjim teorijskim rezultatom (odstupanje dolazi od doprinosa viših redova u računu smetnje).

5.9 Renormalizacija spinorne elektrodinamike (*u izradi*)*

Da bi dana kvantna teorija polja bila smislena, sve korelacijske funkcije moraju biti dobro definirane, što znači da renormalizacija mora eliminirati sve beskonačnosti koje se pojavljuju u njima. Podsjetimo se da je ideja renormalizacije da parametri teorije apsorbiraju UV beskonačnosti koje dolaze od dijagrama s petljama. Pošto teorije koje smo razmatrali imaju konačan (dapače vrlo mali) broj parametara, a korelacijskih funkcija u svakoj teoriji ima beskonačno mnogo, logično je zapitati se da li postojeći parametri u klasičnom lagranžijanu mogu obaviti ovaj posao. Ako ne mogu, pitanje je da li se stvar može popraviti dodavanjem konačnog broja novih članova u lagranžijan ili proces perturbativne renormalizacije zahtijeva nove članove s novim parametrima *ad infinitum*.

Razmotrimo naš standardni primjer, spinornu QED, za koju je lagranžijan dan s:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B)^2 + \bar{\psi}^B(i\not{\partial} - e_B \not{A}^B - m_B)\psi^B + \rho_B \quad (5.9.1)$$

gdje B označava da su sve veličine **gole** (tj. nerenormalizirane). Vidimo da postoji samo pet parametara u lagranžijanu: energija vakuuma ρ , konstanta vezanja/naboj e , masa m i konstante renormalizacije polja A_μ i ψ . Uočite da smo u procesu renormalizacije na jednoj petlji do sada potrošili već četiri od njih, a pokazat ćemo da peti uopće nije nezavisan, a tek smo razmotrili n -točkaste korelatore sa $n \leq 3$. Da li je moguće da je, i ako da zašto, ovih pet parametara dovoljno da apsorbira sve perturbativne UV beskonačnosti u teoriji? U ovom i sljedećem odjeljku pokazat ćemo da je odgovor **da** i pri tom razjasniti kriterije pomoću kojih možemo brzo dobiti odgovor za široku klasu kvantnih teorija polja.

5.9.1 Kontračlanovi

Proučavanje UV svojstava elektrodinamike ćemo iskoristiti za demonstraciju renormalizirane perturbativne teorije. U ovom pristupu renormalizaciji lagranžijan teorije, u našem slučaju (5.9.1), se napiše pomoću renormaliziranih veličina (parametara i polja) i kusura, gdje kusura vodi na nove čvorove koji se nazivaju **kontračlanovi** i čija funkcija je da ponište beskonačnosti koje dolaze od UV dijela integracije u petljama. U slučaju QED, to znači da uvedemo renormalizirana polja ψ^R i A_μ^R koja imaju dobro definirane (UV konačne) korelatore, koja ćemo povezati s golim poljima na način

$$\psi^B(x) = \sqrt{Z_2} \psi^R(x) \quad , \quad A_\mu^B(x) = \sqrt{Z_3} A_\mu^R(x) \quad (5.9.2)$$

gdje se Z_2 i Z_3 nazivaju konstante renormalizacije polja. Također, sličnom logikom, uvodimo renormaliziranu masu m_R

$$m_B = Z_m m_R \quad (5.9.3)$$

i renormalizirani naboj

$$e_B = Z_e e_R \quad (5.9.4)$$

Mi smo se već susreli s renormalizacijom naboja i mase i razmotrili nekoliko standardnih načina definicije e_R i m_R . U ovom trenutku nema potrebe za specifikacijom renormalizacijske sheme, dovoljno je pretpostaviti da su renormalizirane veličine **konačne**. Uvrštavanje (5.9.2)-(5.9.2) u (5.9.1) daje:

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 + iZ_2 \bar{\psi}^R \not{\partial} \psi^R - Z_2 Z_m m_R \bar{\psi}^R \psi^R - Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} e_R \bar{\psi}^R \not{A} \psi^R + \rho_B \quad (5.9.5)$$

Radi ekonomičnosti zapisa, od sada nadalje ćemo izbaciti oznaku R sa renormaliziranih polja. Gola polja ćemo i dalje označavati s B tako da ne može doći do zabune.

Pokazuje se spretnim umjesto Z_e uvesti konstantnu renormalizacije Z_1 definiranu s

$$Z_1 \equiv Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} \quad (5.9.6)$$

Na taj način (5.9.5) postaje

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + iZ_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - Z_2 Z_m m_R \bar{\psi} \psi - Z_1 e_R \bar{\psi} \not{A} \psi + \rho_B \quad (5.9.7)$$

Od sada nadalje ćemo ignorirati parametar ϕ_B , jer gustoća energije vakuuma igra pasivnu ulogu u proceduri koja slijedi.

Sada dolazimo do središnje ideje renormalizirane perturbativne teorije, a ta je da razvijemo renormalizacijske parametre oko klasičnih (drvastih) vrijednosti. Ove su očito dane s $Z_2 = Z_3 = 1$, dok zahtjev da e_R odgovara klasičnoj vrijednosti naboja vodi na $Z_1 = 1$ na drvastoj razini. Stoga su razvoji oko drvastih vrijednosti dani s:

$$Z_1 \equiv 1 + \delta_1 \quad , \quad Z_2 \equiv 1 + \delta_2 \quad , \quad Z_3 \equiv 1 + \delta_3 \quad , \quad Z_m \equiv 1 + \delta_m \quad , \quad (5.9.8)$$

Katkada je spretno koristiti parametar Z_e , za iz (5.9.6) i (5.9.8) slijedi

$$Z_e \equiv 1 + \delta_e \quad , \quad \delta_e = \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 + O(e_R^4) \quad (5.9.9)$$

Veličine δ_a se nazivaju **kontračlanovi**, a po definiciji su proporcionalne e_R^2 (i, kao što ćemo vidjeti, sadrže beskonačni razvoj u e_R^2).

Uvrštavanje (5.9.8) u lagranžijan (5.9.7) daje

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m_R)\psi - e_R \bar{\psi}\not{A}\psi \\ & -\frac{\delta_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\delta_2\not{D} - (\delta_2 + \delta_m)m_R]\bar{\psi}\psi - \delta_1 e_R \bar{\psi}\not{A}\psi \end{aligned} \quad (5.9.10)$$

Ovo je ishodišni lagranžijan za renormaliziranu perturbativnu teoriju.

Razmotrimo поближе izraz u (5.9.10). Prvi red s desne strane jednakosti odgovara "klasičnom" lagranžijanu QED i vodi na Feynmanova pravila koja smo napisali ranije, u kojima na mjestu naboja e figurira e_R , a na mjestu mase m figurira m_R . Ostatak lagranžijana, koji se nalazi u drugom redu jednakosti, je kusur koji dolazi od kontračlanova. Ideja renormalizirane perturbativne teorije je da kusur tretira kao dio interakcijskog lagranžijana, pa stoga vodi na dodatne čvorove u Feynmanovim pravilima koje ćemo nazivati kontra-čvorovi. Ove čvorove ćemo označiti križem $\times$, i na taj način ih razlikovati od "standardnih" čvorova.

Primjenom znanja stečenog na kolegiju možemo konstruirati pravila za kontra-čvorove u (5.9.10). Tri člana u drugom redu daju redom sljedeće kontra-čvorove i njihove doprinose:

$$= i\delta_3(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \quad (5.9.11)$$

$$= i[\not{p}\delta_2 - (\delta_2 + \delta_m)m_R] \quad (5.9.12)$$

$$= -ie_R\delta_1\gamma^\mu \quad (5.9.13)$$